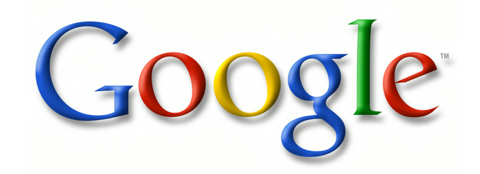










LEHRBUCH

DER

ELEMENTAR-GEOMETRIE

VON

Julius
J. HENRICI UND P. TREUTLEIN,
PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU HEIDELBERG. PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU KARLSRUHE.

ERSTER TEIL.

GLEICHHEIT DER PLANIMETRISCHEN GRÖSSEN.
KONGRUENTE ABBILDUNG IN DER EBENE.

PENSUM DER TERTIA.



MIT 188 FIGUREN IN HOLZSCHNITT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1881.

Vorwort.

Ein Blick in das Inhaltsverzeichnis zeigt, dafs die Verfasser mit dem vorliegenden Lehrbuch derjenigen Richtung in der Behandlung der Elementargeometrie zu entsprechen beabsichtigen, welche endlich definitiv die Euklidsche Anordnung und deren Abarten nach französischen Mustern aufgeben will. Für die Berechtigung dieser Richtung hier eine Lanze zu brechen ist überflüssig, wenn das Buch selbst für sie spricht; sollte das letztere nicht der Fall sein, dann freilich hätten wir vergeblich gearbeitet. Wir verweisen hier nur einerseits auf die von kompetenter Seite (Hauck, Fiedler, Schlegel u. A.) geäufserten Wünsche, die auch in der Hoffmannschen Zeitschrift eine kräftige Vertretung gefunden haben, andrerseits auf die Thatsache, dafs schon mehrere Lehrbücher in gleicher Richtung vorangegangen sind (Müller, Kruse, Schlegel), sowie auf die Anordnungen hoher Behörden, welche Abschnitte der neueren synthetischen Geometrie für den Unterricht vorschreiben.

Während der vorliegende erste Teil nur die Gleichheit planimetrischer Gröfsen und die kongruente Abbildung in der Ebene behandelt, wird sich der zweite Teil mit den Verhältnissen und Berechnungen solcher Gröfsen (incl. Trigonometrie) und mit der perspektivischen Abbildung in der Ebene befassen und der dritte Teil mit der Geometrie des Mafses und der Lage von Gebilden, die nicht in einer Ebene liegen. Hierbei werden insbesondere die Kegelschnitte von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet werden. Jeder Teil erhält eine kleine Aufgabensammlung.

Gegenüber der Starrheit und Unbeweglichkeit der geometrischen Gebilde bei Euklid führt in der modernen Betrachtungsweise die Entstehung der Gebilde durch Bewegung und die Änderung ihrer Lage zu einer gröfseren Anschaulichkeit und natürlicheren Beweisführung. Es ist wohl überflüssig, in pädagogischer Hinsicht hier darauf aufmerksam zu machen, dafs der Lehrer diese Veränderungen der Lage

an handlichen Figuren in der That ausführen läfst, bis er den Schüler dazu reif findet, mit den die Bewegung bestimmenden Begriffen zu operieren.

Die Zahl der durch Lehrsätze markierten Halt- und Ruhepunkte in der Entwickelung ist bedeutender geworden, als in der hergebrachten Darstellung; dafür sind aber die Beweise wesentlich vereinfacht und meist durch ein Citat erledigt. Die Anforderung an das Gedächtnis des Schülers, der ja doch nicht blofs den Lehrsatz, sondern auch dessen Beweis kennen soll, ist durch die sachgemäfse Reihenfolge der ersteren und die Kürze der letzteren gegenüber der älteren Methode eher verringert als vermehrt.

Soll in einem Kurs die neuere Geometrie nicht berücksichtigt werden, so können die §§. 6, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 12, 4, 16, 4, 18 excl. 4, a und b, 34, 8, 38, 7 wegbleiben. Bei einer Beschränkung des geometrischen Unterrichts auf vorliegenden ersten Teil können auch die §§. 21, 7, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 42, 6, 7 u. a. ausfallen.

Um dem Gebrauch von Mafsstab und Winkelscheit zu seinem Rechte zu verhelfen, welche Konstruktionsmittel der Schüler bei zu frühem Gebrauch des Zirkels nie recht handhaben lernt, wird die Benützung des letzteren erst im dritten Abschnitt erfordert.

Was die Orthographie betrifft, so folgte der Setzer der neuen Verordnung. Wir kamen mit ihm etwas in Kollision, da wir bei Worten, die aus dem Lateinischen stammen, statt k und z das c beizubehalten wünschten, jedoch nur mit teilweisen Erfolg, was eine kleine Inkonsequenz zur Folge hatte.

I. Abschnitt.

Entstehung der geometrischen Gebilde, insbesondere von Strecke und Winkel.

Erstes Kapitel: Die Grundgebilde der Geometrie.

Zweites Kapitel: Die Strecke und der Winkel.

II. Abschnitt.

Vergleichung von Strecken und von Winkeln durch Veränderung ihrer Lage.

Drittes Kapitel: Die Umwendung. Symmetrische Lage.

Viertes Kapitel: Die halbe Umdrehung. Diametrale Lage.

Fünftes Kapitel: Die Drehung.

Sechstes Kapitel: Die Verschiebung. Perspektivische Kongruenz.

III. Abschnitt.

Die Kreislinie: ihre Anwendung zur Übertragung und Vergleichung von Strecken und Winkeln.

Siebentes Kapitel: Der Kreis in Verbindung mit Punkt, Gerade und Kreis.

Achtes Kapitel: Der Kreis als Mittel der Übertragung gleicher Strecken.
(Zirkelkonstruktionen.)

Neuntes Kapitel: Vergleichung ungleicher Strecken mittels des Kreises.

Zehntes Kapitel: Kreis und Winkel.

IV. Abschnitt.

Strecken, Winkel und Kreise geschlossener Figuren.

Elftes Kapitel: Dreieck und Dreiseit.

Zwölftes Kapitel: Viereck und Vierseit.

Dreizehntes Kapitel: Das Vieleck und Vielseit.

V. Abschnitt.

Vergleichung der Flächen geschlossener Figuren.

Vierzehntes Kapitel: Vergleichung von Flächen.

Fünfzehntes Kapitel: Verwandlung und Teilung von Flächen.

Anhang.

Übungsaufgaben.

I. Abschnitt.

Entstehung der geometrischen Gebilde, insbesondere von Strecke und Winkel.

Erstes Kapitel.

Die Grundgebilde der Geometrie.

§. 1. Stellung und Gegenstand der Geometrie.

1. Die Geometrie ist ein Zweig der Mathematik oder Gröfsenlehre. Während der erste Teil der Mathematik, die Arithmetik, sich mit den Gröfsen an sich oder den Zahlen beschäftigt (wobei die Beschaffenheit der Gröfsen, bzw. die Einheit oder das Mafs willkürlich bleibt), ist die Geometrie die Wissenschaft von den Raumgröfsen (Raumgebilden oder geometrischen Gebilden). Sie behandelt die räumlichen Beziehungen der letzteren (ihre Lage, Form, Gröfse) und lässt alle Eigenschaften derselben ausser Betracht, welche nicht einzig nur den Raum betreffen (wie z. B. die Undurchdringlichkeit).

2. Die Raumelemente sind Körper, Fläche, Linie, Punkt. — Ein vollständig abgegrenzter Teil des Raumes heifst ein geometrischer Körper oder kurz Körper; er ist blofs der Raum des entsprechenden physischen Körpers. — Die Fläche ist die Grenze zweier solchen aneinander stofsenden Raumteile; sie hat demnach zwei Seiten, je eine zugekehrt einem der beiden Teile des Raumes. — Die Linie ist die Grenze zweier aneinander stofsenden Flächenteile; sie kehrt somit jedem dieser Teile eine Seite zu. — Der Punkt ist die Grenze zweier zusammenstofsenden Teile einer Linie; diese liegen also auf verschiedenen Seiten des Punktes.

3. Die Geometrie betrachtet jedoch die geometrischen Gebilde nicht blos als Grenzen, sondern losgelöst von einander und willkürlich zu geometrischen Figuren zusammengestellt. Wir können nämlich diese Gebilde auch, vom Punkt ausgehend, entstehen lassen oder entstanden denken durch Bewegung. Da wo ein Gebilde ruht ist seine Stelle; wenn diese in Bezug auf ein anderes Gebilde bestimmt wird, heifst sie seine Lage. — Jedes Gebilde kann man an eine andere Stelle im Raume gebracht oder bewegt denken. Die zur Bewegung erforderliche Zeit wird in der Geometrie nicht berück-

sichtigt, sondern erst in einem dritten Teile der Mathematik, in der Mechanik.

§. 2. Entstehung der Grundgebilde durch Bewegung.

1. Ein Punkt kann aufgefafst werden als ein so verschwindend kleiner Teil des Raumes, dafs von ihm keine Ausdehnung (Teile, Grenzen) in Betracht kommt.

Bezeichnung auf dem Papier durch zwei einander schneidende Striche und Benennung durch einen (grofsen, lateinischen) Buchstaben. Gröfsere Punktsignale sind beim Feldmessen im Gebrauch (wie z. B. Pfähle, Stäbe, Steine, Türme), noch weit gröfsere in der Astronomie (z. B. Fixsterne).

2. Eine Linie. a) Denkt man sich einen Punkt stetig bewegt und fafst man die Lagen, in welchen er sich nacheinander befindet, alle zusammen, so gewinnt man die Vorstellung einer Linie: unter Linie versteht man also die Gesamtheit der Lagen eines bewegten Punktes, den sogenannten geometrischen Ort desselben. Von jeder einzelnen Lage des Punktes sagt man: der Punkt liegt auf der Linie oder die Linie geht durch den Punkt.

Bildliche Darstellung auf dem Papier und Benennung durch einen, zwei oder mehrere Buchstaben, wie etwa Linie a, AB, ACB.

Fig. 1.

Beispiele: Feurige Kohle, Rakete, Sternschnuppe, Wasserstrahl eines Brunnens.

b) Begrenzung. Eine Linie ist durch einen Punkt (die Anfangslage) A einseitig begrenzt, durch diesen und die Endlage B des bewegten Punktes vollständig begrenzt; beide heifsen Grenzpunkte der Linie. Fallen die Anfangs- und Endlage des die Linie beschreibenden Punktes an derselben Stelle zusammen, so heifst die Linie geschlossen, z. B. $ACBA$, andernfalls offen. Zwei Punkte einer geschlossenen Linie, wie A und C, bestimmen zwei vollständig begrenzte Teile, ABC und AB_1C. Kann man sich die Bewegung des eine offene Linie beschreibenden Punktes nach beiden Seiten desselben unbegrenzt fortgesetzt denken, so heifst die Linie unbegrenzt.

Fig. 2.

c) Schnitt zweier Linien. Haben zwei Linien ASB und XSY einen Punkt S gemeinsam, so heifst er Schnittpunkt; die Linien schneiden einander in diesem Punkte. Man kann zwei Linien stets in eine solche Lage gebracht denken, dafs irgend ein Punkt der einen mit einem beliebigen Punkte der andern zusammenfällt.

Fig. 3.

3. Eine Fläche. a) Denkt man sich eine Linie stetig so bewegt, dafs ihre Punkte verschiedene Linien beschreiben, und fafst

man die Lagen, welche sie nacheinander einnimmt, alle zusammen, so erhält man die Vorstellung einer Fläche: eine Fläche ist die Gesamtheit der Lagen einer bewegten Linie.

Beisp. Schnittfläche beim Durchschneiden eines Körpers; Schatten.

b) Begrenzung. Eine Fläche wird durch eine Linie, die Anfangslage der bewegten Linie, einseitig begrenzt, durch diese und durch die Endlage zweiseitig begrenzt, durch diese beiden und durch die von den Grenzpunkten der Linie beschriebenen Linien allseitig begrenzt. — Eine unbegrenzte Fläche kann entstehen durch Bewegung einer unbegrenzten Linie, deren Punkte selbst unbegrenzte Linien beschreiben oder in die Anfangslage der Linie zurückkehren, — oder auch durch die Bewegung einer geschlossenen Linie, deren Punkte unbegrenzte Linien beschreiben.

c) Schnitt zweier Flächen. Zwei Flächen können eine Linie gemeinsam haben, ihre Schnittlinie; die Flächen schneiden einander in ihr. — Man kann zwei Flächen stets in eine solche Lage gebracht denken, dafs irgend ein Punkt der einen mit einem beliebigen Punkte der andern Fläche zusammenfällt und sie einander in einer durch diesen Punkt gehenden Linie schneiden.

4. Ein Körper ist die Gesamtheit der Lagen, welche eine Fläche bei ihrer Bewegung der Reihe nach einnimmt, wenn dabei die Linien der Fläche verschiedene Flächen beschreiben.

§. 3. Die gerade Linie.

1. Die einfachste unter allen Linien ist die gerade Linie oder Gerade; wir denken sie uns nach beiden Seiten eines in ihr gelegenen Punktes unbegrenzt fortgesetzt oder verlängert. Die Gerade ist näher bestimmt durch folgenden der Anschauung entnommenen Grundsatz (Axiom der Geraden):

Durch zwei Punkte geht immer eine, aber nur eine einzige Gerade; — oder:

Wenn zwei Gerade zwei Punkte mit einander gemein haben, so fallen sie in eine einzige zusammen, d. h. sie decken einander in allen ihren Punkten.

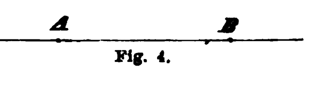


Fig. 4.

Die durch zwei Punkte (A und B) gehende (unbegrenzte) Gerade (AB) heifst die Verbindungsgerade (Verbindungslinie) der Punkte

Eine Linie, von welcher kein Teil mit einem Teil einer Geraden zur Deckung gebracht werden kann, heifst eine krumme Linie oder Kurve.

Prüfung eines Lineals.

2. Die Punkte auf einer Geraden. Jeder durch einen Punkt einseitig begrenzte Teil einer Geraden heifst Halbstrahl; jeder der beiden Halbstrahlen heifst Gegenstrahl des andern. — Wählt man

auf einer Geraden einen Punkt A als Ausgang, einen andern B als Ziel einer Bewegung, so wird durch diese fortschreitende Bewegung eine Richtung bestimmt, und nur im Gedanken an diese Bewegung eines Punktes spricht man auch von der Richtung einer Geraden. Da aber Ausgang und Ziel auch vertauscht werden können, so hat man in der Geraden einen Richtungsgegensatz, einen zweifachen Richtungssinn oder zwei Richtungen zu unterscheiden; die eine heifst Gegenrichtung der andern.

Die Punkte einer Geraden bilden eine Punktreihe; die Gerade wird Träger dieser Punktreihe genannt.

3. Die Geraden durch einen Punkt. Aus 1. folgt:

Zwei Gerade können einander höchstens in einem Punkte schneiden.

Durch einen Punkt S lassen sich unzählig viele Geraden ziehen; man nennt sie Strahlen des Punktes S und ihre Gesamtheit ein Strahlenbündel S. Letzterer wird auch erhalten durch Drehung einer Geraden um einen ihrer Punkte S, d. h. durch eine Bewegung, bei welcher einzig der Punkt S an seiner Stelle bleibt. Dieser heifst der Drehpunkt, der Scheitel des Strahlenbündels.

4. Drehung der Geraden um einen ihrer Punkte längs einer Geraden. Geschieht die Drehung einer Geraden um einen Drehpunkt S der Art, dafs sie mit einer festen Geraden, Leitlinie, einen Punkt gemeinsam behält, so kann diese drehende Bewegung von einer Anfangslage der Geraden a und des Schnittpunktes A aus so vor sich gehen, dafs

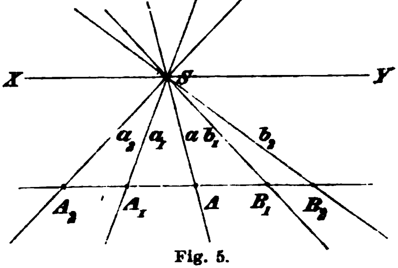


Fig. 5.

der Schnittpunkt den einen Halbstrahl AA_1A_2 oder dessen Gegenstrahl AB_1B_2 durchläuft; hiernach unterscheidet man die Drehung in dem einen Drehungssinn (dem Uhrzeiger entsprechend, Rechtsdrehung) oder in dem entgegengesetzten (Linksdrehung). — Der Schnittpunkt rückt dabei in der einen Richtung AA_1A_2 oder in der Gegenrichtung AB_1B_2 immer weiter, unbegrenzt weit hinaus. Die Gerade hat nun, wie die Anschauung zeigt, als Leitlinie die Eigenschaft, dafs durch die Drehungen in entgegengesetztem Sinne beide sich drehende Strahlen mehr und mehr in entgegengesetzte Richtungen SX und SY kommen, und zwar in die Richtungen einer Geraden XSY, welche die Leitlinie nicht schneidet. Über diese Lage hinaus kann die Drehung in demselben Drehungssinn (A_1, A_2, X) so fortgesetzt werden, dass der Schnittpunkt von der andern Seite (B_2, B_1) wieder in seine ursprüngliche Lage rückt. Wir gelangen hiernach zu folgendem Grundsatz (Axiom der Parallelen):

Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden giebt es immer eine einzige

Gerade, welche erstere nicht schneidet, aber durch die geringste (eine unbeschränkt kleine) Drehung um den Punkt in eine Lage gebracht werden kann, in welcher sie die erstere Gerade bei gröfster (unbeschränkt grofser) Verlängerung nach der einen oder andern Seite schneidet. Diese Gerade heifst parallel (‖) *zu ersterer.* ($XSY \parallel A_1AB_1$.)

Thatsächlich kann ein erreichbarer Teil der Parallelen nicht von einem solchen Teil derjenigen Geraden unterschieden werden, welche die Leitlinie bei sehr weit fortgesetzt gedachter Verlängerung in der einen oder andern Richtung schneidet.

Setzt man die drehende Bewegung stets in einerlei Sinn fort, bis die Gegenstrahlen der bewegten Geraden ihre anfängliche Lage vertauscht haben, so sagt man, es habe eine halbe Umdrehung stattgefunden. Wird die Bewegung aber in einerlei Sinn von der Anfangslage aus soweit fortgesetzt, dafs die Halbstrahlen selbst wieder in ihre Anfangslage zurückkommen, so ist damit eine ganze oder volle Umdrehung ausgeführt.

Wird eine Gerade um einen Punkt gedreht, während sie mit einer geschlossenen Linie stets einen Punkt gemein hat, so kehrt sie schliefslich wieder in ihre Anfangslage zurück. Dies ist nun auch bei der vollen Umdrehung längs einer Geraden der Fall; die Gerade verhält sich dabei als Leitlinie so, als ob man durch ihre Verlängerung in der einen und anderen Richtung zu einem einzigen bestimmten Punkt gelange, durch welchen die gedrehte Gerade in der parallelen Lage gehe. Man spricht daher auch von der Parallelen zu einer Geraden als von der Geraden nach dem unendlich fernen Punkte der letzteren, eine Redeweise, welche nur den engen Anschlufs der Parallelen zu einer Geraden an die die letztere schneidenden Geraden ausdrücken soll.

5. Zwei Geraden, die einander weder schneiden, noch parallel sind, heifsen einander kreuzend oder windschief.

§. 4. Die ebene Fläche.

1. Die Fläche, welche eine unbegrenzte Gerade (Erzeugende) beschreibt (§ 2, 3), die um einen Punkt (Drehpunkt) sich drehend und zugleich auf einer Geraden (Leitlinie) fortgleitend eine halbe Umdrehung macht, heifst eine ebene Fläche oder Ebene; dieselbe ist sonach unbegrenzt (§ 2, 3b). Von ihr gilt der Grundsatz (Axiom der Ebene):

Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ist stets eine einzige Ebene möglich; — oder:

Wenn drei nicht in einer Geraden liegende Punkte einer Ebene mit Punkten einer andern Ebene zur Deckung gebracht werden, so decken die Ebenen einander in allen ihren Punkten.

Jeder Punkt einer Ebene läfst sich somit für ihre Entstehung als Drehpunkt, jede Verbindungsgerade zweier weiteren Punkte als Leitlinie auffassen.

2. Die Geraden in einer Ebene. Aus 1. folgt, dafs eine Gerade um jeden Punkt einer Ebene eine volle Umdrehung innerhalb der Ebene vollziehen kann. Bei einer halben Umdrehung werden alle Lagen beschrieben, welche die Gerade durch den Drehpunkt in der Ebene einnehmen kann, bei einer vollen Umdrehung alle Lagen der durch den Punkt gehenden Halbstrahlen. — Die Geraden einer Ebene, welche durch einen Punkt gehen, bilden einen Strahlenbüschel (oder Vielstrahl, im Besonderen: Zweistrahl, Dreistrahl u. s. w.); der Punkt selbst ist der Scheitel desselben.

Aus 1. folgt ferner:

a) *Eine Gerade durch zwei Punkte einer Ebene fällt vollständig in die Ebene.*

Eine solche Gerade begrenzt einseitig zwei Teile der Ebene, deren jeder Halbebene heifst; beide werden in Bezug auf einander Gegenseiten genannt.

Weiter folgt aus 1.:

b) *Zwei Gerade einer Ebene schneiden einander oder sie sind parallel.*

Denn eine derselben kann als Leitlinie, die andere als Erzeugende aufgefafst werden.

Ferner folgt hieraus noch der Satz:

c) *Wenn eine Gerade einer Ebene eine von zwei Parallelen schneidet, so schneidet sie auch die andere.*

Sie kann nämlich der zweiten Parallelen nicht parallel sein, da in diesem Fall durch den Schnittpunkt mit der ersteren nun zwei Parallele zur zweiten gingen, was dem Axiom der Parallelen widerspricht.

d) *Wenn zwei Gerade einer Ebene einer dritten Geraden parallel sind, so sind sie selbst parallel.*

Denn erstere Geraden können einander nicht schneiden, da in diesem Fall durch ihren Schnittpunkt zwei Parallele zur dritten gingen.

3. Die Ebenen durch eine Gerade. Aus dem Axiom von der Ebene folgt:

Zwei Ebenen können einander nur in einer Geraden schneiden; denn hätten sie aufser dieser noch einen Punkt gemein, so müfsten sie einander vollständig decken.

Durch eine Gerade lassen sich beliebig viele Ebenen legen, indem noch ein beliebiger weiterer Punkt aufser ihr als die Lage der Ebene bestimmend angenommen werden kann. Man bezeichnet nun diejenige Art von Bewegung eines geometrischen Gebildes, bei welcher zwei Punkte, also auch (§. 3, 1) die sämtlichen Punkte ihrer Verbindungsgeraden, an derselben Stelle bleiben, als Drehung um die Gerade und letztere als Drehaxe. Es ist ersichtlich, dafs durch Drehung einer Ebene um eine in ihr liegende Gerade alle möglichen Lagen von Ebenen durch diese Gerade erhalten werden. Wird nun die Ebene soweit gedreht, dafs nach der Drehung jeder Punkt

wieder an seiner ursprünglichen Stelle ist, so heifst diefs eine volle Umdrehung um jene Axe; wird aber nur soweit gedreht, dafs nach der Drehung jede Halbebene in die frühere Lage ihrer Gegenseite kommt, so hat eine halbe Umdrehung um die Axe oder eine Umwendung (Umlegung) stattgefunden.

Aus dem Axiom der Ebene ergiebt sich: So oft man zwei bestimmte Punkte A_1 und B_1 einer Ebene mit solchen A_2 und B_2 einer zweiten Ebene zur Deckung bringt, sowie eine durch die Verbindungsgerade dieser Punkte begrenzte, bestimmte Halbebene α_1 der ersteren Ebene mit einer solchen α_2 der zweiten, so kommen jeweils die ganzen Ebenen auf einerlei Weise zur Deckung, d. h. ein beliebig gewählter Punkt der einen Ebene fällt stets mit einem und demselben bestimmten Punkte der andern Ebene zusammen.

§. 5. Die Planimetrie.

Die Planimetrie beschäftigt sich nur mit den geometrischen Gebilden oder Figuren der Ebene. Das Folgende beschränkt sich daher auf solche Figuren auch da, wo dies nicht ausdrücklich hervorgehoben ist; im ersten Teile werden die geometrischen Gröfsen auf ihre Gleichheit und ihren Unterschied untersucht, im folgenden Teile auf ihr Verhältnis und zusammengesetztere Beziehungen. Im ersten Teil wird die Abbildung einer geometrischen Figur ohne Veränderung des Mafses oder der Gröfse (Kongruenz und Gleichheit), im folgenden die Abbildung in verschiedenem Mafse (Ähnlichkeit, Projektivität) behandelt.

Die der Betrachtung zuerst sich darbietenden Gröfsen sind die Entfernung zweier Punkte (Strecke) und der Richtungsunterschied zweier Geraden (Winkel).

Zweites Kapitel.

Die Strecke und der Winkel.

§. 6. Die Strecke zwischen zwei Punkten.

1. Ein zwischen zwei Punkten einer Geraden befindlicher Teil derselben heifst eine Strecke; die Punkte heifsen ihre Grenzpunkte; jeder der beiden andern Teile der Geraden heifst die Verlängerung der Strecke. Die Strecke giebt die Entfernung oder den Abstand der beiden Punkte an. — Man bezeichnet eine Strecke durch einen an oder auf sie geschriebenen (kleinen) Buchstaben oder durch Nebeneinandersetzen der an ihren Grenzpunkten stehenden (grofsen) Buchstaben

Eine Strecke AB kann aufgefafst werden als durch die Bewegung eines Punktes entstanden; dabei kann der eine Grenzpunkt A

Anfangspunkt und der andere B Endpunkt sein, oder umgekehrt. Um diesen Gegensatz (§. 3, 2) auszudrücken, bezeichnet man die Strecke im ersten Fall durch AB, im letzten durch BA, d. h. man führt den Anfangspunkt zuerst an. Bildlich läfst sich die Richtung durch einen beigesetzten Pfeil andeuten.

Fig. 6.

Denkt man sich zwei Strecken einer Geraden in derselben Richtung durchlaufen (AB und BC in Fig. 8), so nennt man sie gleichgerichtet; werden sie in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen gedacht, so heifsen sie gegengerichtet (AB und CB).

2. Gleichheit von Strecken. Zwei Strecken heifsen gleich (z. B. $AB = A_1 B_1$), wenn sie von einem Punkte einer Geraden aus auf dieser nach einerlei Richtung abgetragen einander vollständig decken.

Fig. 7.

Das Abtragen einer Strecke kann mit Hilfe eines geradlinig begrenzten Papierstreifens geschehen, auf welchem beim Anlegen desselben an die Strecke deren Grenzpunkte markiert wurden — oder mit Hilfe eines Mafsstabes oder Zirkels.

3. Zusammensetzung, Summe von Strecken. Zwei Strecken, welche auf einer Geraden einen Grenzpunkt gemeinsam haben, ohne einander (auch nur teilweise) zu decken, bilden zusammen eine weitere Strecke, welche man die Summe der ersteren nennt:

$$AB + BC = AC$$
$$a + b = c.$$

Fig. 8.

Man erhält die Summe zweier Strecken, wenn man die eine auf der Verlängerung der andern unmittelbar vom Grenzpunkt aus abträgt. Durch Abtragen von weiteren Strecken läfst sich auch die Summe von mehreren Strecken bilden. Die Ordnung des Abtragens ist dabei willkürlich.

4. Zerlegung, Differenz von Strecken. Durch einen oder mehrere Punkte einer Strecke wird diese in zwei oder mehrere Teilstrecken geteilt, deren Summe gleich der ursprünglichen Strecke ist. So ist die Strecke AC durch B in die Teilstrecken AB und BC zerlegt.

Eine Strecke AB heifst kleiner als eine andere AC, $AB < AC$, wenn sie einem Teile der letzteren gleich ist; die letztere heifst gröfser als erstere, $AC > AB$. Man erhält die Differenz zweier Strecken, wenn man die kleinere auf der gröfseren von einem Grenzpunkte aus abträgt, so dafs sie einen Teil der gröfseren bedeckt; der nicht bedeckte Teil ist die Differenz: $AC - BC = AB$, ebenso $AC - AB = BC$.

Um eine Strecke praktisch zu halbieren, kann man eine Strecke,

welche nach dem Augenmafs ungefähr gleich der Hälfte der Strecke ist, von beiden Grenzpunkten derselben aus nach innen abtragen, mit der in der Mitte gebildeten Strecke ebenso verfahren, bzw. sie nach dem Augenmafs halbieren.

5. Positive und negative Strecken. Wird eine von den beiden Richtungen einer Geraden als positiv bezeichnet, so ist die Gegenrichtung negativ zu nehmen, und ebenso die in dem bezüglichen Sinne durchlaufenen Strecken; d. h.:

$$+BA = -AB \text{ und } AB + BA = 0.$$

Hiernach gilt für die Abstände irgend dreier Punkte A, B, C einer Geraden

$$AB + BC = AC,$$

wobei es einerlei ist, in welcher Reihenfolge die Punkte liegen; denn

Fig. 9.

es bedeutet die linke Seite der Gleichung stets eine Bewegung von A bis B und von da bis C, so dafs man schliefslich von A nach C gekommen ist, wie dies die rechte Seite fordert.

Den Begriff des Teilens einer Strecke AC durch einen Punkt B dehnt man auch auf den Fall aus, dafs der Punkt B auf der Verlängerung der Strecke AC liegt; der Punkt heifst dann äufserer Teilpunkt, und AB und BC sind die dabei entstehenden Teilstrecken. Eine der letzteren ist dann negativ zu nehmen, und zwar mufs, wenn AC positiv gewählt ist, die der Richtung AC entgegengesetzte Teilstrecke negativ genommen werden. — Aus der Gleichung

$$AB + BC = AC$$

folgen noch die weiteren:

$$AC - BC = AB; \quad AC - AB = BC;$$
$$AB + BC + CA = 0.$$

6. Kongruente Punktreihen. Man nennt zwei Punktreihen kongruent, wenn sie so aufeinander gelegt werden können, dafs je ein Punkt der einen Reihe mit einem der andern Reihe zusammenfällt. Die Punkte, Richtungen, Strecken, welche zur Deckung gelangen, heifsen einander entsprechend oder homolog.

Entsprechende Strecken kongruenter Punktreihen sind einander gleich. — Man erhält entsprechende Punkte, indem man von entsprechenden Punkten aus nach entsprechenden Richtungen gleiche Strecken abträgt.

Wenn zwei kongruente Punktreihen auf einer Geraden liegen, so sind folgende Fälle möglich:

a) Die Punktreihen sind gleichgerichtet. Wenn hierbei zwei entsprechende Punkte zusammenfallen, so ist das gleiche für alle Paare entsprechender Punkte der Fall.

Fig. 10.

Wenn die entsprechenden Punkte nicht zusammenfallen, so folgt aus $AB = A_1B_1$, dafs

$$AB + BA_1 = BA_1 + A_1B_1$$

oder $AA_1 = BB_1$, d. h.:

Fig. 11.

Liegen zwei kongruente Punktreihen gleichgerichtet auf einer Geraden, so sind die Strecken zwischen entsprechenden Punktpaaren einander gleich.

b) Die Punktreihen sind gegengerichtet. Wenn dann M die Mitte zwischen zwei entsprechenden Punkten A und A_1 ist, so ist $AM = MA_1$ und da auch $BA = A_1B_1$ ist, so folgt

$$BA + AM = MA_1 + A_1B_1$$

oder $BM = MB_1$, d. h.:

Fig. 12.

In zwei kongruenten gegengerichteten Punktreihen einer Geraden ist die Mitte zwischen zwei entsprechenden Punkten auch die Mitte aller übrigen entsprechenden Punktpaare. Dieser Mittelpunkt ist ein sich selbst entsprechender Punkt beider Punktreihen.

§. 7. Der Winkel zwischen zwei Geraden.

1. Ein zwischen zwei Halbstrahlen (OA und OB) eines Punktes (O) befindlicher (unvollständig begrenzter) Teil der Ebene heifst ein Winkel ($\sphericalangle AOB$), die beiden Halbstrahlen (OA und OB) heifsen seine Schenkel, deren Schnittpunkt (O) sein Scheitel. Der Winkel giebt die Neigung oder den Richtungsunterschied der beiden Halbstrahlen an. — Die Bezeichnung eines Winkels geschieht durch Angabe seines Scheitels $\sphericalangle O$, oder durch einen zwischen seine Schenkel gesetzten Buchstaben $\sphericalangle \alpha$, oder mit Hilfe der Zeichen für seine Schenkel, entweder $\sphericalangle (ab)$ oder $\sphericalangle AOB$, wobei in letzterem Fall das Zeichen des Scheitels in die Mitte zu stehen kommt.

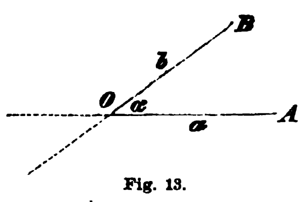


Fig. 13.

Die Ebene wird durch zwei Halbstrahlen OA und OB eines Punktes in zwei Teile geschieden; es entstehen hiernach zwei Winkel, welche einander zur Ebene ergänzen. Nur die zweite Bezeichnungsweise ($\sphericalangle \alpha$) läfst erkennen, welcher der beiden Winkel gemeint ist. Wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, soll künftig nur der Teil der Ebene, welcher die Gegenstrahlen der Schenkel OA

und OB nicht enthält, als der Winkel der beiden Halbstrahlen bezeichnet werden.

Ein Winkel kann aufgefafst werden als durch Drehung eines Halbstrahles entstanden; der letztere kann sich dabei um den Scheitel des Winkels in der Ebene seiner Schenkel entweder von einem Schenkel a zum andern b drehen, oder umgekehrt. Um diesen Gegensatz (§. 3, 4) auszudrücken, bezeichnet man den Winkel im ersten Fall durch $\sphericalangle\, ab$, im zweiten durch $\sphericalangle\, ba$, d. h. man führt den ersten Schenkel, d. i. die Lage des Halbstrahls, von welcher aus die Drehung beginnt, zuerst an. Der Drehungssinn läfst sich durch einen beigesetzten Bogen mit Pfeilspitze andeuten. Denkt man sich zwei Winkel einer Ebene in demselben Drehungssinn beschrieben (z. B. $\sphericalangle\, ab$ und $a_1 b_1$), so nennt man sie **gleichwendig**; werden sie im entgegengesetzten Drehungssinn beschrieben gedacht ($\sphericalangle\, ab$ und $a_2 b_2$), so heifsen sie **gegenwendig**.

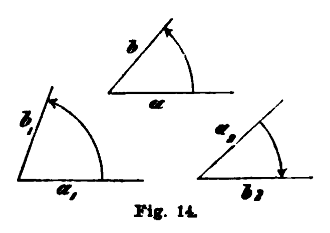


Fig. 14.

2. Gleichheit von Winkeln. Zwei Winkel heifsen gleich

$$\sphericalangle\, \alpha_1 = \alpha, \quad \sphericalangle\, a_1 b_1 = ab, \quad \sphericalangle\, A_1 O_1 B_1 = AOB,$$

wenn sie von demselben Punkte und Halbstrahl aus nach einerlei Seite des letzteren aufgetragen einander vollständig decken, indem auch ihre zweiten Schenkel zusammenfallen.

Fig. 15.

Zum Übertragen von Winkeln kann ein Papier in Form des Winkels geschnitten werden — oder es wird ein Blatt mit einem Halbstrahl auf den einen Schenkel gelegt und die Lage des andern Schenkels an einer zweiten Linie markiert. Beim **Winkelmesser** (Winkeltransporteur) ist letztere Linie (Kreis) so geteilt, dafs den einzelnen Teilen gleiche Winkel entsprechen.

3. Zusammensetzung, Summe von Winkeln. Zwei Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, ohne einander ganz oder teilweise zu decken, bilden zusammen einen weiteren Winkel, welchen man die **Summe** der ersteren nennt:

$$\sphericalangle\, AOB + BOC = AOC,$$
$$\sphericalangle\, ab + bc = ac.$$

Fig. 16.

Man erhält die Summe zweier Winkel, wenn man den einen unmittelbar neben den andern anträgt, so dafs sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben. Durch Antragen von weiteren Winkeln entsteht die Summe mehrerer Winkel.

4. Zerlegung, Differenz von Winkeln. Ein oder mehrere

Halbstrahlen durch den Scheitel und die Fläche eines Winkels zerlegen denselben in zwei oder mehr **Teilwinkel**, deren Summe gleich dem ursprünglichen Winkel ist. So ist $\sphericalangle AOC$ oder $\sphericalangle ac$ durch OB bzw. b in die zwei Teilwinkel $\sphericalangle AOB$ und BOC oder $\sphericalangle ab$ und bc zerlegt.

Ein Winkel heifst **kleiner** als ein anderer:

$$\sphericalangle AOB < AOC, \quad \sphericalangle ab < ac,$$

wenn ersterer einem Teil des letzteren gleich ist; der letztere heifst **gröfser** als der erstere:

$$\sphericalangle AOC > AOB, \quad \sphericalangle ac > ab.$$

Man erhält die **Differenz** (den Unterschied) zweier Winkel, wenn man den kleineren in den gröfseren an demselben Scheitel so aufträgt, dafs ein Schenkel gemeinsam wird und der kleinere einen Teil des gröfseren bedeckt; der nicht bedeckte Teil ist die Differenz:

$$\sphericalangle AOC - BOC = AOB, \quad \sphericalangle ac - bc = ab.$$

Die Halbierung eines Winkels nach dem Augenmafs wird erleichtert durch vorheriges Abtragen gleicher Winkel von dem Schenkel des gegebenen aus einwärts.

5. **Arten der Winkel bezüglich ihrer Gröfse.** Wenn bei einem (oder bei der Summe mehrerer) Winkel der letzte Schenkel mit dem ersten zusammenfällt, so ist dies ein **voller Winkel**; derselbe umfafst die ganze Ebene:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon.$$

Fig. 17.

Wenn bei einem (oder der Summe mehrerer) Winkel der letzte Schenkel der Gegenstrahl des ersteren ist, so hat man einen **gestreckten Winkel**; derselbe umfafst eine Halbebene:

$$x + y + z.$$

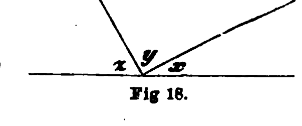


Fig 18.

Alle vollen Winkel sind einander gleich, ebenso alle gestreckten Winkel (da alle Geraden zur Deckung gebracht werden können).

Die Hälfte des vollen Winkels ist der gestreckte Winkel, die Hälfte eines gestreckten Winkels AOB heifst ein **rechter Winkel** ($\sphericalangle AOC = COB = R$); jeder Schenkel eines rechten Winkels heifst **normal** (winkelrecht, rechtwinkelig) zu dem andern. Dies wird bezeichnet durch

$$OC \perp OA, \quad OA \perp OC.$$

Fig. 19.

Alle rechten Winkel sind einander gleich als Hälften gleicher Winkel.

Ein gestreckter Winkel ist gleich der Summe von $2R$.

Ein voller Winkel ist gleich der Summe von $4R$.

Ein Winkel, welcher kleiner als $2R$, heifst hohl (konkav); einer, der gröfser als $2R$, heifst erhaben (konvex). Wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, soll von den zwei Winkeln zweier Halbstrahlen nur der hohle in Betracht gezogen werden (vgl. 1). — Ein Winkel, der kleiner als ein R ist, heifst ein spitzer, einer, der gröfser als ein R, ein stumpfer Winkel, beide im Gegensatz zum R schiefe Winkel. Ein Winkel, der einen andern zu einem R ergänzt, heifst dessen Complementwinkel.

Ein rechter Winkel wird erhalten, indem man z. B. ein Papier geradlinig schneidet oder falzt, dann zwei Punkte der Geraden zur Deckung bringt und das Papier am umgebogenen Teile falzt. Zum Antragen von rechten Winkeln oder von Normalen zu einer Geraden bedient man sich eines sog. Winkelscheites. Prüfung eines solchen.

6. Die Winkel zweier unbegrenzten Geraden. Durch zwei einander schneidende Gerade oder einen Zweistrahl werden mehrere Winkel gebildet.

a) Nebenwinkel nennt man zwei an einem Schenkel beiderseits angrenzende Winkel, deren beide andere Schenkel eine Gerade bilden, z. B.

$$\sphericalangle AOB \text{ und } BOC.$$

Fig. 20.

Da die Summe derselben einen gestreckten Winkel bildet, so gilt:

Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich $2R$.

Zusatz. α) Der Nebenwinkel eines R ist ein R — oder: Von zwei einander gleichen Nebenwinkeln ist jeder ein R.

β) Winkel mit gleichen Nebenwinkeln sind einander gleich.

γ) Ist die Summe von zwei (oder mehreren) Winkeln $2R$, so bilden die Schenkel der (geometrisch konstruierten) Winkelsumme eine Gerade.

δ) Sind α und β je die Hälften zweier Nebenwinkel, so ist $2\alpha + 2\beta = 2R$, also $\alpha + \beta = R$, d. h.:

Die Halbierenden zweier Nebenwinkel sind zu einander normal.

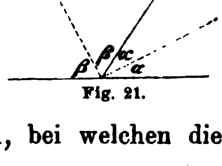


Fig. 21.

b) Scheitelwinkel nennt man zwei Winkel, bei welchen die Schenkel des einen die Gegenstrahlen der Schenkel des andern sind, z. B. $\sphericalangle pq$ und p_1q_1, ebenso qp_1 und q_1p.

Da solche zwei Winkel einen gemeinsamen Nebenwinkel haben, oder weil

$\sphericalangle pq = pp_1 - qp_1 = qq_1 - qp_1 = p_1q_1$, so gilt:

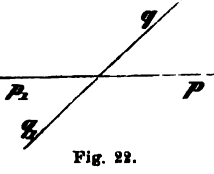


Fig. 22.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Zusatz. α) Wenn zwei gleiche Winkel auf den Gegenseiten einer Geraden liegen und zwei Gegenstrahlen derselben als Schenkel haben, so bilden die beiden anderen Schenkel ebenfalls die Gegenstrahlen einer Geraden. Denn wenn pp_1 eine Gerade und $\sphericalangle pq = p_1 q_1$, so ist

$$\sphericalangle pq + qp_1 = 2R = qp_1 + p_1 q_1 = qq_1,$$

also ist qq_1 eine Gerade.

β) Die Halbierenden zweier Scheitelwinkel bilden eine Gerade.

c) Gleiche Nebenwinkel und Scheitelwinkel ergeben sich bei zwei zu einander normalen Geraden. Aus der Gleichheit aller R folgt:

In einem Punkte einer Geraden giebt es zu dieser (in der Ebene) nur eine Normale.

Fig. 23.

d) Unter Winkel zweier Geraden kann man i. A. jeden der vier Winkel verstehen, welche die von ihrem Schnittpunkt ausgehenden Halbstrahlen mit einander bilden. Diese Winkel sind teils einander gleich, teils ergänzen sie einander zu $2R$. Dagegen ist der Winkel zweier Richtungen bestimmt; es ist nämlich hiermit der Winkel derjenigen Halbstrahlen gemeint, welche im Schnittpunkt der Geraden einseitig begrenzt, von diesem Schnittpunkt aus nach den angegebenen Richtungen dagegen unbegrenzt sind. So ist z. B. der Winkel der beiden durch Pfeile angedeuteten Richtungen $\sphericalangle AOB$.

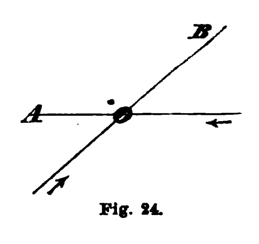
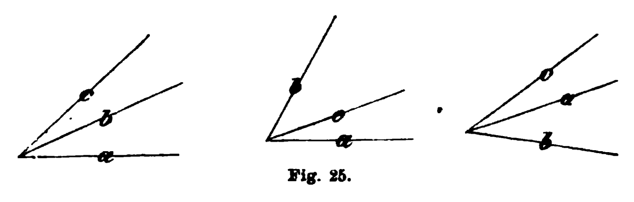


Fig. 24.

7. Positive und negative Winkel. Wird die Drehung einer Geraden nach der einen Seite der durch sie geteilten Ebene als positiv bezeichnet, so ist die nach der Gegenseite negativ zu nehmen, und ebenso die in dem bezüglichen Drehungssinn beschriebenen Winkel; d. h.:

$$+ ab = - ba \quad \text{oder} \quad \sphericalangle ab + ba = 0.$$

Hiernach gilt für die Winkel irgend dreier Halbstrahlen a, b, c eines Punktes:


Fig. 25.

$$\sphericalangle ab + bc = ac,$$

wobei es einerlei ist, in welcher Reihenfolge die drei Halbstrahlen liegen; denn es bedeutet die linke Seite der Gleichung stets eine

Drehung von a bis b und von da bis c, so dafs man von a aus schliefslich nach c gekommen ist.

Den Begriff des Teilens eines Winkels durch eine Gerade überträgt man auch auf den Fall, da der durch den Scheitel gehende Halbstrahl b aufserhalb $\sphericalangle ac$ liegt; der Halbstrahl heifst dann äufserer Teilstrahl und ab und bc sind die dabei entstehenden Teilwinkel. Einer der letzteren ist dann als negativ zu nehmen, und zwar mufs, wenn $\sphericalangle ac$ positiv gewählt ist, der Teilwinkel negativ genommen werden, welcher gegenwendig zur Drehung von ac ist.

Aus der Gleichung $\sphericalangle ab + bc = ac$ folgen noch die weiteren:

$$\sphericalangle ac - bc = ab, \quad \sphericalangle ac - ab = bc, \quad \sphericalangle ab + bc + ca = 0.$$

Anmerkung. Stellt man die Bedingung, dafs alle vorkommenden Winkel als gleichwendige aufzufassen sind, so dafs also auch konvexe Winkel in Betracht kommen können, so sind die vorstehenden Gleichungen nicht unbedingt richtig, indem die linke und rechte Seite sich noch um volle Umdrehungen oder Vollwinkel unterscheiden können; solche volle Umdrehungen ändern aber den Richtungsunterschied der beiden Halbstrahlen nicht.

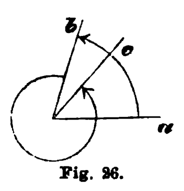


Fig. 26.

8. Kongruente Strahlenbüschel. Man nennt zwei Strahlenbüschel kongruent, wenn sie so auf einander gelegt werden können, dafs je ein Strahl des einen Büschels mit einem des andern zusammenfällt. Die Strahlen, Winkel, Drehungsrichtungen, welche zur Deckung gelangen, heifsen einander entsprechend oder homolog.

Entsprechende Winkel kongruenter Strahlenbüschel sind einander gleich.

Man erhält entsprechende Strahlen, indem man von entsprechenden Halbstrahlen aus gleiche Winkel in entsprechendem Drehungssinn anträgt.

Wenn zwei kongruente Strahlenbüschel den Scheitelpunkt gemeinsam haben, so sind folgende Fälle möglich:

a) Die Strahlenbüschel sind gleichwendig. Wenn ein entsprechendes Strahlenpaar zusammenfällt, so gilt das gleiche für alle Paare.

Wenn die entsprechenden Strahlen nicht zusammenfallen, so folgt aus

$$\sphericalangle ab = a_1 b_1$$

dafs

$$\sphericalangle ab + ba_1 = ba_1 + a_1 b_1$$

oder

$$\sphericalangle aa_1 = bb_1,$$

d. h.:

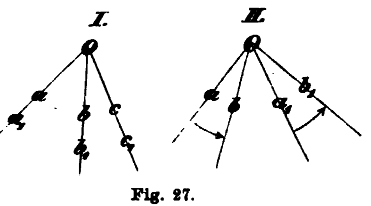


Fig. 27.

Liegen zwei kongruente Strahlenbüschel gleichwendig an einem

Scheitel, so sind die Winkel zwischen entsprechenden Strahlenpaaren einander gleich.

b) Die Strahlenbüschel liegen gegenwendig. Alsdann ist für die Winkelhalbierende m zweier entsprechenden Strahlen

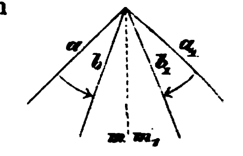


Fig. 28.

a und a_1: $\sphericalangle\, am = ma_1$

und da auch $\sphericalangle\, ba = a_1 b_1$ ist, so ist:

$$\sphericalangle\, ba + am = ma_1 + a_1 b_1 \text{ oder } bm = mb_1$$

d. h.:

In zwei kongruenten gegenwendigen Strahlenbüscheln desselben Scheitels ist die Winkelhalbierende zu zwei entsprechenden Strahlen auch Winkelhalbierende aller andern entsprechenden Strahlenpaare; sie ist ein sich selbst entsprechender Strahl.

9. Eine Vergleichung der Sätze der §§. 6 und 7 ergiebt, dafs sie einander gröfstenteils entsprechen, indem nur die Begriffe Punkt und Gerade vertauscht sind. Es entsprechen einander nämlich:

Punkt,	Gerade;
Punkt auf einer Geraden,	Gerade durch einen Punkt;
Verbindungsgerade zweier Punkte,	Schnittpunkt zweier Geraden;
Strecke zweier Punkte,	Winkel zweier Geraden.

Der folgende Abschnitt behandelt die Kongruenz von Strecken oder Winkeln, Punktreihen oder Strahlenbüscheln bei nicht gemeinschaftlichem Träger derselben und zeigt, durch welche Bewegung sie zur Deckung gebracht werden können.

II. Abschnitt.

Vergleichung von Strecken und von Winkeln durch Veränderung ihrer Lage.

§. 8. Einleitung: Arten der Lageveränderung.

1. Figuren, welche zur Deckung gebracht werden können, heifsen kongruent, wofür das Zeichen ≌; Punkte, Strecken, Gerade, Winkel, welche dabei zur Deckung kommen, heifsen einander entsprechend oder homolog. Zwei kongruente Gebilde heifsen gleichwendig, wenn die entsprechenden Winkel in gleichem Drehungssinn von den entsprechenden Geraden beschrieben werden (I und II), gegenwendig bei entgegengesetztem Drehungssinn (I und III).

Fig. 29.

2. Die einfachsten Bewegungen, durch welche man Figuren zur Deckung bringen kann, sind die folgenden:

a) das Umwenden der Ebene um eine in ihr liegende Gerade als Axe (§ 4, 3);

b) das Drehen der Ebene innerhalb der Ebene um einen Punkt, Drehpunkt oder Centrum, wobei jede durch letzteres gehende Gerade in der Ebene einen Winkel beschreibt (§ 4, 2).

Hierbei ist besonders die halbe Umdrehung hervorzuheben, bei welcher die durch den Drehpunkt gehenden Gegenstrahlen ihre Lage vertauschen;

c) das Verschieben der Ebene längs einer in ihr liegenden Geraden, Leitlinie, d. i. eine Bewegung, bei welcher die Punkte dieser Geraden stets in derselben Geraden bleiben, während die übrigen Punkte der Ebene nicht aus der ursprünglichen Ebene heraustreten.

Drittes Kapitel.

Die Umwendung. Symmetrische Lage.

§. 9. Erklärung der symmetrischen Lage.

Zwei ebene Figuren, welche durch eine Umwendung der sie enthaltenden Ebene um eine in ihr liegende Gerade gegenseitig ihre Lage vertauschen — oder auch zur Deckung gelangen, wenn nur

eine der beiden Figuren umgewendet wird — nennt man in der ursprünglichen Lage mit einander symmetrisch $\wedge$ zu der Geraden als Symmetrie-Axe. Beide Figuren bilden zusammen eine axige Figur.

Man erhält eine solche Figur durch beliebiges Ausschneiden eines zusammengelegten Blattes, eines Doppelblattes Papier; die Falte ist hierbei die Symmetrieaxe.

§. 10.

Das symmetrische Punktpaar. **Das symmetrische Geradenpaar.**

1. Da (wie schon in §. 4, 3 angegeben wurde) beim wiederholten Umwenden um eine Axe immer nur dieselben Teile der Ebene einander decken, so folgt:

Mit einem Punkt giebt es zu einer Axe nur einen symmetrischen Punkt.

Mit einer Geraden giebt es zu einer Axe nur eine symmetrische Gerade.

2. Da beim Umwenden nur die Punkte der Axe, Axenpunkte, an ihrer Stelle bleiben, so folgt:

Jeder Punkt der Axe entspricht sich selbst symmetrisch.

Kein Punkt aufserhalb der Axe kann sich selbst entsprechen.

2'. Da beim Umwenden einer zur Axe normalen Geraden, Axennormalen, die rechten Winkel einander decken, so folgt:

Die Gegenstrahlen jeder Axennormalen sind symmetrisch.

Von einer zur Axe nicht normalen Geraden können nicht Gegenstrahlen einander entsprechen.

3. Von den Strahlen eines Axenpunktes werden stets solche zwei, welche mit der Axe gegenwendig gleiche Winkel bilden, beim Umwenden einander decken, d. h.:

Zwei Strahlen eines Axenpunktes, welche mit einer Axenrichtung gegenwendig gleiche Winkel bilden, sind symmetrisch —

3'. Von den Punkten einer Axennormalen werden stets solche zwei, welche von dem Schnitt der Axe gleichweit entfernt sind, beim Umwenden einander decken, d. h.:

Zwei Punkte einer Axennormale, welche mit deren Axenpunkt gegengerichtet gleiche Strecken begrenzen, sind symmetrisch —

oder in anderer Fassung:

Zu den Schenkeln eines Winkels ist die ihn halbierende Gerade, die Winkelhalbierende, Symmetrieaxe.

Zu den Grenzpunkten einer Strecke ist die sie halbierende Normale, die Mittelnormale, Symmetrieaxe.

Denn beim Umwenden um diese Winkelhalbierende, bzw. Mittelnormale, kommen die übrigen Teile der Figur zur Deckung.

4. Umgekehrt (vgl. S. 20, d) folgt:

Der Schnittpunkt zweier symmetrischen Geraden ist Axenpunkt und

Die Verbindungsgerade zweier symmetrischen Punkte ist Axennormale

die Axe selbst ist Winkelhalbierende der beiden Geraden.

Wenn also $a \wedge a_1$ in Bezug auf m als Axe, so schneiden ein-

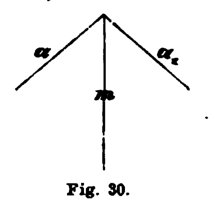


Fig. 30.

ander a und a_1 auf m und es ist $\sphericalangle am = ma_1$.

Denn man erhält (nach 3) die symmetrisch entsprechende Gerade zu a, indem man den Winkel am an dem Schnitt von a mit der Axe andererseits anträgt; es giebt aber zu einer Geraden nur eine symmetrische Gerade; daher mufs die so erhaltene Gerade mit a_1 zusammenfallen, d. h. es mufs

$$\sphericalangle am = ma_1$$

sein und es müssen a, m und a_1 in einem Punkte einander schneiden.

5. Da es zu einem Winkel nur eine Halbierende giebt, so folgt aus 4:

Zwei Halbstrahlen eines Punktes können nur zu einer einzigen Axe symmetrisch sein.

und die Axe selbst ist Mittelnormale der Verbindungsstrecke.

Wenn also Punkt $A \wedge A_1$ in Bezug auf MN als Axe, so ist

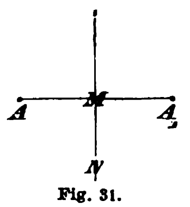


Fig. 31.

$MN \perp AA_1$ und $AM = MA_1$.

Denn man erhält (nach 3′) den symmetrisch entsprechenden Punkt zu A, indem man zur Axe MN eine Normale durch A zieht und auf dieser die Strecke von A bis zum Schnitt mit der Axe andererseits anträgt; es giebt aber zu einem Punkte nur einen symmetrischen Punkt; daher mufs der so erhaltene Punkt mit A_1 zusammenfallen, d. h. es mufs $AA_1 \perp MN$ und $AM = MA_1$ sein.

5′. Da es zu einer Strecke nur eine Mitte und in dieser nur eine Normale (§. 7, 6c) giebt, so folgt:

Zwei Punkte können nur zu einer einzigen Axe symmetrisch sein.

Da zwei unbegrenzte Gerade zwei Winkelhalbierende haben (§. 7, 6), so giebt es auch zwei Symmetrieaxen, für welche einem Halbstrahl der einen Geraden ein solcher der andern entspricht.

Bemerkung über die Darstellungsart der Geometrie. a) Die Geometrie bestimmt ihren Stoff durch Erklärungen (Definitionen), in welchen von dem Gegenstand der Erklärung soviel ausgesagt wird, als zu seiner Bestimmung ausreichend ist. Dazu gehören die Angabe des nächst höheren Begriffs, dem der Gegenstand untergeordnet ist, und die unterscheidenden Merkmale gegenüber den unter denselben höheren Begriff fallenden beigeordneten Gegenständen.

Beispiel: Die Mittelnormale einer Strecke ist die Normale, welche in der Mitte der Strecke auf dieser errichtet ist.

b) Unter den Sätzen der Geometrie unterscheidet man den sogenannten Grundsatz (Axiom), eine Behauptung, welche als allgemein

gültig angenommen wird (§. 3, 1 und 4, §. 4, 1) und den Lehrsatz (Theorem), dessen Gültigkeit durch Zurückführung auf einen Grundsatz oder einen zuvor bewiesenen Lehrsatz bewiesen wird.

Der Lehrsatz besteht α) aus der Annahme oder Voraussetzung (hypothesis), welche den Gegenstand des Lehrsatzes bestimmt und die Bedingungen angiebt, welche erfüllt sein müssen, damit die Aussage richtig sei; β) aus der Behauptung (thesis), welche eine weitere Aussage an die gegebenen Bedingungen knüpft.

Beispiel: Vom Lehrsatz in 3′ heifst α) die Annahme: Auf einer Geraden als Axe ist eine Normale errichtet und von der Axe aus sind auf der Normalen gleiche Strecken gegengerichtet aufgetragen: 1) $AMA_1 \perp MN$, 2) $AM = MA_1$; β) die Behauptung: die Grenzpunkte dieser Strecken sind symmetrisch zur Axe: $A \wedge A_1$ zu MN.

c) Der Beweis des Lehrsatzes geht von der Voraussetzung aus und zeigt, dafs zugleich mit den gegebenen Bedingungen auch die Bedingungen anderer vorher als richtig erkannter Sätze erfüllt sind, so dafs sich die fragliche Behauptung als eine Aussage eines solchen vorher gegangenen Satzes ergiebt.

Beispiel: Beweis zu obigem Lehrsatz. Aus der Annahme, dafs $AMA_1 \perp MN$ folgt, dafs $\sphericalangle AMN = NMA_1$, da alle rechten Winkel einander gleich sind (§ 7, 5); wenn man diese mit dem Scheitel M und dem Schenkel MN auf einerlei Seite desselben auf einander legt, so decken einander auch die zweiten Schenkel MA und MA_1, da (nach §. 7, 2) gleiche Winkel auf diese Weise zur Deckung kommen. Aus der Annahme, dafs $AM = MA_1$ ist, folgt dann, dafs auch A und A_1 zur Deckung gelangen, da (nach §. 6) gleiche Strecken so zur Deckung kommen. Die angegebene Art des Aufeinanderlegens beider Winkel ist ein Umwenden des einen um die Axe MN; daher ist der Erklärung des §. 9 entsprechend $A \wedge A_1$.

d) Die Umkehrung eines Lehrsatzes besteht darin, dafs in einem neuen Lehrsatze die ursprüngliche Annahme und Behauptung ihre Rollen vertauscht haben oder auch nur entsprechende Teile von Annahme und Behauptung.

Beispiel: Der Satz 4′ ist eine Umkehrung von 3′: α) Annahme: Zwei Punkte sind symmetrisch in Bezug auf eine Axe: $A \wedge A_1$ zu MN; β) Behauptung: die Axe ist Mittelnormale dieser Punkte: 1) $MN \perp AA_1$, 2) $AM = MA_1$.

e) Die Umkehrung eines Satzes wird meistens durch das indirecte Beweisverfahren erwiesen. Es werden alle überhaupt denkbaren, der Behauptung widersprechenden Aussagen aufgeführt und die Unmöglichkeit der letzteren dadurch gezeigt, dafs nachgewiesen wird, ihre Annahme widerspreche einem als richtig erkannten Satze, bezw. der Voraussetzung.

Beispiel: Indirekter Beweis zu 4′: Wäre nicht $MN \perp AA_1$ und $AM = MA_1$, so würde man durch eine Normale $AM_1 \perp MN$ und durch Auftragen einer Strecke $M_1A_2 = AM_1$ auf dieser Normalen einen Punkt A_2 erhalten, welcher (nach 3′) symmetrisch mit A wäre: $A_2 \wedge A$ zu MN; also gäbe es zu einem Punkte A in Bezug auf eine Axe MN

zwei symmetrische Punkte, A_1 (nach der Annahme) und A_2, was unmöglich ist (1.); also ist es auch nicht möglich, dafs nicht $MN \perp AA_1$ und $AM = MA_1$ ist.

f) Als Muster einer in dieser Weise streng durchgeführten Darstellung der Geometrie gilt auch jetzt noch ein Werk über die Elemente der Geometrie (στοιχεῖα) des alexandrinischen Mathematikers Euklides (300 v. Chr.).

§. 11. Die Verbindung des symmetrischen Punkt- und Geraden-Paares.

A.

Gerade durch ein Punktpaar.

1. Werden zwei symmetrische Punkte A und A_1 mit einem Axenpunkte B verbunden, so kommen beim Umwenden A und A_1

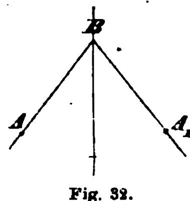


Fig. 32.

zur Deckung, B bleibt an seiner Stelle, also decken einander auch die Geraden und Strecken AB und A_1B_1, d. h.:

Die Verbindungsgeraden eines Axenpunktes mit zwei symmetrischen Punkten sind symmetrisch.

2. Werden von der Verbindungsstrecke b zweier symmetrischen Punkte A und A_1 aus zu deren Gegenrichtungen gegenwendig gleiche Winkel $ba = ba_1$ angetragen, so kommen

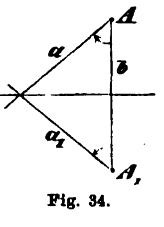


Fig. 34.

die letzteren beim Umwenden zur Deckung, so dafs wir folgern:

Zwei Gerade, welche durch symmetrische Punkte gehen und mit deren Verbindungsstrecke gegenwendig gleiche Winkel bilden, sind symmetrisch.

Punkte auf einem Geradenpaar.

1'. Werden zwei symmetrische Gerade a und a_1 von einer Axennormalen b durchschnitten, so kommen beim Umwenden a und

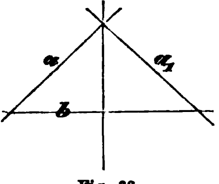


Fig. 33.

a_1 zur Deckung, b fällt in sich zurück, also decken einander auch die Punkte und Winkel ab und a_1b_1, d. h.:

Die Schnittpunkte einer Axennormalen mit zwei symmetrischen Geraden sind symmetrisch.

2'. Werden von dem Schnittpunkte B zweier symmetrischen Halbstrahlen a und a_1 aus gleiche Strecken $BA = BA_1$ abgetragen, so kommen die letzteren beim Umwenden zur

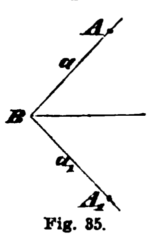


Fig. 35.

Deckung, so dafs wir folgern:

Zwei Punkte, welche auf zwei symmetrischen Halbstrahlen liegen und von deren Schnittpunkt gleiche Entfernungen haben, sind symmetrisch.

B.

Symmetrie der Normalen und Parallelen.

3. Unter den Lagen, welche eine Gerade gegen die Symmetrieaxe einnehmen kann, sind noch insbesondere die normale und die parallele hervorzuheben.

Wird von einem Punkte A auf die Axe eine Normale AB gezogen, so mufs auch die vom symmetrischen Punkte A_1 nach B gezogene A_1B einen rechten Winkel mit der Axe machen und somit mufs ABA_1 eine Gerade sein (§ 7, 6a Zus. γ), d. h.:

a) *Eine durch einen Punkt gezogene Normale zur Axe geht auch durch den symmetrischen Punkt.*

Hieraus folgt weiter, da durch die beiden symmetrischen Punkte nur eine Gerade möglich ist (vgl. §. 7, 6c):

b) *Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden nur eine Normale.*

In Bezug auf eine solche Normale fügen wir hier die Erklärung bei: Die Strecke der Normalen von dem Punkte bis zum Schnittpunkt mit der Geraden nennt man den Abstand oder die Entfernung des Punktes von der Geraden (vgl. §. 23, 10); der Schnittpunkt heifst Fufspunkt der Normalen. Wenn von einer solchen Normalen als einer begrenzten Geraden gesprochen wird, so ist damit dieser Abstand gemeint.

4. Da zwei Normale zu einer Geraden nicht durch einen Punkt gehen können, so folgt:

a) *Alle Normalen zu einer Geraden (in einer Ebene) sind parallel.*

Umgekehrt folgt:

b) *Wenn von zwei Parallelen eine normal zu einer Geraden ist, so ist es auch die andere.*

Wenn nämlich $a \parallel b$ und $a \perp c$, so ist die Normale zu c durch einen Punkt von b parallel zu a und fällt somit mit der zu a parallelen Geraden b zusammen (§ 3, 4, Parallelenaxiom).

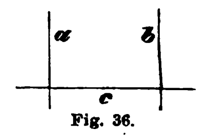


Fig. 36.

Da c auch normal zu a ist, so heifst dieser Satz auch in anderer Fassung:

c) *Jede Normale zu einer von zwei Parallelen ist auch normal zur andern.*

Zeichnung von Parallelen mittels Verschiebung des Winkelscheits am Lineal, wobei der R an letzterem anliegt.

5. Wird durch einen Punkt A die Parallele a zur Symmetrieaxe n gezogen, so kann auch die symmetrische Gerade durch den Punkt A_1 die Axe nicht schneiden, da andernfalls auch a durch diesen Schnittpunkt gehen müfste, d. h.:

a) *Mit einer Parallelen zur Axe ist eine ebensolche Parallele symmetrisch.*

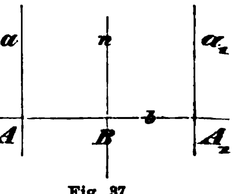


Fig. 37.

Umgekehrt, wenn die Gerade $a \wedge a_1$ in

Bezug auf n als Axe und $a \parallel a_1$, so ist auch $n \parallel a$ und $n \parallel a_1$. Denn würde n mit der Geraden a oder a_1 zusammentreffen, so müfste auch die andere von diesen beiden durch denselben Axenpunkt gehen, was der Annahme $a \parallel a_1$ widerspricht, also folgt:

b) *Wenn zwei symmetrische Gerade parallel sind, so ist auch die Axe parallel zu ihnen.*

Da die Schnittpunkte der symmetrischen Parallelen a und a_1 mit einer Axennormale b symmetrisch liegen, $A \wedge A_1$, so ist $AB = BA_1$, und da auch b normal zu den Parallelen a und a_1 ist, so folgt:

c) *Die Symmetrieaxe zu zwei Parallelen halbiert alle Normalen zu diesen;* — sie heifst die Mittelparallele zu den Parallelen.

Es giebt nur eine Mittelparallele zu zwei Parallelen, — da jede Normale zwischen diesen nur einen Mittelpunkt hat.

C.

Das axige Dreieck und Dreiseit.

6. Aus der Symmetrie der in A) betrachteten Figuren ergiebt sich nun die Gleichheit der symmetrisch entsprechenden Strecken und Winkel. Um die hieraus folgenden Sätze in möglichst kurze Form zu bringen, schicken wir folgende Erklärungen voraus:

Dreieck heifst eine Gruppe von drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen und durch drei Geraden verbunden sind.

Dreiseit heifst eine Gruppe von drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen und in drei Punkten einander schneiden.

Die Punkte heifsen Ecken, die Geraden Seiten des Dreiecks oder Dreiseits. Wenn von den Seiten als Gröfsen gesprochen wird, so ist je die Strecke zwischen zwei Ecken gemeint. Unter einem Winkel des Dreiecks oder Dreiseits versteht man den Winkel zweier solcher Strecken. Jeder Seite liegt ein Eck gegenüber, Gegeneck, ebenso ein Winkel, Gegenwinkel; jedem Winkel eine Seite, Gegenseite.

Sind in einem Dreieck die Verbindungsstrecken zweier Ecken mit einem dritten einander gleich, $AC = CB$, so heifst es gleichschenkelig.

Das dritte Eck heifst Spitze des Dreiecks, seine Gegenseite Grundseite oder Basis; die gleichen Seitenstrecken heifsen Schenkel.

Sind in einem Dreieck alle drei Seiten gleich, so heifst es gleichseitig.

Fig. 33.

Sind in einem Dreiseit die Winkel zweier Seiten mit einer dritten einander gleich, $\sphericalangle\, ac = cb$, so heifst es gleichgeneigt.

Die dritte Seite heifst Grundseite oder Basis des Dreiseits, sein Gegeneck Spitze desselben; die gleichen Winkel heifsen Basiswinkel.

Sind in einem Dreiseit alle Winkel gleich, so heifst es gleichwinkelig.

7. Aus 2 und 2′ folgt:

a) *Zwei symmetrische Punkte bilden mit einem Axenpunkte ein axiges Dreieck* —

a′) *Zwei symmetrische Gerade bilden mit einer Axennormalen ein axiges Dreiseit* —

d. h. die Figur fällt beim Umwenden um die Symmetrieaxe in sich selbst zurück (§. 9). Aus der gegenseitigen Deckung der Teile der Figur ergiebt sich, dafs sie sowohl gleichschenkelig, als gleichgeneigt ist. Aus §. 11, 2′ und 2 folgt aber auch umgekehrt:

b) *Im gleichschenkeligen Dreieck ist die Halbierende des Winkels an der Spitze Symmetrieaxe.*

b′) *Im gleichgeneigten Dreiseit ist die Mittelnormale der Grundseite Symmetrieaxe.*

8. Aus der Übereinstimmung symmetrisch liegender Winkel und Strecken ergiebt sich:

Im gleichschenkeligen Dreieck sind die Gegenwinkel der Schenkel einander gleich —

Im gleichgeneigten Dreiseit sind die Gegenseiten der Basiswinkel einander gleich —

oder:

In einem Dreieck sind die Gegenwinkel gleicher Seiten einander gleich.

In einem Dreiseit sind die Gegenseiten gleicher Winkel einander gleich.

Das gleichschenkelige Dreieck und das gleichgeneigte Dreiseit sind identische Figuren. — Im Besonderen gilt:

Ein gleichseitiges Dreieck ist auch ein gleichwinkeliges und umgekehrt.

9. In gleicher Weise ergiebt sich die Richtigkeit folgender Sätze:

In jedem gleichschenkeligen Dreieck (oder gleichgeneigten Dreiseit):

a) *ist die Halbierende des Winkels an der Spitze zugleich Mittelnormale der Grundseite* — als Axe zu den Grenzpunkten der Grundseite (2′.);

a′) *ist die Mittelnormale der Grundseite auch Winkelhalbierende an der Spitze* — als Axe zu den Schenkeln (2.);

b) *halbiert die Normale von der Spitze zur Grundseite diese und den Winkel an der Spitze;*

b′) *ist die Verbindungsgerade von Spitze und Mitte der Grundseite normal zu letzterer und halbiert den Winkel an der Spitze;*

denn die Mittelnormale der Grundseite geht durch die Spitze (a′), fällt also zusammen mit jener Normalen (3, b) bezw. Verbindungsgeraden.

§. 12. Zwei und mehr symmetrische Punkt- und Geradenpaare.

A.

Punktpaare und Punktreihen.

1. Nimmt man zwei Paare symmetrischer Punkte $A \wedge A_1$ und

Geradenpaare und Strahlenbüschel.

1′. Nimmt man zwei Paare symmetrischer Geraden $a \wedge a_1$ und

$B \wedge B_1$, so werden die durch sie bestimmten Verbindungsgeraden nach dem Umwenden einander decken, weil je zwei ihrer Punkte zur Deckung gelangen; d. h.:

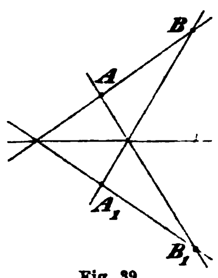


Fig. 39.

Die Verbindungsgeraden zweier Punkte und der mit ihnen symmetrischen Punkte sind symmetrisch.

$AB \wedge A_1B_1$, $AB_1 \wedge A_1B$.

$b \wedge b_1$, so werden die durch sie bestimmten Schnittpunkte nach dem Umwenden einander decken, weil je zwei durch sie gehende Geraden zur Deckung gelangen; d. h.:

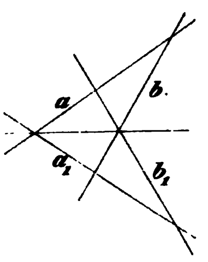


Fig 40.

Die Schnittpunkte zweier Geraden und der mit ihnen symmetrischen Geraden sind symmetrisch.

Punkt $ab \wedge a_1b_1$, $ab_1 \wedge a_1b$.

2. Aus der Deckung nach dem Umwenden folgt weiter:

Die Verbindungsstrecke zweier Punkte ist gleich der ihrer symmetrischen Punkte.

Der Winkel zweier Halbstrahlen ist gleich dem ihrer symmetrischen Halbstrahlen.

3. Umgekehrt: Wenn $A \wedge A_1$, Richtung $AB \wedge A_1B_1$ und

$$AB = A_1B_1,$$

so decken diese Strecken einander beim Umwenden, d. h.:

Trägt man von zwei symmetrischen Punkten aus auf zwei eben solchen Halbstrahlen gleiche Strecken ab, so sind die Grenzpunkte dieser Strecken ebenfalls symmetrisch.

3′. Umgekehrt: Wenn $a \wedge a_1$, Punkt $ab \wedge a_1b_1$ und

$$\sphericalangle ab = b_1a_1,$$

so decken diese Winkel einander beim Umwenden, d. h.:

Trägt man an zwei symmetrischen Halbstrahlen in ihren Grenzpunkten gegenwendig gleiche Winkel an, so sind die Schenkel dieser Winkel ebenfalls symmetrisch.

4. Wenn zwei symmetrische Gerade von einer Reihe von Axennormalen durchschnitten werden, so entstehen zwei kongruente, symmetrische Punktreihen, deren Schnittpunkt sich selbst entspricht. — Umgekehrt folgt aus 3:

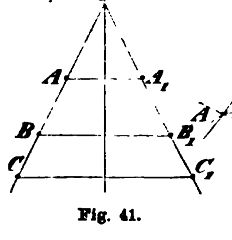


Fig. 41.

Fig. 42.

4′. Wenn zwei symmetrische Punkte mit einer Reihe von Axenpunkten verbunden werden, so entstehen zwei kongruente, symmetrische Strahlenbüschel, deren Scheitelstrahl sich selbst entspricht. — Umgekehrt folgt aus 3′:

Zwei kongruente Punktreihen, in welchen der Schnittpunkt ihrer Träger sich selbst entspricht, sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden der Träger als Axe.

Zwei kongruente gegenwendige Strahlenbüschel, in welchen die Verbindungsgerade der Scheitel sich selbst entspricht, sind symmetrisch zur Mittelnormalen der Scheitel als Axe.

5. Da zwei symmetrische Figuren nach dem Umwenden um die Axe einander decken, so ergiebt sich:

Drei Punkte und die ihnen symmetrisch entsprechenden Punkte bestimmen ein Paar gegenwendig kongruenter Dreiecke.

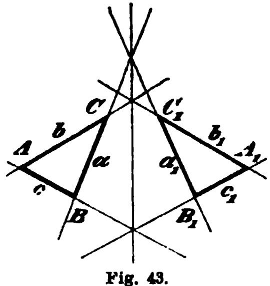


Fig. 43.

Drei Gerade und die ihnen symmetrisch entsprechenden Geraden bestimmen ein Paar gegenwendig kongruenter Dreiseite.

Allgemeiner:

Zwei zu einer Axe symmetrische Figuren sind gegenwendig kongruent.

B.

Die Symmetrieaxe als geometrischer Ort.

6. Verbindet man zwei symmetrische Punkte $A \wedge A_1$ mit Axenpunkten B, C, so entstehen Paare symmetrischer Strecken, woraus folgt:

a) *Jeder Punkt der Mittelnormalen zweier Punkte ist von beiden gleichweit entfernt.*

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

b) *Jeder von zwei Punkten gleichweit entfernte Punkt liegt auf der Mittelnormalen derselben.*

Denn wenn $AB = A_1B$, so ist $A \wedge A_1$ in Bezug auf die Winkelhalbierende zu ABA_1 (nach §. 11, 2'); die Symmetrieaxe zu $A \wedge A_1$ ist aber zugleich Mittelnormale zu AA_1; also geht diese durch B.

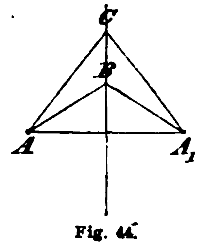


Fig. 44.

c) Wenn ferner die Entfernungen eines Punktes A von zwei gegebenen Punkten B und C einzeln übereinstimmen mit denen eines weiteren Punktes A_1 von letzteren, so sind A und A_1 symmetrisch zur Verbindungsgeraden BC als Axe. Daraus folgt:

Einerseits einer Geraden giebt es nur einen Punkt, welcher von zwei Punkten der Geraden bestimmte Entfernungen hat.

d) Wenn die Entfernungen zweier Punkte A und A_1 von einem dritten Punkte B übereinstimmen, $BA = BA_1$, so sind jene symmetrisch zu der durch B gehenden Normalen ihrer Verbindungsgeraden AA_1. Daher ergiebt sich:

Einerseits der Normalen von einem Punkte zu einer Geraden giebt es auf dieser nur einen Punkt mit bestimmter Entfernung von ersterem Punkte.

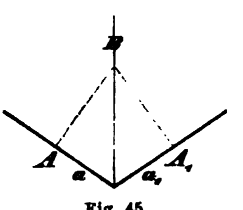


Fig. 45.

7. Fällt man von einem Axenpunkte B Normale nach zwei symmetrischen Geraden $a \wedge a_1$, also $BA \perp a$, $BA_1 \perp a_1$, so sind diese Normalen symmetrische Strecken, da der Normalen BA eine Normale auf a_1 entspricht, die durch B geht, d. i. BA_1 (nach §. 12, 3'); daher ist $AB = A_1B_1$, d. h.:

a) *Jeder Punkt der Winkelhalbierenden zweier Geraden ist von beiden gleichweit entfernt.*

Umgekehrt gilt:

b) *Jeder Punkt, welcher von zwei Geraden gleichweit entfernt ist, liegt auf der Winkelhalbierenden.*

Denn wenn $AB = A_1B$, $BA \perp a$, $BA_1 \perp a_1$, so ist in Bezug auf die Winkelhalbierende zu ABA_1 $BA \wedge BA_1$ und (3') $a \wedge a_1$; daher halbiert die Axe auch den Winkel aa_1 und B liegt somit auf der Halbierenden des letzteren.

8. Sind die symmetrischen Geraden a und a_1 parallel, so werden ihre Normalen durch die Axe halbiert (§. 11, 5 c), m. a. W.:

a) *Jeder Punkt der Mittelparallelen zweier Parallelen ist von beiden gleichweit entfernt.*

Die Umkehrung dieses Satzes läſst sich leicht erweisen:

b) *Jeder von zwei Parallelen gleichweit entfernte Punkt liegt auf der Mittelparallelen derselben,*

d. h. auf einer Geraden, welche durch die Mitte einer Normalen zwischen beiden Parallelen parallel zu diesen gezogen ist.

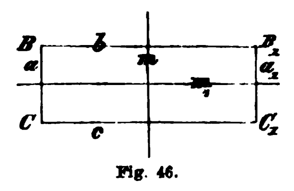


Fig. 46.

c) Da auch die zu den Parallelen $BC \parallel B_1C_1$ normalen Strecken BB_1 und CC_1 parallel sind, so sind letztere auch symmetrisch zu ihrer Mittelparallelen m_1, zu welcher BC und B_1C_1 Axennormalen sind. Da die symmetrischen Strecken BB_1 und CC_1 zur Deckung gebracht werden können, so folgt:

Alle normalen Strecken zwischen Parallelen sind einander gleich.

Man nennt jede dieser Strecken den Abstand der Parallelen.

d) Eine Umkehrung dieses Satzes lautet:

Punkte, welche von einer Geraden einerseits derselben gleiche Abstände haben, liegen in einer Parallelen zu der Geraden.

Denn wenn B_1B und C_1C normal zu BC und $B_1B = C_1C$, so sind diese Strecken parallel und symmetrisch in Bezug auf ihre Mittelparallele m_1, $B_1 \wedge C_1$, woraus folgt, daſs B_1C_1 wie BC normal zu m_1, d. h. $B_1C_1 \parallel BC$ (§. 11, 4 a).

Viertes Kapitel.

Die halbe Umdrehung. Diametrale Lage.

§. 13. Erklärung der diametralen Lage.

Zwei ebene Figuren, welche nach einer halben Umdrehung ihrer Ebene um einen in ihr liegenden Punkt gegenseitig ihre Lage vertauschen — oder auch zur Deckung gelangen, wenn nur eine der beiden Figuren eine halbe Umdrehung macht — nennt man in ihrer ursprünglichen Lage diametral |/| zu dem Punkt als Centrum der Drehung. Beide Figuren bilden zusammen eine centrische Figur.

§. 14.

1. Da die halbe Umdrehung um einen Punkt eine eindeutig bestimmte Lage ergiebt (§. 3, 4), so folgt:

Das diametrale Punktpaar.

Mit einem Punkt giebt es zu einem Centrum nur einen diametralen Punkt.

2. Da beim Umdrehen das Centrum allein an seiner Stelle bleibt, so gilt:

Das Centrum entspricht sich selbst diametral.

Kein Punkt aufser dem Centrum kann sich selbst diametral entsprechen.

3. Von den Punkten einer Centralen werden stets zwei vom Centrum gleichweit entfernte A und A_1 bei halber Umdrehung einander decken.

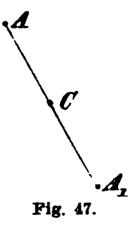


Fig. 47.

Zwei Punkte, welche mit dem Centrum gegengerichtet gleiche Strecken begrenzen, sind diametral — oder:

Zu zwei Punkten ist der Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke Centrum.

Das diametrale Geradenpaar.

Mit einer Geraden giebt es zu einem Centrum nur eine diametrale Gerade.

2'. Da nach halber Umdrehung von jeder durch das Centrum gehenden Geraden, Centralen, die Gegenstrahlen einander decken, so folgt:

Die Gegenstrahlen einer Centralen sind diametral.

Von keiner Geraden liegen Gegenstrahlen diametral aufser denen, die im Centrum einseitig begrenzt sind.

3'. Von den Normalen einer Centralen werden stets zwei vom Centrum gleichweit entfernte Halbstrahlen a und a_1 auf den Gegenseiten der Normalen bei halber Umdrehung einander decken.

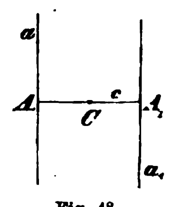


Fig. 48.

Zwei Normalen einer Centralen, welche vom Centrum gleiche Abstände haben, sind diametral — oder:

Zu zwei Parallelen liegt das Centrum auf der Mittelparallelen.

Wenn man um die Mittelparallele zu a und a_1 als Axe die Ebene umwendet, so kommen die Geraden a und a_1 zur Deckung. Damit nun aber die diametral gelegenen Halbstrahlen dieser Geraden zur Deckung gelangen, mufs noch eine zweite Umwendung um die zu a und a_1 normale Centrale c ausgeführt werden. Die durch halbe Umdrehung erreichte zweite Lage der Ebene läfst sich sonach dadurch erzielen, dafs man nach einander um zwei zu einander normale Centralen als Axen umwendet. Eine von zwei symmetrisch liegenden Figuren kommt daher in diametrale Lage mit der andern durch Umwenden um eine Axennormale.

4. Umgekehrt: Wenn $A \,|/|\, A_1$ in Bezug auf C als Centrum, so ist ACA_1 eine Gerade und $AC = CA_1$. Denn man erhält (nach 3) einen mit A diametral liegenden Punkt, indem man auf der Verlängerung von AC diese Strecke abträgt. Es giebt aber zu einem Punkte A nur einen diametral liegenden; daher mufs der Punkt A_1 den genannten Forderungen entsprechen:
Die Verbindungsstrecke zweier diametralen Punkte geht durch das Centrum und wird durch dasselbe halbiert.

4'. Umgekehrt: Wenn $a \,|/|\, a_1$ in Bezug auf C als Centrum, so ist $a \parallel a_1$ und für die normale Centrale $AC = CA_1$. Denn man erhält (nach 3') eine mit a diametrale Gerade, indem man zur Normalen $CA \perp a$ im gleichen Abstand andrerseits vom Centrum eine Normale zieht. Es giebt aber zu einer Geraden a nur eine diametrale; diese mufs also den genannten Forderungen entsprechen:
Zwei diametrale Gerade sind parallel, und das Centrum liegt auf der Mittelparallelen.

5. Da es zu einer Strecke nur einen Mittelpunkt giebt, so folgt aus 4:
Zwei Punkte können nur zu einem einzigen Punkt als Centrum diametral sein.

5'. Da jeder Punkt der Mittelparallelen den Forderungen in 4' entspricht, so folgt:
Zwei Parallele können in Bezug auf jeden Punkt ihrer Mittelparallelen diametral sein.

Dagegen können zwei einander schneidende Gerade nicht diametral sein. Ebenso wenig kann ein Punkt aufserhalb der Mittelparallelen zu zwei Parallelen Centrum sein.

§. 15. Die Verbindung des diametralen Punkt- und Geradenpaares.

A.

Gerade durch ein Punktpaar.

1. Werden durch zwei diametrale Punkte $A \,|/|\, A_1$ zwei Parallele gezogen, so müssen diese diametral sein, da diametrale Gerade durch ebensolche Punkte gehen und parallel sein müssen.

Punkte auf einem Geradenpaar.

1'. Werden diametrale Gerade $a \,|/|\, a_1$ durch eine Centrale C geschnitten, so müssen die Schnittpunkte A und A_1 diametral sein, da beim Umdrehen sowohl die Geraden a und a_1 als die Halbstrahlen von C zur Deckung kommen.

Fig. 49.

Irgend zwei Parallele durch zwei diametrale Punkte sind diametral.

Die Schnittpunkte einer Centralen mit zwei diametralen Geraden sind diametral.

Der Satz 1′ führt noch zu einem andern Beweis für §. 14, 4′: Sollten zwei diametrale Gerade einander schneiden, so müſsten sie einander auch in dem zum Schnittpunkt diametralen Punkte treffen, also in zwei Punkten, was unmöglich ist.

2. Werden in zwei diametralen Punkten $A \nparallel A_1$ an deren Centralen auf verschiedenen Seiten mit den Gegenrichtungen derselben gleichwendig gleiche Winkel angetragen, $\sphericalangle ca = ca_1$, so kommen deren Schenkel bei halber Umdrehung zur Deckung, so daſs wir folgern:

Zwei Gerade durch zwei diametrale Punkte, welche mit den Gegenrichtungen der Centralen der letzteren beiderseits gleichwendig gleiche Winkel bilden, sind selbst diametral.

2′. Werden nach zwei diametralen Geraden $a \nparallel a_1$ vom Centrum aus auf verschiedenen Seiten der normalen Centralen gleiche Strecken abgetragen, $CA = CA_1$, so sind diese diametral, da der mit A diametrale Punkt auf a_1 liegen und die gleiche Entfernung wie A vom Centrum haben muſs und es (nach §. 12, 6d) nur einen solchen Punkt giebt. Somit:

Zwei Punkte zweier diametralen Geraden, welche beiderseits der normalen Centralen liegen und vom Centrum gleiche Abstände haben, sind selbst diametral.

B.

Winkel zwischen zwei Parallelen und einer Transversalen.

3. Zwei parallele Gerade mit irgend einer sie schneidenden Geraden, Transversalen, bilden eine centrische Figur zur Mitte der Strecke zwischen beiden Parallelen. Um die für die Winkel zwischen Parallelen und Transversalen sich hieraus ergebenden Sätze in die kürzeste Form zu bringen, schicken wir einige Erklärungen voraus. Werden zwei Gerade von einer dritten, der Transversalen, geschnitten, so entstehen an jedem der beiden Schnittpunkte vier Winkel. Um die Lage eines Winkels an einem Schnittpunkte gegen die eines Winkels an dem andern Schnittpunkte auszudrücken, hat man folgende Benennungen eingeführt:

Zwei Gegenwinkel sind die Winkel der beiden Halbstrahlen auf einerlei Seite der Transversalen mit einerlei Richtung der letzteren, z. B. α und α_1, γ und γ_1. — Zwei Wechselwinkel sind die Winkel der beiden Halbstrahlen auf den Gegenseiten der Transversalen mit den Gegenrichtungen derselben, z. B. α und δ_1,

Fig. 50.

γ und β_1. — Von der Transversalen aus gemessen sind zwei Gegenwinkel **gleichwendige Winkel**, ebenso zwei Wechselwinkel.

Zwei **gegenwendige Winkel** sind die Winkel der beiden Halbstrahlen auf **einerlei Seite** der Transversalen mit deren **Gegenrichtungen**, z. B. α und γ_1, α_1 und γ, sowie die Winkel der beiden Halbstrahlen auf den **Gegenseiten** der Transversalen mit **einerlei Richtung** der letzteren, z. B. α und β_1, γ und δ_1.

Für diese Winkelpaare folgt aus §. 7, 6a und b der Satz:

a) *Wenn an den beiden Schnittpunkten zweier Geraden mit einer Transversalen irgend zwei gleichwendige Winkel einander gleich oder die Summe zweier gegenwendigen 2R ist, so gilt dasselbe auch für die übrigen Paare von gleichwendigen, bezw. gegenwendigen Winkeln.*

b) *Bei jeder dieser Annahmen sind die Geraden parallel.*

Denn da die Wechselwinkel gleich sind, so sind die Geraden diametral in Bezug auf die Mitte der Transversalen zwischen beiden (2) und somit parallel (§. 14, 4′).

Dies wird benützt beim Zeichnen von Parallelen mittels Verschiebung eines Winkelscheits an einem Lineal, wobei ein beliebiger Winkel an letzterem anliegt.

c) *Von den Winkeln zweier Parallelen mit einer Transversalen sind zwei gleichwendige einander gleich, die Summe zweier gegenwendigen 2R.*

Denn die Parallelen liegen diametral zur Mitte der Transversalen und müssen sonach mit dieser gleiche Wechselwinkel bilden.

§. 16. Zwei und mehr diametrale Punkt- und Geradenpaare.

A.

Punktpaare und Punktreihen.

1. Nimmt man zwei Paare diametraler Punkte $A \,|\!/\!|\, A_1$, $B \,|\!/\!|\, B_1$, so werden die durch sie bestimmten Verbindungsgeraden bei halber Umdrehung zur Deckung kommen, weil je zwei Punkte derselben einander decken.

Die Verbindungsgeraden zweier Punkte und der mit ihnen diametralen Punkte sind diametral.

$$AB \,|\!/\!|\, A_1B_1,$$
$$AB_1 \,|\!/\!|\, A_1B.$$

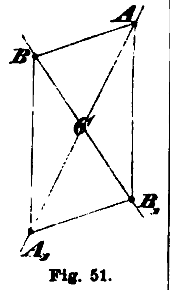


Fig. 51.

Geradenpaare und Strahlenbüschel.

1′. Nimmt man zwei Paare diametraler Geraden, $a \,|\!/\!|\, a_1$, $b \,|\!/\!|\, b_1$, so werden die durch sie bestimmten Schnittpunkte bei halber Umdrehung zur Deckung kommen, weil je zwei ihrer Strahlen einander decken.

Die Schnittpunkte zweier Geraden und der mit ihnen diametralen Geraden sind diametral.

$$ab \,|\!/\!|\, a_1b_1,$$
$$ab_1 \,|\!/\!|\, a_1b.$$

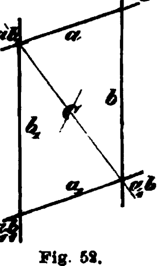


Fig. 52.

2. Hieraus folgt weiter:

Die Verbindungsstrecke zweier Punkte ist gleich der ihrer diametralen Punkte.

3. *Trägt man von zwei diametralen Punkten auf zwei solchen Halbstrahlen gleiche Strecken ab, so sind die Grenzpunkte dieser Strecken ebenfalls diametral.*

Denn wenn $A \,/\!\!/\!\!\!\!\backslash\, A_1$,
Richtung $AB \,/\!\!/\!\!\!\!\backslash\, A_1B_1$
und $AB = A_1B_1$, so decken einander nach halber Umdrehung diese Strecken.

4. Wenn zwei diametrale Gerade von einem Büschel von Centralen durchschnitten werden, so entstehen zwei kongruente gegengerichtet parallele diametrale Punktreihen. — Umgekehrt folgt aus 3:

Zwei kongruente gegengerichtet parallele Punktreihen sind diametral zur Mitte der Verbindungsstrecke zweier homologen Punkte.

Der Winkel zweier Halbstrahlen ist gleich dem ihrer diametralen Halbstrahlen.

3'. *Trägt man an zwei diametralen Halbstrahlen zweier solchen Punkte gleiche Winkel gleichwendig an, so sind die Schenkel dieser Winkel ebenfalls diametral.*

Denn wenn $a \,/\!\!/\!\!\!\!\backslash\, a_1$,
Punkt $ab \,/\!\!/\!\!\!\!\backslash\, a_1b_1$
und $\sphericalangle\, ab = a_1b_1$, so decken einander diese Winkel nach halber Umdrehung.

4'. Wenn durch zwei diametrale Punkte Büschel paarweise paralleler Geraden gezogen werden, so entstehen zwei kongruente gleichwendige diametrale Strahlenbüschel, von deren Scheitelstrahl die Gegenrichtungen einander entsprechen. — Umgekehrt folgt aus 3':

Zwei kongruente gleichwendige Strahlenbüschel, von deren Scheitelstrahl sich die Gegenrichtungen entsprechen, sind diametral zur Mitte dieses Strahles.

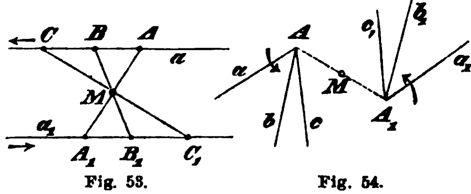


Fig. 53. Fig. 54.

5. Da zwei diametrale Figuren nach halber Umdrehung einander decken, so ergiebt sich:

Drei Punkte oder Geraden und die ihnen diametral entsprechenden Punkte bzw. Geraden bestimmen zwei gleichwendig kongruente Dreiecke oder Dreiseite.

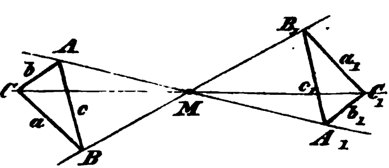


Fig. 55.

Allgemeiner:

Zwei zu einem Centrum diametrale Figuren sind gleichwendig kongruent.

B.

Winkel und Strecken zwischen Paaren von Parallelen und Transversalen.

6. In Bezug auf die Winkel folgt aus der diametralen Lage zweier Paare von Parallelen:

a) *Zwei Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln sind einander gleich, wenn sie von einem parallelen Schenkelpaare aus gleichwendig liegen; liegen sie gegenwendig, so ist ihre Summe 2R.*

Denn die Schenkel der gleichwendig liegenden Winkel sind diametral zur Mitte der Verbindungsstrecke der Scheitel; von gegenwendigen Winkeln ist der eine ein Nebenwinkel zu dem mit dem andern diametralen Winkel. — Umgekehrt folgt aus 3′:

Fig. 56.

b) *Wenn von zwei gleichwendig gleichen Winkeln das erste Schenkelpaar parallel ist, so ist es auch das andere.*

7. Aus der diametralen Lage der Parallelen ergiebt sich in Bezug auf die Gröfse der Strecken:

a) *Parallele Strecken zwischen Parallelen sind einander gleich,*

als diametrale Strecken in Bezug auf die Mitte der Verbindungsstrecke zweier gegenüberliegender Grenzpunkte. — Umgekehrt:

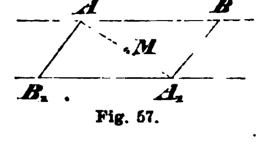


Fig. 57.

b) *Wenn zwei Strecken parallel und gleich sind, so sind es auch die Verbindungsstrecken gleichliegender Grenzpunkte,*

(d. h. die Verbindungsstrecken, von welchen die gegebenen Strecken je auf einer Seite liegen). Denn wenn $AB \parallel$ und $= A_1B_1$, so liegen beide Strecken diametral in Bezug auf die Mitte von AA_1 (3), somit ist (1) $AB_1 \not\parallel A_1B$ d. h. $AB_1 \parallel$ und $= A_1B$.

8. Werden (Fig. 58) zwei Parallele $AA_1 \parallel BB_1$ von zwei Transversalen AB und A_1B_1 geschnitten, so sind erstere Geraden diametral zu den Mittelpunkten M oder M_1 der beiden Transversalen (§. 15, 1). Daher liegt (nach §. 14, 4′) sowohl M als M_1 auf der Mittelparallelen zu ersteren Parallelen, d. h.:

a) *Die Mittelpunkte der Transversalen zwischen Parallelen liegen auf der Mittelparallelen der letzteren.*

b) *Die Parallele durch die Mitte einer Transversalen zwischen zwei Parallelen ist Mittelparallele und halbiert somit jede andere Transversale.*

Fig. 58.

Werden also auf einer Geraden (Fig. 59) gleiche Strecken aufgetragen,

$$AB = BC = CD$$

und durch ihre Teilpunkte Parallele gezogen,

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1,$$

so ist $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1$, d. h.:

c) *Wenn Parallele auf einer Geraden gleiche Strecken abschneiden, so schneiden sie auf jeder Transversalen ebenfalls einander gleiche Strecken ab.*

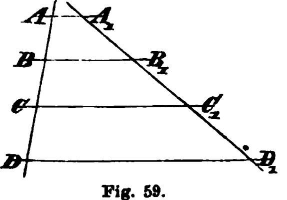


Fig. 59.

9. Werden zwei Parallele $AA_1 \parallel BB_1$ von zwei Transversalen AB und A_1B_1 geschnitten und zieht man noch durch die Mitte der einen Transversalen die Parallele zur andern

$$A_2M_1B_2 \parallel AMB,$$

so ist $A_1A_2 = B_1B_2$, da $A_1A_2 \wedge B_1B_2$ zu M_1, und es ist $MM_1 = AA_2 = AA_1 + A_1A_2$ und $MM_1 = BB_2 = BB_1 - B_2B_1$ (7 a); hieraus folgt: $2MM_1 = AA_1 + BB_1$; d. h.:

Fig. 60.

Wenn zwei Parallele von zwei Transversalen begrenzt werden, so ist die halbe Summe der parallelen Strecken gleich der Strecke der Mittelparallelen zwischen den Transversalen.

Für den Fall, dafs die Strecken auf den Parallelen von einer Transversalen aus gegengerichtet liegen, ist eine derselben negativ zu nehmen.

10. Wird die Strecke auf einer der Parallelen verschwindend klein, so folgt aus 8 a, b und 9:

a) *Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten eines Dreiecks ist parallel der dritten Seite.*

b) *Die Parallele zu einer Seite eines Dreiecks durch die Mitte einer zweiten Seite halbiert auch die dritte.*

c) *Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten eines Dreiecks ist gleich der Hälfte der dritten Seite.*

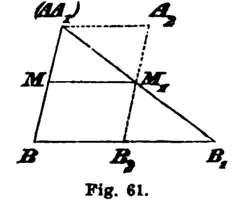


Fig. 61.

Fünftes Kapitel.

Die Drehung.

§. 17. Drehung der Geraden um einen Punkt in ihr.

Aufeinanderfolgende Drehungen um verschiedene Punkte.

1. Die Drehung einer Geraden um einen Punkt in ihr wurde schon in §. 7 behandelt. Wird aber eine Gerade nach einander um verschiedene ihrer Punkte gedreht, etwa a um A in die Lage b, dann b um B in die Lage c, und denkt man mit der zweiten Drehung eine gleich grofse um den ersten Drehpunkt A von b nach c_1 aus-

geführt, so dafs $\sphericalangle bc = bc_1$ ist, so wird $c_1 \parallel c$ (§. 15, 3 b), also auch (§. 15, 3 c) $\sphericalangle ac = ac_1 = ab + bc_1 = ab + bc$. — Würde die Gerade noch in eine vierte Lage d gedreht, so ergäbe sich ein weiterer

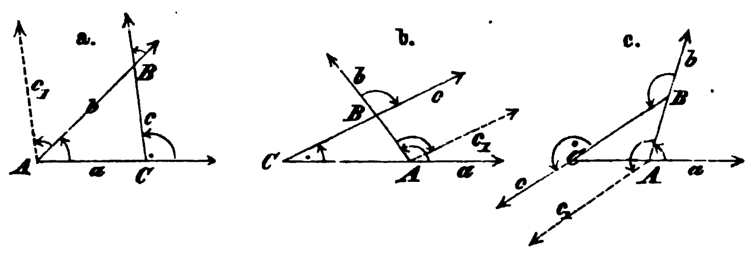


Fig. 62.

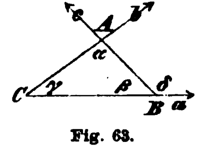
zu addirender Winkel und es würde sein: $\sphericalangle ad = ab + bc + cd$. Dabei ist immer der Drehungssinn zu beachten. So gilt denn allgemein der Satz:

Wird eine Gerade nach einander um beliebige je in ihr liegende Punkte gedreht, so ist der Winkel zwischen der ersten und letzten Richtung gleich der Summe der nacheinander durch die einzelnen Drehungen erlangten Winkel.

Man vergleiche hiermit §. 7, 7, insbesondere auch die Anmerkung daselbst.

B. Die Winkel des Dreiecks.

2. In einem Dreieck heifst jeder Nebenwinkel eines Dreieckswinkels Aufsenwinkel des Dreiecks, z. B. δ. — Die Verlängerung der Seite a kann einerseits direkt durch Drehung um das zugehörige Eck B in die Lage der benachbarten Seite c übergeführt werden, $\sphericalangle \delta = ac$, andererseits durch Drehung um das zweite auf ihr liegende Eck C zunächst in die Lage der Seite b, $\sphericalangle ab = \gamma$ und dann durch Drehung um das dritte Eck nach c, $\sphericalangle bc = \alpha$; somit ist (nach 1): $\sphericalangle ac = ab + bc$, $\sphericalangle \delta = \gamma + \alpha$, d. h.:


Fig. 63.

Ein Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel.

Zusatz: Ein Aufsenwinkel ist also gröfser als ein nicht anliegender Winkel des Dreiecks.

3. Da nun noch $\delta + \beta = 2R$ oder auch — wenn die Gegenrichtung von a mit a_1 bezeichnet wird — weil:

$$\sphericalangle ab + bc + ca_1 = 2R,$$

so folgt:

a) *Die Summe der Winkel im Dreieck beträgt* $2R$,

woraus sich sofort ergiebt:

b) *Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so sind auch ihre dritten Winkel einander gleich.*

Jedes Dreieck kann höchstens einen rechten oder stumpfen Winkel haben, zwei derselben sind stets spitz. Man teilt hiernach die Dreiecke ein in spitzwinkelige, rechtwinkelige, stumpfwinkelige, je nachdem in dem Dreieck kein grösserer Winkel als ein spitzer, rechter oder stumpfer vorkommt.

Von den Seitenstrecken eines rechtwinkeligen Dreiecks heifst die dem rechten Winkel gegenüberliegende die Hypotenuse, die beiden andern heifsen die Katheten.

c) *In einem rechtwinkeligen Dreieck beträgt die Summe der Winkel an der Hypotenuse* $1R$.

d) *In einem gleichseitigen Dreieck beträgt jeder Winkel* $\frac{2}{3}R$ (§. 11,8).

C. Die Winkel des Vielecks.

4. Wird ein Halbstrahl um einen Punkt auf ihm nach einem weiteren Punkte gedreht, dann um diesen Punkt nach einem weiteren u. s. f., so bilden die Strecken zwischen den auf einander folgenden Punkten einen Geradenzug. In einem solchen ist (nach 1) der Winkel der ersten und letzten Richtung gleich der Summe der Winkel der einzelnen Drehungen. — Wenn die Strecken eines Geradenzuges einander nicht durchschneiden und der letzte Zielpunkt der Drehungen der Anfangspunkt des ersten Halbstrahls ist, so entsteht ein Vieleck, welches einen Teil der Ebene begrenzt. Der umgrenzte Teil heifst das Innere des Vielecks. Die Punkte heifsen Ecken, die Verbindungsstrecken zweier aufeinander folgenden Punkte Seitenstrecken, die Summe derselben der Umfang des Vielecks. Nach der Zahl der Ecken oder Seiten unterscheidet man Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. Die Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden Seiten gemessen im Innern des Vielecks heifsen Innenwinkel, während man unter Aufsenwinkeln diejenigen versteht, welche je eine Seite und die Verlängerung der angrenzenden mit einander bilden. Die Verbindungsstrecken zweier nicht aufeinander folgenden Ecken heifsen Diagonalen.

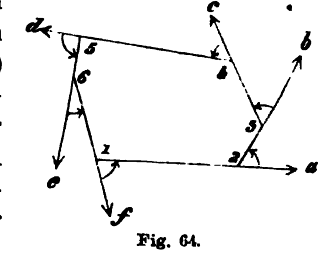


Fig. 64.

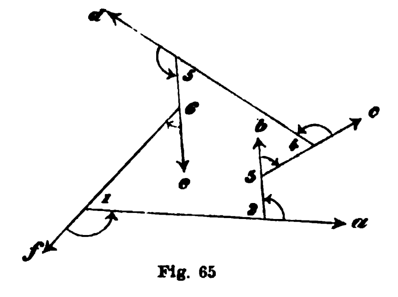


Fig. 65

5. Die Gesamtheit der Winkel, welche je zwei auf einander folgende Richtungen mit einander bilden, in welchen ein den Umfang

durchlaufender Punkt sich bewegt, nennt man **zusammengehörige Aufsenwinkel**. Dieselben bilden die Winkel der Drehungen einer Geraden, der Art, dafs die letzte Richtung mit der ersten zusammenfällt; daher ist ihre Summe ein voller Winkel,

$$\sphericalangle ab + bc + cd + de + ef + fa = \sphericalangle aa = 4R,$$

wobei noch zu beachten, dafs falls die Verlängerung in das Innere des Vielecks fällt, der Aufsenwinkel negativ zu nehmen ist.

Die Summe der zusammengehörigen Aufsenwinkel eines Vielecks beträgt $4R$.

6. Wenn die Verlängerung einer Vieleckseite aufserhalb des Vielecks liegt, so bilden an dem betreffenden Eck ein Innen- und ein Aufsenwinkel ein Paar Nebenwinkel; fällt sie aber in dasselbe, so übertrifft der Innenwinkel den Aufsenwinkel um einen gestreckten Winkel; der Aufsenwinkel ist aber in diesem Fall negativ zu nehmen, so dafs auch nun die Summe beider Winkel an einem Eck $2R$ beträgt. Da in einem n-Eck die Anzahl dieser $2R$ betragenden Winkel n ist, die Summe der Aufsenwinkel aber $4R$ beträgt, so folgt:

Die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks beträgt $(2n - 4)R$,

z. B. die Summe der Innenwinkel eines Vierecks $4R$, eines Fünfecks $6R$, eines Sechsecks $8R$ u. s. w.

§. 18. Drehung der Geraden um einen Punkt aufser ihr.

A. Ein Punkt und eine Gerade.

1. Während die Umwendung und die halbe Umdrehung vollständig bestimmt sind, sobald die Axe, bezw. das Centrum gegeben ist, mufs bei der Drehung einer Ebene um einen Drehpunkt (**Situationspunkt**) aufser diesem noch der Winkel, um welchen zu drehen ist, der **Drehungswinkel**, gegeben sein. — Da die Strecke vom Drehpunkt nach einem Punkt, bzw. die Normale vom Drehpunkt zu einer Geraden ihre Lage nur so bei der Drehung ändert, dafs der eine Grenzpunkt der Strecke im Drehpunkt bleibt, so ergiebt sich sofort:

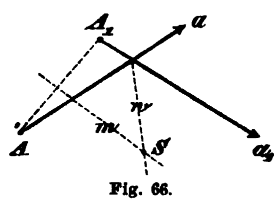


Fig. 66.

a) *Bei einer Drehung bleibt der Abstand eines Punktes oder einer Geraden vom Drehpunkt unverändert.*

Gemäfs §. 12, 6 b, bzw. §. 12, 7 b folgt hieraus:

b) *Die Mittelnormale zu den Lagen eines Punktes vor und nach einer Drehung geht durch den Drehpunkt* —

b′) *Die Halbierende des Nebenwinkels der Richtungen einer Geraden vor und nach einer Drehung geht durch den Drehpunkt* —

und umgekehrt:

c) *Ein Punkt läfst sich mit einem anderen zur Deckung bringen durch*

c′) *Eine Gerade läfst sich mit einer andern zur Deckung bringen durch*

Drehung um einen beliebigen Punkt der Mittelnormalen beider Punkte.	*Drehung um einen beliebigen Punkt einer ihrer beiden Winkelhalbierenden.*

2. Hiernach kann man einen Punkt A und einen Halbstrahl a durch denselben mit einem zweiten Punkt A_1 und einem Halbstrahl a_1 durch denselben zur Deckung bringen durch eine Drehung um den Schnittpunkt S der Mittelnormalen m von AA_1 mit der Halbierenden des Nebenwinkels der Richtungen von a und a_1.

B. Zwei und mehr Punkte und Geraden.

3. Von zwei gleichen Strecken AB und A_1B_1 (Fig. 67) können die Grenzpunkte A und A_1, B und B_1 zur Deckung gebracht werden durch Drehung um den Schnittpunkt S der Mittelnormalen ihrer Verbindungs-

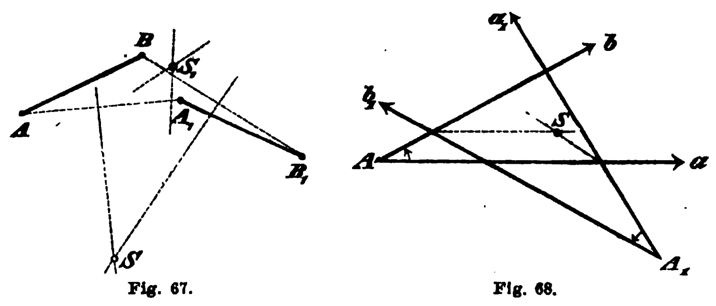


Fig. 67. Fig. 68.

strecken AA_1 und BB_1. — Die beiden gleichen Strecken können auch noch auf eine zweite Weise zur Deckung kommen, nämlich auch so, dafs A und B_1, A_1 und B einander decken.

Von zwei gleichwendig gleichen Winkeln ab und a_1b_1 (Fig. 68) können die ersten Schenkel a und a_1 und gleichzeitig die zweiten b und b_1 zur Deckung gelangen durch Drehung um den Schnittpunkt S, welchen die Halbierende des Nebenwinkels der Richtungen a und a_1 mit der Halbierenden des Nebenwinkels von bb_1 bildet. Vorausgesetzt ist dabei, dafs a und a_1 einander schneiden; über die Deckung bei paralleler Lage siehe das folgende Kapitel.

4. Aus der Gleichheit zweier gleichwendigen Winkel ab und a_1b_1 (Fig. 69 u. 70) folgt: $\sphericalangle\, aa_1 = ab + ba_1 = ba_1 + a_1b_1 = bb_1$ (§. 17, 1); d. h.:

a) *Von zwei gleichwendig gleichen Winkeln bilden die Richtungen der ersten Schenkel denselben Winkel, wie die Richtungen der zweiten.*

Ist im besonderen

$$\sphericalangle\, ab = a_1b_1 = R,$$

so ergiebt sich sofort:

b) *Der Winkel zweier Normalen zu den Schenkeln eines*

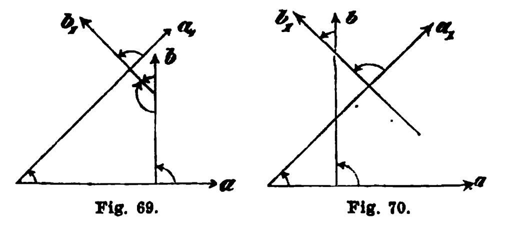


Fig. 69. Fig. 70.

Winkels ist diesem gleich oder ergänzt ihn zu $2R$, je nachdem von zwei zu einander Normalen aus beide Winkel gleich- oder gegenwendig liegen.

Stellen a und a_1 die Lage einer Geraden vor und nach einer Drehung dar, ebenso b und b_1, so ist, da der Winkel ab in die Lage $a_1 b_1$ kommt, $\sphericalangle ab = a_1 b_1$ und es folgt nach a): $\sphericalangle aa_1 = bb_1$, d. h. in Worten:

c) *Bei der Drehung einer Ebene um einen ihrer Punkte beschreiben alle Geraden gleiche Winkel, d. h. der Winkel je ihrer ersten und zweiten Richtung ist für alle der gleiche, nämlich gleich dem Drehungswinkel.*

Für die Winkel der Geraden vom Drehpunkte aus nach Punkten in erster und zweiter Lage ergiebt sich der Satz unmittelbar aus §. 7, 7. Es erscheinen somit die Verbindungsstrecken der entsprechenden Punkte beider Lagen vom Drehpunkte aus unter dem gleichen Winkel (Gesichtswinkel).

5. Wenn der Halbstrahl a, der von dem Punkte A begrenzt ist, bei einer Drehung in die Lage a_1 mit dem Grenzpunkte A_1 kommt, so werden auch gleichgerichtet kongruente Punktreihen auf diesen Halbstrahlen, welche sich an A und A_1 als an entsprechende Punkte anschliefsen, einander decken, ebenso auch gleichwendig kongruente Strahlenbüschel dieser Punkte, welche sich an die Halbstrahlen a und a_1 als entsprechende Strahlen anschliefsen. Es gilt also der Satz:

Zwei kongruente Punktreihen oder zwei gleichwendig kongruente Strahlenbüschel lassen sich zur Deckung bringen durch eine Drehung um den Schnittpunkt der Mittelnormalen je zweier entsprechenden Punktpaare, bzw. der Halbierenden der Nebenwinkel je zweier entsprechenden Richtungspaare. — Diese Mittelnormalen, bzw. Winkelhalbierenden für alle entsprechenden Paare schneiden einander in einem Punkte.

6. Wird das Dreieck ABC durch Drehung um S in die Lage $A_1B_1C_1$ gebracht, so ist dieses Dreieck dem ersteren gleichwendig kongruent. Umgekehrt folgt, da zwei kongruente Dreiecke aus drei kongruenten Paaren von Strecken, bzw. aus drei kongruenten Paaren von Zweistrahlen zusammengesetzt sind:

Zwei gleichwendig kongruente Dreiecke können zur Deckung gebracht werden durch Drehung um den Schnitt der Mittelnormalen zu je zwei entsprechenden Ecken oder um den Schnitt der Halbierenden der Nebenwinkel je zweier entsprechenden Seitenrichtungen. Diese Schnittpunkte fallen für alle solche Paare in einen Punkt.

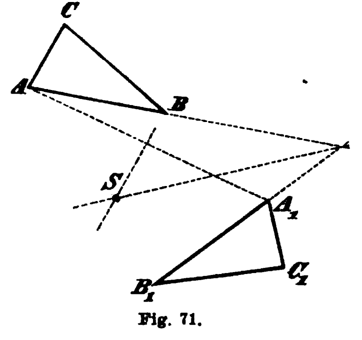


Fig. 71.

Das Gleiche ergiebt sich für irgendwelche gleichwendig kongruente Vielecke.

Sechstes Kapitel.

Die Verschiebung. Perspektivische Kongruenz.

§. 19. Entstehung perspektivisch kongruenter Figuren.

Zwei Figuren, welche durch Verschiebung der einen längs einer Geraden (§. 8, 2 c) zur Deckung gebracht werden können, nennt man in der ursprünglichen Lage perspektivisch kongruent #. Die zur Deckung gelangenden Punkte, Geraden, Strecken, Winkel heifsen entsprechend oder homolog. Die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte werden projicierende Strahlen genannt. Die eine Figur heifst auch die perspektivisch kongruente Projektion der andern.

§. 20. Perspektivisch kongruente Punkt- und Geradenpaare.

A. Ein perspektivisch kongruentes Punkt- und Geradenpaar.

1. Die Verschiebung ist bestimmt, sobald die Gerade b, die Leitlinie, längs welcher die Verschiebung stattfindet und auf dieser zwei Punkte B und B_1 gegeben sind, welche einander entsprechen. Kommt hierbei ein Punkt A nach A_1, eine durch ihn gezogene Gerade a nach a_1, der Schnitt C von a mit b nach C_1 $(a_1 b_1)$, so ist $CA = C_1 A_1$ und $\sphericalangle ab = a_1 b_1$, als verschiedene Lagen derselben Gebilde. Daraus folgt nun, dafs $a \parallel a_1$ (§. 15, 3 b) und weiter, dafs $AA_1 \parallel$ und $= CC_1$ (§. 16, 7 b). Wir folgern also:

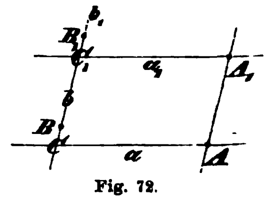


Fig. 72.

a) *In perspektivisch kongruenten Figuren sind die projicierenden Strahlen parallel (der Leitlinie) und je zwei entsprechende Gerade einander parallel.*

b) *Alle Verbindungsstrecken entsprechender Punkte sind einander gleich,*

nämlich gleich der Strecke BB_1, um welche die Verschiebung stattfinden mufs, damit beide Figuren einander decken; wenn $C_1 B_1$ die zweite Lage von CB ist, so ist $CB = C_1 B_1$, somit

$$CB + BC_1 = BC_1 + C_1 B_1 \quad \text{oder} \quad CC_1 = BB_1;$$

daher auch $AA_1 = BB_1$.

Die Verschiebung kann hiernach längs der Verbindungsstrecke irgend welcher zwei entsprechenden Punkte vorgenommen werden und ist durch zwei solche Punkte bestimmt.

2. Bezeichnen wir parallele Halbstrahlen a und a_1, welche auf einerlei Seite der Verbindungsgerade ihrer Grenzpunkte A und A_1 liegen, als gleichgerichtet parallel, so ergiebt sich (nach 1 und dem Parallelen-Axiom):

Gleichgerichtet parallele Halbstrahlen durch entsprechende Punkte perspektivisch kongruenter Figuren sind perspektivisch kongruent.

B. Zwei und mehr perspektivisch kongruente Punkt- und Geradenpaare.

3. Wird nun aufser A noch ein Punkt B auf a gewählt, so führt die Verschiebung A und B bzw. nach A_1 und B_1, so dafs

$$A_1B_1 \parallel \text{ und } = AB$$

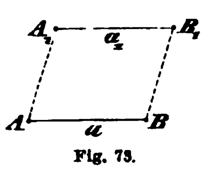


Fig. 73.

sein mufs. Wird umgekehrt

$$A_1B_1 = AB$$

gemacht, so sind auch B und B_1 entsprechende Punkte, d. h.:

Trägt man in perspektivisch kongruenten Figuren auf entsprechenden Richtungen von entsprechenden Punkten aus gleiche Strecken ab, so sind deren Grenzpunkte perspektivisch kongruent.

3'. Wird nun aufser a noch eine Gerade b durch A gewählt, so führt die Verschiebung a und b bzw. nach a_1 und b_1, so dafs

$$\sphericalangle\, a_1b_1 = ab$$

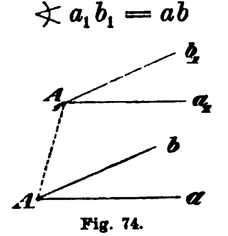


Fig. 74.

sein mufs. Wird umgekehrt

$$\sphericalangle\, a_1b_1 = ab$$

gleichwendig angetragen, so sind auch b und b_1 entsprechende Halbstrahlen, d. h.:

Trägt man in perspektivisch kongruenten Figuren an entsprechenden Punkten und Richtungen gleichwendig gleiche Winkel an, so sind deren Schenkel perspektivisch kongruent.

4. Für irgend zwei Paare entsprechender Punkte, bzw. Geraden ergiebt sich sofort aus ihrer Deckung nach der Verschiebung:

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punktpaare in perspektivisch kongruenten Figuren sind perspektivisch kongruent;
sie sind also parallel.

Die Schnittpunkte entsprechender Geradenpaare in perspektivisch kongruenten Figuren sind perspektivisch kongruent;
sie liegen also auf einer Parallelen zu den projicierenden Strahlen.

5. Wird a als Träger einer Punktreihe, bzw. A als Scheitel eines Strahlenbüschels angenommen, so entsteht beim Verschieben ein kongruentes Gebilde und es ist nur eine wiederholte Anwendung der in 4 enthaltenen Sätze, wenn wir behaupten:

Zwei kongruente Punktreihen auf gleichgerichtet parallelen Geraden sind perspektivisch.

Zwei gleichwendig kongruente Strahlenbüschel, in welchen einerlei Richtung des Scheitelstrahls sich selbst entspricht, sind perspektivisch.

6. Drei Punkte oder Gerade und die mit ihnen perspektivisch kongruenten Punkte bzw. Gerade bestimmen zwei perspektivisch kongruente Dreiecke. Wenn umgekehrt zwei gleichwendig kongruente Dreiecke so liegen, dafs von der Verbindungsgeraden AA_1 zweier entsprechenden Punkte aus die entsprechenden Seiten gleichgerichtet parallel sind, so folgt aus der Gleichheit entsprechender Winkel beider Figuren, dafs auch die übrigen entsprechenden Geradenpaare parallel sind (§. 16, 6 b), und aus der Gleichheit entsprechender Seitenstrecken, dafs die Ecken paarweise auf Strahlen eines Parallelstrahlenbüschels liegen (§. 16, 7 b). Wir folgern also:

Zwei gleichwendig kongruente Dreiecke, von welchen ein Paar entsprechender Seiten gleichgerichtet parallel ist, sind perspektivisch kongruent.

Das Gleiche folgt für gleichwendig kongruente Geradenzüge oder Vielecke.

Bemerkung. Wir können somit zwei gleichwendig kongruente Figuren in perspektivische Lage bringen, indem wir die eine um einen beliebigen Punkt drehen, bis zwei, also alle entsprechenden Seiten parallel werden. Von gegenwendig kongruenten Figuren mufs die eine zuvor um eine beliebige Gerade umgewendet werden, damit beide in gleichwendige Lage kommen. — Nachdem wir nun die verschiedenen Arten kennen gelernt haben, kongruente Gebilde zur Deckung zu bringen, wenden wir uns zur Untersuchung der Bedingungen für die Kongruenz, welche von der gegenseitigen Lage der beiden kongruenten Figuren unabhängig sind.

§. 21. Bedingungen für die Kongruenz der Dreiecke.

1. Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, so stimmen ihre drei Seiten und ihre drei Winkel paarweise in der Gröfse überein: $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, $\sphericalangle ab = a_1b_1$, $\sphericalangle bc = b_1c_1$, $\sphericalangle ca = c_1a_1$. Dafs von diesen sechs Gleichheiten zunächst die letzte eine Folge der zwei vorangehenden, ist aus §. 17, 3 b ersichtlich; dafs aber auch die übrigen fünf nicht unabhängig von einander, soll nun gezeigt werden.

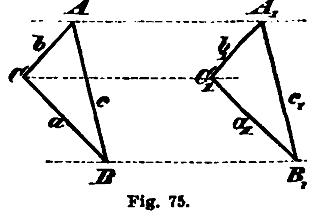


Fig. 75.

2. Wenn nämlich in zwei Dreiecken etwa nur $a = a_1$, $b = b_1$, $\sphericalangle ab = a_1b_1$ und diese Winkel gleichwendig sind, so kann man das eine Dreieck in der Ebene so drehen, dafs $a \parallel a_1$ wird; dann mufs (§. 16, 6 b) $b \parallel b_1$ sein; aber es ist auch $a = a_1$, $b = b_1$, somit (§. 20, 3) $a \# a_1$ und $b \# b_1$. Sind aber $\sphericalangle ab$ und a_1b_1 gegenwendig, so genügt das Umwenden des einen, um sie gleichwendig und dann perspektivisch kongruent zu machen. Wir folgern:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und in dem von denselben eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

3. Wenn für die Dreiecke nur $a = a_1$, $\sphericalangle ab = a_1 b_1$, $\sphericalangle ac = a_1 c_1$, so kann man wieder das eine Dreieck so drehen, dafs $a \parallel a_1$ wird; dann mufs, wenn die Winkel gleichwendig sind (§. 20, 3'), $b \# b_1$ und $c \# c_1$ sein; sind aber die Winkel gegenwendig, so mufs sich dasselbe ergeben, wenn man das eine Dreieck zuvor noch umwendet. — Wären die zwei Dreiecke nicht in zwei der gleichen Seite anliegenden Winkeln übereinstimmend, sondern wäre etwa $a = a_1$, sowie $\sphericalangle ab = a_1 b_1$ und $\sphericalangle bc = b_1 c_1$, so müfste natürlich auch $\sphericalangle ac = a_1 c_1$ sein und alles Übrige bliebe bestehen. Wir folgern:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und in zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

4. Wenn für die beiden Dreiecke $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ ist, so kann man wieder das Dreieck so drehen, dafs $a \parallel a_1$ wird. Sind dann die Winkel gleichwendig, so mufs A_1 auf diejenige Seite von a_1 fallen, auf welcher der mit A perspektivisch kongruente Punkt liegt, da perspektivisch kongruente Dreiecke ebenfalls gleichwendig sind. Sind aber die Winkel gegenwendig, so genügt ein Umwenden um a_1, um das Dreieck in die eben bezeichnete Lage zu bringen. Der dem Punkt A entsprechende Punkt mufs aber von B_1 und C_1 ebensoweit entfernt sein, als A_1, da $c = c_1$ und $b = b_1$ ist. Daher ist A_1 (§. 12, 6 c) der entsprechende Punkt zu A. Wir folgern:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in ihren Seiten übereinstimmen.

5. Wenn für die zwei Dreiecke $a = a_1$, $b = b_1$ und $\sphericalangle ac = a_1 c_1$, so läfst sich durch Drehung allein oder durch Drehung und Umwendung $\sphericalangle ac \# a_1 c_1$ machen, so dafs dann die Strecken a und a_1 und die Richtungen c und c_1 perspektivisch kongruent sind. Der dem Punkte A entsprechende Punkt mufs nun auf c_1 liegen und von C_1 um $b = b_1$ entfernt sein. Es giebt aber (§. 12, 6 d) auf jeder Seite der Normalen von C_1 auf c_1 nur je einen Punkt in dieser Entfernung; also mufs A_1 einer dieser Punkte sein. Der dem Punkte A entsprechende Punkt wird daher mit A_1 zusammenfallen, wenn die Winkel bei A und A_1 beide spitz oder beide stumpf oder beide Rechte sind. Wir folgern:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen, während die Gegenwinkel eines Paares gleicher Seiten einander gleich, die Gegenwinkel des andern Paares beide spitz oder beide stumpf sind.

6. Diese vier Kongruenzsätze werden häufig angewendet, um die Gleichheit zweier Strecken oder zweier Winkel nachzuweisen, welche nicht durch Umwendung oder halbe Umdrehung zur Deckung gelangen; man sucht die fraglichen Stücke als zu kongruenten Dreiecken gehörig aufzufassen und schliefst:

In kongruenten Dreiecken liegen übereinstimmenden Strecken eben solche Winkel gegenüber und umgekehrt.

7. Wenn wir in den Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ die erste Seite a und a_1 jeweils weglassen und dafür B und C, bzw. B_1 und C_1 durch Geradenzüge verbinden, deren Seiten und Winkel in gleicher Folge übereinstimmen, so sind diese Geradenzüge kongruent und bilden mit BAC, bzw. $B_1A_1C_1$ kongruente Vielecke, wenn die Lage der Punkte A und A_1 analog den Bedingungen der vier Kongruenzsätze bestimmt ist. Beachten wir nämlich, welche Strecken und Winkel jeweils unter diesen Bedingungen nicht genannt sind, so ergiebt sich, dafs es zur Kongruenz der Vielecke genügt, wenn von ihnen folgende Stücke übereinstimmend und in gleicher Folge gegeben sind:

a) alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf die beiden an dieser Seite;

b) alle Seiten bis auf zwei aufeinander folgende und alle Winkel bis auf einen (§. 17, 6);

c) alle Seiten und alle Winkel bis auf drei aufeinander folgende Winkel, deren mittlerer in beiden Vielecken von derselben Art ist (kleiner bzw. gröfser als $2R$);

d) alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf zwei aufeinander folgende, von denen nur einer an jener Seite liegt und in beiden Vielecken von derselben Art ist (kleiner bzw. gröfser als $1R$).

III. Abschnitt.

Die Kreislinie: ihre Anwendung zur Übertragung und Vergleichung von Strecken und Winkeln.

Siebentes Kapitel.

Der Kreis in Verbindung mit Punkt, Gerade und Kreis.

§. 22. Ein Kreis.

1. Wenn eine Strecke um einen ihrer Grenzpunkte in der Ebene eine volle Umdrehung macht, so beschreibt ihr anderer Grenzpunkt eine Linie, welche Kreislinie (Kreis) heifst. Der Kreis ist also eine geschlossene ebene Linie und ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

Gebrauch des Zirkels.

Der Drehpunkt heifst Mittelpunkt oder Centrum, die bewegte Strecke der Halbmesser oder Radius.

Zwei gegengerichtete Radien bilden einen Durchmesser (Diamĕter).

Alle Radien eines Kreises sind einander gleich, ebenso alle Durchmesser.

2. Der von der Kreislinie umschlossene Teil der Ebene heifst Kreisfläche; die Kreislinie wird der Umfang oder die Peripherie der Kreisfläche genannt. — Ein von zwei Punkten A und B begrenzter Teil einer Kreislinie heifst Kreisbogen, bezeichnet durch $\widehat{AB}$; durch zwei Punkte wird der Kreis in zwei Bögen geteilt.

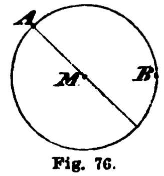


Fig. 76.

3. Da bei halber Umdrehung um den Mittelpunkt die zwei Grenzpunkte je eines Durchmessers ihre Lage vertauschen, so folgt: *Der Kreis ist eine centrische Figur.*

Wird die einen Kreis enthaltende Ebene um dessen Mittelpunkt beliebig gedreht, so decken einander stets die neue und die frühere Lage des Kreises (§. 18, 1a); Bögen, welche dabei zur Deckung kommen, heifsen gleiche Bögen (— Zusammensetzung und Zerlegung von Bögen

wie bei Strecken, vgl. §. 6, 3 und 4. —). Bei einer halben Umdrehung deckt der einerseits von einem Durchmesser gelegene Kreisbogen den anderseits gelegenen, d. h.:

Ein Durchmesser teilt den Kreis in zwei Halbkreise,

d. i. in zwei kongruente Teile.

§. 23. Kreis, Punkt und Gerade.

A. Punkt.

1. Ein Punkt liegt auf einem Kreise oder aufserhalb oder innerhalb desselben, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkte (seine Centraldistanz) bezüglich gleich oder gröfser oder kleiner ist als der Halbmesser.

B. Sekante und Sehne.

2. Eine Gerade kann in Bezug auf einen Kreis verschiedene Arten von Lage haben. Zunächst ist ersichtlich, dafs eine Gerade wegen ihrer Erstreckung ins Unendliche nicht ganz in eine Kreisfläche fallen kann: eine Gerade, welche zum Teil in eine Kreisfläche fällt, heifst eine Sekante des Kreises.

3. Hat eine Gerade g mit einem Kreise einen Punkt A gemeinsam und wird durch den Mittelpunkt die Normale zu g gezogen, so giebt es in Bezug auf letztere einen mit A symmetrischen Punkt B, und es ist $MB = MA$ (§. 11, 1), so dafs B auch auf dem Kreise liegt. Es giebt aber (nach §. 12, 6 d) keinen weiteren Punkt auf der Geraden g in der gleichen Entfernung von M. Wir folgern:

Fig. 77.

Eine Gerade, welche die Kreislinie in einem Punkte schneidet, schneidet diese noch in einem zweiten Punkte, sie kann aber keine drei Punkte mit der Kreislinie gemeinsam haben.

Die innerhalb der Kreisfläche liegende Strecke einer Sekante heifst Sehne.

4. Da die Grenzpunkte einer Sehne gleichen Abstand vom Centrum haben, so folgern wir nach §. 12, 6b bzw. §. 11, 9:

a) *Die Mittelnormale einer Sehne geht durch das Centrum.*

b) *Ein Durchmesser halbiert jede zu ihm normale Sehne; der Kreis ist also eine axige Figur für jeden Durchmesser als Axe.*

c) *Die Mitten paralleler Sehnen liegen auf dem zu ihnen normalen Durchmesser.*

Zusatz. α) Ein Kreis, dessen Centrum auf der Mittelnormalen zweier Punkte liegt und der durch einen dieser Punkte geht, geht auch durch den andern.

β) Zwei zu einander normale Durchmesser teilen die Kreislinie und die Kreisfläche in vier gleiche Teile, sog. Quadranten.

5. Da der Kreis eine axige Figur ist, so bringt die Umwendung um einen Durchmesser auch die Bogenteile, welche durch ihn und eine normale Sehne begrenzt sind, zur Deckung, woraus sich ergiebt:

a) *Der zu einer Sehne normale Durchmesser halbiert die durch die Sehne begrenzten Bögen.*

In Verbindung mit 4 folgt hieraus weiter:

b) *Die Gerade durch zwei der vier Punkte: Centrum, Mitte einer Sehne und Mitten der zugehörigen Bögen geht auch durch die anderen zwei und ist normal zur Sehne.*

C. Tangente.

7. Wird eine Sekante des Kreises um einen ihrer Schnittpunkte so gedreht, dafs der andere sich gegen den ersteren zu bewegt, so tritt schliefslich eine sog. Grenzlage ein, bei welcher die Schnittpunkte zusammenfallen in einen: in dieser Grenzlage heifst die Gerade eine Berührungsgerade oder Tangente des Kreises, und der Punkt, welchen sie mit dem Kreise gemeinsam hat, heifst ihr Berührungspunkt.

Die Tangente hat aufser dem Berührungspunkte keinen weiteren Punkt mit dem Kreise gemeinsam;
denn dies wäre soviel als die Gerade hätte mit dem Kreise drei Punkte gemeinsam, da im Berührungspunkte zwei Schnittpunkte zusammenfallen.

8. In jener Grenzlage fällt die Sehnenmitte mit dem Berührungspunkte zusammen und wir folgern nun aus 5b, 4b und 4a bezüglich die Sätze:

a) *Die Tangente ist normal zu dem nach ihrem Berührungspunkte gehenden Radius.*

b) *Der zur Tangente normale Radius geht durch den Berührungspunkt.*

c) *Die im Berührungspunkte der Tangente zu dieser gezogene Normale geht durch das Centrum.*

Zusatz zu a). Die Tangenten an den Grenzpunkten eines Durchmessers sind mit einander und mit den vom Durchmesser halbierten Sehnen parallel.

9. Auch die Umkehrung von 8a gilt:

Die im Endpunkte eines Radius zu diesem gezogene Normale ist Tangente des Kreises;
denn ihre von jenem Punkte ausgehenden Halbstrahlen sind symmetrisch in Bezug auf den Radius als Axe, müfsten daher aufser

dem Endpunkte des Radius noch zwei symmetrische Punkte mit dem Kreise gemeinsam haben, wenn sie überhaupt einen weiteren mit ihm gemein hätten; letzteres ist also unmöglich.

10. Nun liegt der Berührungspunkt einer Tangente auf der Kreislinie, ihre übrigen Punkte aber aufserhalb derselben, d. h.:

Alle Punkte einer Tangente liegen vom Kreismittelpunkte weiter entfernt als der Berührungspunkt.

Zusatz. Wir verwerten dies zu folgender Aussage:

Die von einem beliebigen Punkte nach einer Geraden gehende Normale ist der kürzeste Abstand zwischen jenem Punkte und den Punkten der Geraden;

denn ein Kreis mit jenem Punkte als Centrum und der normalen Strecke als Radius hat die Gerade zur Tangente.

11. Eine Gerade, deren Abstand vom Centrum gröfser als der Radius, hat mit dem Kreise keinen Punkt gemeinsam; denn alle Punkte der Geraden sind um mehr als den Radius vom Centrum entfernt, da ihr nächster Punkt schon weiter entfernt ist.

§. 24. Kreis und zwei Gerade.

a) Zwei gleiche Sehnen.

1. Wählt man zunächst zwei von demselben Kreispunkte ausgehende gleiche Sehnen, $AB = AB_1$, so geht die Mittelnormale zu BB_1 durch A (nach §. 12, 6b), aber auch durch M (nach §. 23, 4a), so dafs wir folgern:

Zwei von demselben Punkte A ausgehende gleiche Sehnen liegen symmetrisch zu dem durch jenen Punkt A gehenden Durchmesser, ebenso die zugehörigen Bögen.

Fig. 78.

2. Wählt man aber zwei beliebige gleiche Sehnen, $AB = A_1B_1$, und bringt man durch Drehung der einen um das Centrum ihren einen Grenzpunkt mit dem benachbarten der andern Sehne zur Deckung, etwa A mit A_1, so kommt ihr anderer Grenzpunkt etwa nach B_2, und es wird $A_1B_2 \wedge A_1B_1$ und $B_2 \wedge B_1$ in Bezug auf den Durchmesser MA_1, so dafs auch $\widehat{A_1B_2} = \widehat{A_1B_1}$, also auch $\widehat{AB} = \widehat{A_1B_1}$. Umgekehrt: wenn $\widehat{AB} = \widehat{A_1B_1}$, so zeigt die Deckung sofort, dafs auch $AB = A_1B_1$; d. h.:

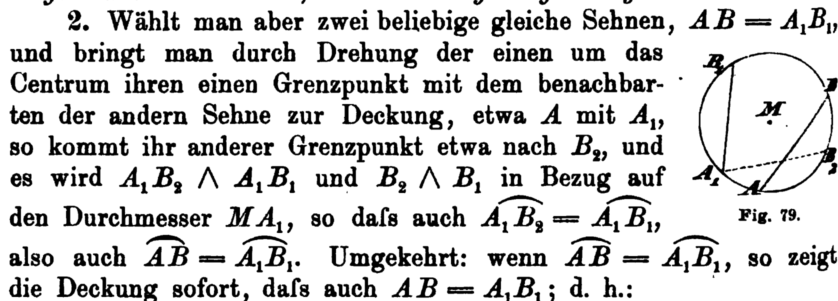


Fig. 79.

a) *Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Bögen sowohl auf den Seiten, welche dem Centrum abgewendet, als auf denen, die ihm zugewendet sind,* und:

b) *Zu gleichen Bögen gehören gleiche Sehnen.*

3. Gleiche Sehnen und Bögen lassen sich auch erhalten, indem man beliebige zwei parallele Sehnen zieht, etwa $AA_1 \parallel BB_1$; da

nämlich deren Grenzpunkte symmetrisch sind in Bezug auf den zu AA_1 und BB_1 normalen Durchmesser (§. 23, 4b), so ist auch $\widehat{AB} = \widehat{A_1B_1}$ und $AB = A_1B_1$. D. h.:

a) *Zwischen parallelen Sehnen liegen gleiche Bögen und Sehnen.*

Fig. 80.

Umgekehrt läfst sich aber auch behaupten:

b) *Gleiche Bögen oder Sehnen werden von parallelen Sehnen begrenzt, wenn sie von je einer der letzteren nach einerlei Seite liegen,* und man beweist dies leicht indirekt mit Benützung von a).

4. Aus 3b ergiebt sich nun mit Benützung von §. 23, 4b, c und 10, 4 sofort die folgende Verallgemeinerung von 1:

Gleiche Bögen oder Sehnen liegen symmetrisch in Bezug auf die Verbindungsgerade des Centrums mit dem Schnittpunkte der Sehnen.

5. In Bezug auf die Lage gleicher Sehnen zum Centrum gilt:

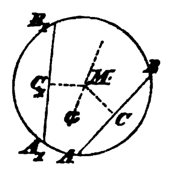


Fig. 81.

Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Abstände vom Centrum;
denn wenn $AB = A_1B_1$, so sind A und A_1, B und B_1, also auch die Mitten C und C_1 symmetrisch zu der Mittelnormalen auf AA_1 (§. 23, 4b), daher ist auch $MC \wedge MC_1$, also $MC = MC_1$.

6. Aber auch die Umkehrung von 5 ist richtig, nämlich:

Vom Centrum eines Kreises gleichweit abstehende Sehnen sind gleich;
denn wenn $MC = MC_1$, so ist $C \wedge C_1$ in Bezug auf den den $\sphericalangle CMC_1$ halbierenden Durchmesser α (§. 11, 2'); dann sind aber auch (§. 12, 3') die zu MC und MC_1 Normalen symmetrisch zu α und auch die durch α gebildeten Halbkreise, also auch die Schnittpunkte beider, d. h. $A \wedge A_1$ und $B \wedge B_1$, somit ist $AB = A_1B_1$.

Anmerkung. Die Sätze 5 und 6 lassen sich auch durch halbe Umdrehung um M und auch durch Kongruenz von Dreiecken MAC und MA_1C_1 beweisen.

b) Zwei Tangenten.

7. Werden in beliebigen Punkten A und A_1 des Kreises M die Tangenten gezogen, so schneiden diese einander in S: der von den Tangenten gebildete Winkel ASA_1 heifst Tangentenwinkel, die Verbindungsstrecke AA_1 der Berührungspunkte heifst Berührungssehne jener Tangenten. In Bezug auf die Mittelnormale zur Berührungssehne als Axe sind

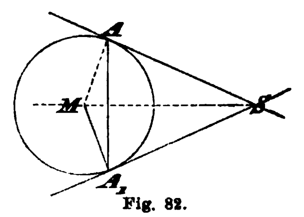


Fig. 82.

MA und MA_1 symmetrisch; da ferner $\sphericalangle MAS = \sphericalangle MA_1S = R$, so ist auch $AS \wedge A_1S$. Wir folgern also:

Die Mittelnormale zur Berührungssehne zweier Tangenten ist Symmetrieaxe für diese Tangenten, sie geht also durch deren Schnittpunkt und halbiert den Tangentenwinkel.

8. Aus 7 folgt auch, dafs die von den Berührungspunkten bis zum Schnittpunkte der Tangenten reichenden Strecken, die sog. Längen der Tangenten, gleich sind — oder:

Zwei von einem Punkt aus an einen Kreis gehende Tangenten sind gleichlang.

9. Weiter ergiebt sich aus 7 unmittelbar (vgl. §. 23, 5b):

a) *In einem Kreise liegen Centrum, Mitte einer Sehne, die Mitten der zugehörigen Bögen und der Schnittpunkt der in den Grenzpunkten der Sehne gezogenen Tangenten auf einer Geraden; eine durch zwei der fünf Punkte gezogene Gerade geht auch durch die übrigen drei Punkte und ist normal zur Berührungssehne.*

b) *Die Halbierende eines Tangentenwinkels geht durch das Centrum, durch die Mitten der zugehörigen Bögen, durch die Mitte der Berührungssehne und steht zu letzterer normal.*

10. Wir folgern ferner:

Liegt der Mittelpunkt eines Kreises auf der Halbierenden eines Winkels und berührt der Kreis den einen Schenkel, so berührt er auch den andern;
denn die Winkelhalbierende ist Symmetrieaxe für die durch sie gebildeten Halbkreise und für die Winkelschenkel; einem Berührungspunkte zwischen Gerade und Kreis einerseits derselben entspricht symmetrisch ein solcher anderseits.

§. 25. Kreis und Kreis.

1. Zwei Kreise mit gemeinschaftlichem Mittelpunkte heifsen koncentrisch.

In nicht koncentrischen Kreisen heifst die durch die Mittelpunkte derselben bestimmte Gerade Centrale. Diese ist für jeden der Kreise Durchmesser; aus §. 23, 4b folgt also:

Die Centrale zweier Kreise ist für beide zugleich Symmetrieaxe.

2. Was die gegenseitige Lage zweier Kreise betrifft, so ist unmittelbar klar, dafs die Fläche des einen Kreises entweder ganz aufserhalb der Fläche des andern liegen kann oder ganz innerhalb oder teils aufserhalb teils innerhalb.

Im letzten Falle mufs jede Kreislinie in die von der andern umschlossene Fläche eindringen, die beiden Kreise müssen dann also einander schneiden. Einem gemeinsamen Punkte beider Kreise mufs aber nach 1 ein anderer in Bezug auf ihre Centrale als Axe sym-

metrisch entsprechen; wollte man jedoch annehmen, daſs auf einer Seite der Centralen zwei Schnittpunkte der Kreise lägen, so müſste die Mittelnormale derselben durch beide Kreismitten gehen, müſste also Centrale sein, was der Annahme widerspricht. Wir folgern also:

Zwei Kreise können einander nur in zwei Punkten schneiden, und diese liegen symmetrisch zu ihrer Centralen.

Zusätze. a) Die gemeinsame Sehne zweier einander schneidenden Kreise wird durch die Centrale normal halbiert.

b) Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ist ein Kreis eindeutig bestimmt.

3. Wenn nun zwei Kreise einander schneiden — ihre Mittelpunkte seien M_1 und M_2, ihre Radien r_1 und r_2 — und wenn P ein beiden Kreisflächen gleichzeitig angehörender Punkt der Centralen ist, so ist:

$$M_1P < r_1,\ PM_2 < r_2,\ \text{also: } M_1P + PM_2 < r_1 + r_2,$$

d. h.:

$$M_1M_2 < (r_1 + r_2);$$

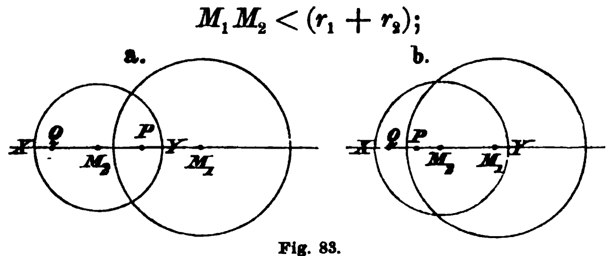


Fig. 83.

wenn aber Q ein nur der einen Kreisfläche M_2 angehörender Punkt der Centralen ist, so ist:

$$M_1Q > r_1,\ r_2 > M_2Q,\ \text{also: } M_1Q + r_2 > r_1 + M_2Q$$

oder:

$$M_1Q - M_2Q > r_1 - r_2,\ \text{d. h.: } M_1M_2 > (r_1 - r_2).$$

Wir folgern:

Wenn zwei Kreise einander schneiden, so ist ihre Centraldistanz kleiner als die Summe und gröſser als die Differenz ihrer Radien.

4. Umgekehrt läſst sich aber auch behaupten:

Wenn die Centraldistanz zweier Kreise kleiner als die Summe und gröſser als die Differenz ihrer Radien ist, so schneiden die Kreise einander.

Denn wenn $M_1M_2 < (r_1 + r_2)$, zugleich aber $M_1M_2 > (r_1 - r_2)$ und wenn zuerst X so gewählt wird, daſs $M_2X = r_2$ in der Richtung M_1M_2, so ist $M_1M_2 + M_2X > r_1 - r_2 + r_2$ oder $M_1X > r_1$, d. h. X liegt auſserhalb des Kreises um M_1; wenn ferner $M_2Y = r_2$ in der Richtung M_2M_1, so ist $M_2M_1 - M_2Y < r_1 + r_2 - r_2$ oder $YM_1 < r_1$, d. h. der Punkt Y des Kreises um M_2 liegt innerhalb des Kreises um M_1.

5. Gehen wir nun über zu dem Fall, dafs die Kreise einander nicht schneiden, so können sie zunächst einander berühren.

Man sagt von zwei krummen Linien: „sie berühren einander", wenn sie eine gemeinsame Tangente mit gemeinsamem Berührungspunkte haben, oder — was dasselbe ist — wenn zwei Schnittpunkte der krummen Linien in einem Punkte zusammenfallen.

Zwei Kreise können also nur einen Berührungspunkt haben, weil sie ja überhaupt nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam haben können (2), also auch nur einen, in welchem zwei Punkte zusammenfallen.

6. Dieser eine Berührungspunkt kann nun nicht auf der einen Seite der Centralen liegen, weil sonst anderseits ein zweiter Berührungspunkt liegen müfste (1), was unmöglich ist. Somit:

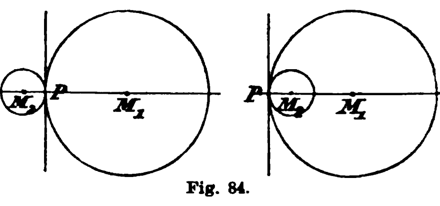


Fig. 84.

Wenn zwei Kreise einander berühren, so liegt ihr Berührungspunkt auf der Centralen und die Centraldistanz ist gleich der Summe oder Differenz der Radien.

7. Umgekehrt behaupten wir:

Wenn die Centraldistanz zweier Kreise gleich der Summe oder Differenz ihrer Radien ist, so berühren die Kreise einander, und zwar ausschliefsend bzw. einschliefsend.

Denn wenn $M_1M_2 = r_1 + r_2$ und wenn $M_1P = r_1$, so ist $PM_2 = r_2$, d. h. es treffen auf der Centralen die Endpunkte zweier Radien zusammen und die in diesem Endpunkt auf der Centralen errichtete Normale ist die den beiden Kreisen gemeinsame Tangente. Ebenso wenn $M_1M_2 = r_1 - r_2$.

8. Behandeln wir nun auch noch den letzten Fall, dafs nämlich $M_1M_2 > (r_1 + r_2)$ oder $< (r_1 - r_2)$, so sei bei der ersten Annahme (Fig. 85a) $XM_2 = r_2$ in der Richtung M_1M_2; dann ist

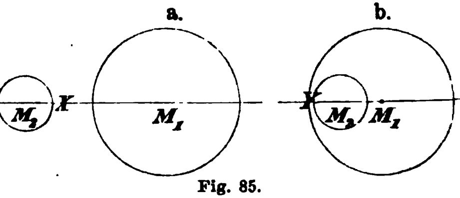


Fig. 85.

$$M_1M_2 - XM_2 > r_1 + r_2 - r_2$$

oder $M_1X > r_1$, d. h. X liegt aufserhalb des Kreises um M_1 und um so mehr jeder andere innerhalb des Kreises um M_2 gelegene Punkt der Centralen. Bei der zweiten Annahme, wenn

$$M_1M_2 < r_1 - r_2,$$

sei (Fig. 85b) $M_2Y = r_2$ in der Verlängerung von M_1M_2; dann ist

$$M_1M_2 + M_2Y < r_1 - r_2 + r_2$$

oder $M_1Y < r_1$, d, h. Y liegt innerhalb des Kreises um M_1 und um so mehr jeder andere innerhalb des Kreises M_2 gelegene Punkt der Centralen. Aus beidem folgern wir:

Wenn die Centraldistanz zweier Kreise gröfser ist als die Summe ihrer Radien, so liegen sie ganz aufser einander; ist sie kleiner als die Differenz ihrer Radien, so schliefst der gröfsere Kreis den kleineren ganz ein.

Achtes Kapitel.

Der Kreis als Mittel der Übertragung gleicher Strecken. (Zirkelkonstruktionen).

§. 26. Die Konstruktionsaufgabe.

Konstruktion von Winkel und Dreieck.

1. Die geometrische Konstruktionsaufgabe verlangt eine Figur zu zeichnen (konstruieren), welche gewisse Bedingungen erfüllt. Sie beschränkt sich hierbei auf die Anwendung der Geraden und des Kreises (des Lineals und Zirkels). Die gegebenen Bedingungen heifsen Bestimmungsstücke der Aufgabe. Durch dieselben wird die Aufgabe entweder bestimmt, und zwar eindeutig, wenn nur ein Resultat möglich, mehrdeutig, wenn deren mehrere möglich sind, oder die Aufgabe heifst unbestimmt, wenn sie eine unendliche Zahl von Lösungen zuläfst. Sind mehr Bedingungen gegeben, als für die eindeutige Bestimmung der Aufgabe notwendig sind, so heifst die Aufgabe überbestimmt und die Lösung wird im Allgemeinen dadurch unmöglich. Unmöglich sind nämlich solche Aufgaben, deren Bestimmungsstücke einander oder den Forderungen der Aufgabe widersprechen.

Z. B. die Aufgabe: „Einen Punkt X so zu bestimmen, dafs seine Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B bzw. gleich a und b sind“, ist zweideutig bestimmt. Mit der Angabe der Seite von AB, auf welcher der fragliche Punkt liegen soll, wird sie eindeutig (§. 12, 6c). Bleibt die Seite jedoch gleichgültig und ist es einerlei, von welchem der beiden Punkte A und B aus die Entfernung gleich a oder b sein soll, so ist die Lage des Punktes vierdeutig bestimmt. Uberbestimmt wäre die Aufgabe, wenn der gegebene Punkt auch noch von einem dritten Punkte C eine gegebene Entfernung haben sollte. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn die Summe der beiden Strecken a und b kleiner als AB oder ihre Differenz gröfser als AB ist.

2. Unter den unbestimmten Aufgaben sind diejenigen von besonderer Bedeutung, welche die Lage eines Punktes nur durch eine Bestimmung angeben und in Folge dessen eine unendliche Anzahl von Lagen für den Punkt geben; die Gesamtheit der letzteren heifst

der **geometrische Ort des Punktes.** Als Beispiele hierfür sind besonders zu merken:

Der geometrische Ort des Punktes, welcher einen gegebenen Abstand hat

a) *von einem Punkte, ist ein Kreis um diesen Punkt mit jenem Abstand als Radius;*

b) *von einer Geraden, ist das Paar von Parallelen zu dieser Geraden in dem gegebenen Abstande;*

c) *von einem Kreise, ist das Paar koncentrischer Kreise, welche mit der Summe bzw. der Differenz des gegebenen Abstandes und des Radius beschrieben werden,* —

wobei man nämlich unter dem Abstande eines Punktes von einem Kreise jede der auf seiner Centraldistanz gemessenen Strecken versteht, welche von dem Punkte und der Kreislinie begrenzt sind.

Ist nun die Lage eines Punktes durch zwei (gesondert in Betracht zu ziehende) geometrische Örter bestimmt, so liegt der Punkt in der That im Schnittpunkte der betreffenden Linien.

3. Die Lösung der Aufgabe wird durch die sog. **Analysis** eingeleitet. Man zeichnet eine vorläufig als richtig geltende Figur, welche die gegebenen Stücke und die gesuchte Lösung darstellt, faſst die in ihr gegebenen Stücke einerseits und die gesuchten anderseits ins Auge, was dadurch erleichtert wird, daſs man die ersteren mit den Anfangs-, die letzteren mit den letzten Buchstaben des Alphabetes bezeichnet. Man sucht die fraglichen Stücke gemäſs Folgerungen bekannter Lehrsätze in Beziehung zu den gegebenen zu bringen, indem man untersucht, welche Stücke zugleich mit den gegebenen Stücken bestimmt sind. Solche mitbestimmte Stücke oder **Data** lassen sich aus den Lehrsätzen entnehmen, welche die gegebenen Stücke in ihrer Annahme enthalten. Zur Aneinanderreihung solcher Sätze und mitbestimmten Stücke müssen oft Punkte der Figur durch **Hülfslinien** verbunden werden. Nachdem man durch die Analysis der Aufgabe die Abhängigkeit der fraglichen Stücke von den gegebenen erkannt hat, geht die nun auszuführende **Konstruktion** vom Bekannten mittelst der mitbestimmten Stücke zum Gesuchten. In gleicher Ordnung wird der **Beweis** geführt, daſs die Lösung den Anforderungen der Aufgabe entspricht. Schlieſslich wird in der sog. **Determination** der Aufgabe untersucht, ob die Aufgabe ein- oder mehrdeutig bestimmt ist; es wird zunächst die Zahl der möglichen Lösungen unter den gegebenen Bedingungen im Allgemeinen, dann werden die unter diesen enthaltenen besonderen Bedingungen gesucht, welche eine Beschränkung dieser Zahl bewirken, und die Abänderungen in der Methode der Lösungen unter solchen Bedingungen ins Auge gefaſst; schlieſslich werden noch diejenigen Bedingungen aufgestellt, unter welchen die Lösung unmöglich ist.

4. Die Aufgabe: *Einen Punkt X zu bestimmen, dessen Entfernungen a und b von zwei gegebenen Punkten A und B bestimmt sind*, wird hiernach in folgender Weise gelöst. Der Punkt X mufs, da seine Entfernung von A gleich a ist, auf einem um A mit a als Radius beschriebenen Kreise liegen (2, a), aus gleichem Grunde auf einem um B mit b beschriebenen Kreise. Durch die Konstruktion der beiden Kreise ergeben sich die Schnittpunkte, welche die Aufgabe lösen. — Es ergeben sich zwei Punkte, wenn $a + b > AB$ und $a - b < AB$, nur ein Punkt zwischen A und B, wenn $a + b = AB$, und nur ein Punkt auf der Verlängerung von AB, wenn $a - b = AB$ ist; in den beiden letzten Fällen genügt ein Abtragen der Strecke a von A aus auf AB. Die Lösung ist unmöglich wenn

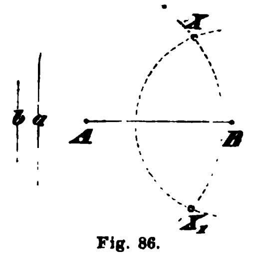


Fig. 86.

$$a + b < AB \text{ oder } a - b > AB$$

ist. (Vgl. §. 25, 4, 7 und 8; siehe auch §. 30, 4.)

5. Die Lage einer Geraden ist am einfachsten bestimmt durch ihren Schnittpunkt und Winkel mit einer gegebenen Geraden. Dies führt zu der Aufgabe: *Eine Gerade in einem gegebenen Punkte A_1 einer Geraden A_1B_1 unter bestimmtem Winkel α anzutragen.*

Analysis. Es sei Z_1 ein beliebiger Punkt des fraglichen Schenkels, so entspricht ihm ein Punkt Z auf dem Schenkel des ursprünglichen Winkels, wobei $AZ = A_1Z_1$ ist; ebenso entsprechen einander auf der gegebenen Geraden A_1B_1 ein Punkt Y_1 und ein Punkt Y des ersten Schenkels, wenn $AY = A_1Y_1$ ist. Da beide Figuren zur Deckung gebracht werden können, so mufs auch $YZ = Y_1Z_1$ sein, d. h. Z_1 mufs von A_1 und Y_1 bezw. die Entfernungen AZ und YZ haben, wodurch die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt ist.

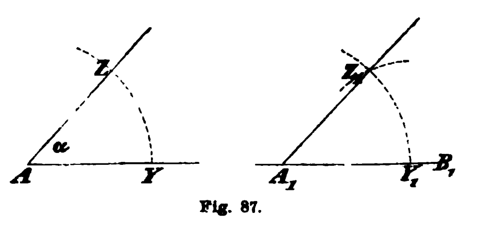


Fig. 87.

Konstruktion. Man trage auf den Schenkeln des gegebenen Winkels und auf der gegebenen Geraden die beliebigen Strecken $AY = A_1Y_1$ und AZ ab und konstruiere dann Z_1 als Schnittpunkt von Kreisbögen aus A_1 und Y_1 mit AZ und YZ bzw. als Radien.

Beweis. Die beiden durch AZY und $A_1Z_1Y_1$ bestimmten Dreiecke sind kongruent, da sie in den drei Seiten übereinstimmen; daher sind auch die den gleichen Seiten YZ und Y_1Z_1 gegenüberliegenden Winkel einander gleich, d. h.:

$$\sphericalangle A = A_1.$$

Determination. Die Aufgabe ist vierdeutig bestimmt, solange nicht darüber verfügt ist, auf welcher Seite und an welcher Richtung der Geraden der Winkel angetragen werden soll; wird die Seite oder die Richtung bestimmt, so ist die Aufgabe zweideutig, werden Seite und Richtung der Geraden bestimmt, so ist sie eindeutig.

6. Die in 4 gegebene Aufgabe stimmt mit der überein: *Ein Dreieck aus drei gegebenen Seiten zu konstruieren*, die in 5 löst auch die Aufgabe: *Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu zeichnen.* — Sind von einem Dreieck eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben (deren Summe natürlich kleiner als $2R$ sein mufs), so werden an die gegebene Strecke in deren Grenzpunkten die beiden Winkel einerseits angetragen; ist ein ihr anliegender und ein gegenüberliegender Winkel gegeben, so ist auch der dritte Winkel ein mitbestimmtes Stück (§. 17, 3b) und wird zuerst als Nebenwinkel zur Summe der beiden gegebenen Winkel konstruiert. — Sind zwei Seiten a und b und der Gegenwinkel α der einen dieser Seiten a gegeben, so trägt man auf dem einen Schenkel dieses Winkels die Seite b an und beschreibt vom Endpunkte dieser Strecke mit a einen Kreisbogen, der den andern Schenkel entweder zweimal schneidet, so dafs die Aufgabe zweideutig ist (indem ihr als Lösung ein spitz- und ein stumpfwinkeliges Dreieck entspricht), oder

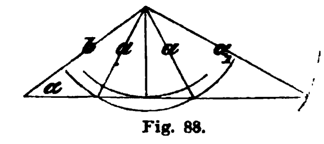


Fig. 88.

berührt (so dafs ein rechtwinkeliges Dreieck entsteht) oder nur einmal trifft, indem $a = b$ oder $a > b$ (wobei der zweite Schnittpunkt auf den Gegenstrahl des Schenkels von α fällt), in welchen beiden Fällen die Aufgabe eindeutig bestimmt ist, während sie unmöglich wäre für den Fall, dafs a kleiner als die vom Endpunkte von b auf den andern Schenkel gezogene Normale ist.

§. 27. Halbierung von Strecke und Winkel, Konstruktion der Normalen und Parallelen.

1. Aufgabe. *Die Mittelnormale (Mitte) zu einer gegebenen Strecke AB ist zu konstruieren.*

Analysis. Ein Punkt X auf der Mittelnormalen in irgend einer Entfernung AX von A (welche gröfser als die Hälfte von AB) hat von B die gleiche Entfernung.

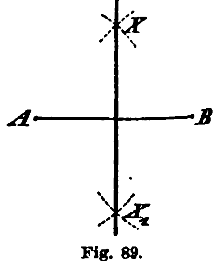


Fig. 89.

Konstruktion. Man konstruiert einen Schnittpunkt zweier Kreisbögen, die von A und B mit gleichem Radius beschrieben werden. Dieser Punkt und der zweite Schnittpunkt der betreffenden Kreise oder auch zweier Kreise mit einem andern Radius geben die Lage der Mittelnormalen an.

Beweis. Da $AX = XB$, so ist X auf der Mittelnormalen zu AB (§. 12, 6b), ebenso X_1.

Determination. Die Aufgabe hat stets eine einzige Lösung.

2. Aufgabe. *Die Halbierende eines gegebenen Winkels ist zu konstruieren.*

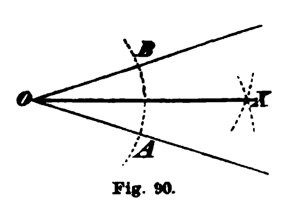


Fig. 90.

Analysis. Zu zwei beliebigen Punkten der Schenkel in gleichem Abstande vom Scheitel ist die fragliche Halbierende Mittelnormale: daher Konstruktion gemäfs 1. Es genügt die Konstruktion eines Punktes.

Die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen (seit der Zeit der altgriechischen Mathematiker berühmt und schon um 420 v. Chr. gelöst), ist unter alleiniger Anwendung von Gerade und Kreis nicht zu lösen, sondern erfordert die Benützung andersartiger krummer Linien. — Da

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3}$$

so ist

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3},$$
$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3}$$

u. s. w.;

somit läfst sich die Dreiteilung durch wiederholte Vierteilung annäherungsweise bewerkstelligen; die Dreiteilung des R ergiebt sich leicht mittels eines gleichseitigen Dreiecks.

3. Aufgabe. *In einem gegebenen Punkte einer Geraden ist die Normale zu errichten.*

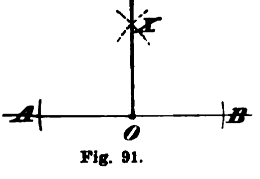


Fig. 91.

Analysis. Da der gegebene Punkt O als Scheitel eines flachen Winkels betrachtet werden kann, so kommt die Aufgabe auf 2 zurück.

4. Aufgabe. *Von einem gegebenen Punkte ist die Normale auf eine Gerade zu fällen.*

Analysis a) Zu zwei Punkten der Geraden, welche von dem gegebenen Punkte gleichweit entfernt sind, ist die gesuchte Gerade Mittelnormale.

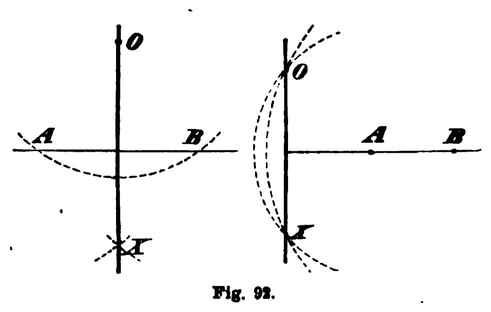


Fig. 92.

Konstruktion. Man zieht einen Kreisbogen um den Punkt, welcher die Gerade in zwei Punkten schneidet und verfährt dann wie in 1.

Analysis b) Zwei Kreise, deren Centrale die Gerade ist und

die einander in dem gegebenen Punkte schneiden, treffen einander zum zweiten Male in einem symmetrisch entsprechenden Punkte.

Konstruktion. Man beschreibt von zwei beliebigen Punkten A und B der Geraden Kreisbögen, welche durch O gehen; der zweite Schnittpunkt dieser Kreisbögen bestimmt dann die Lage der Normalen.

5. Aufgabe. *Im Grenzpunkte eines Halbstrahles ist die Normale zu errichten, ohne den Gegenstrahl zu benützen.*

Analysis. Denkt man sich eine beliebige Gerade durch beide zu einander Normalen begrenzt, so mufs diese Strecke Hypotenuse und die Spitze O mufs von deren Mitte A um $AB = AX$ entfernt sein (vgl. Aufg. §. 7, 7).

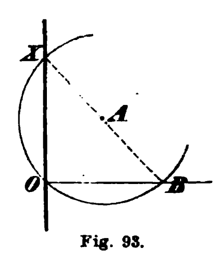


Fig. 93.

Konstruktion. Man beschreibt um einen beliebigen Punkt A innerhalb des zu konstruierenden rechten Winkels einen Kreisbogen durch den gegebenen Grenzpunkt O und zieht im zweiten Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden B einen Durchmesser; der andere Grenzpunkt desselben liegt dann auf der Normalen.

6. Aufgabe. *Durch einen Punkt ist die Parallele zu einer Geraden zu ziehen.*

Analysis a) Eine Transversale durch den Punkt P und die Gerade ergiebt mit letzterer einen Winkel, zu welchem ein gleichwendig gleicher Winkel in dem Punkte an die Transversale anzuzutragen ist.

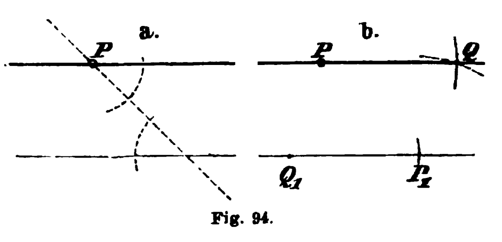


Fig. 94.

Analysis b) Man kann P als diametralen Punkt zu einem beliebigen Punkte P_1 der Geraden auffassen. Zu einem beliebigen zweiten Punkte Q_1 der letzteren liegt der diametrale Punkt Q auf der gesuchten Parallelen und ist dadurch bestimmt, dafs seine Entfernungen von P und P_1 gleich P_1Q_1 bzw. PQ_1 sind und dafs er anderseits als Q_1 von der Verbindungsgeraden PP_1 liegt.

7. Aufgabe. *Zu einer Geraden ist in gegebenem Abstande a die Parallele zu ziehen.*

Auflösung a) Man konstruiert eine Normale zur Geraden, trägt a auf ihr ab und zieht durch den erhal-

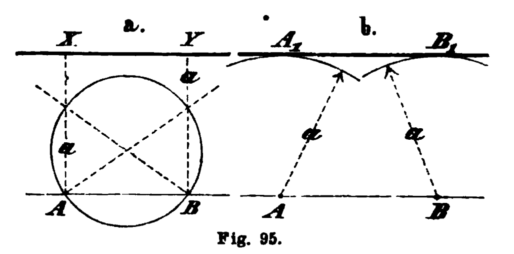


Fig. 95.

tenen Grenzpunkt die Parallele zur ursprünglichen oder die Normale zur normalen Geraden (§. 11, 4a).

b) Man konstruiert zwei Normalen mittels eines Kreises wie in 5 und trägt auf ihnen a ab (§. 12, 8d).

c) Man beschreibt um zwei Punkte A und B der Geraden Kreise mit dem Radius a und legt eine Gerade (Lineal) tangierend an beide Kreisbogen an.

Beweis. Da A_1B_1 Tangente in A_1 und in B_1, so ist AA_1 und $BB_1 \perp A_1B_1$ (§. 23 8a), und da auch $AA_1 = BB_1$, so ist $A_1B_1 \parallel AB$ (§. 12, 8d), somit AA_1 und $BB_1 \perp AB$ (§. 11, 4b).

Wollte man die Berührungspunkte selbst genau erhalten, so müfsten in A und B die Normalen zu AB errichtet werden.

§. 28. Konstruktion von Tangenten an den Kreis.

(Gerade in gegebenem Abstande von Punkten.)

1. Aufgabe. *Durch einen Punkt der Kreislinie ist die Tangente zu ziehen.*

Auflösung. Da die Tangente im Endpunkte des Radius normal steht, so kann die Aufgabe wie in §. 27, 3 oder 5 gelöst werden.

2. Aufgabe. *Eine Tangente ist parallel zu einer Geraden an einen Kreis zu ziehen.*

Auflösung. Die Normale vom Centrum zur Geraden trifft die Kreislinie in den Berührungspunkten.

3. Aufgabe. *Durch einen Punkt aufserhalb des Kreises sind Tangenten an ihn zu ziehen, bzw. deren Berührungspunkte zu bestimmen.*

Analysis a) Es sei A der Mittelpunkt, B der gegebene Punkt,

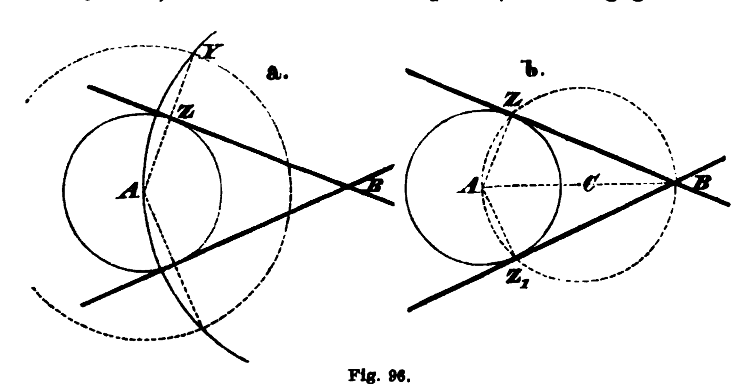


Fig. 96.

Z der fragliche Berührungspunkt. In Bezug auf ZB als Axe wird der zu A symmetrisch liegende Punkt Y auf der Axennormale AZY

liegen. Die Lage dieses Punktes Y ergiebt sich aber aus $AY = 2AZ$ = dem doppelten Radius und aus $BY = BA$.

Konstruktion. Man zeichne mit doppeltem Radius einen koncentrischen Kreis und mit BA von A aus einen Kreisbogen, verbinde die Schnittpunkte beider Hülfskreise mit dem Centrum des gegebenen Kreises; diese Verbindungsgerade geht durch die Berührungspunkte.

Beweis. Da $AZ = ZY$ und $AB = BY$, so ist BZ Mittelnormale zu AY, also normal zu AZ.

Analysis b). Gemäfs §. 27, 5 mufs der Berührungspunkt Z von der Mitte von AB um $\frac{1}{2}AB$ entfernt sein. Der Berührungspunkt ist daher der Schnittpunkt des gegebenen Kreises mit dem um AB als Durchmesser beschriebenen.

Zusatz. Hiermit ist auch die Aufgabe gelöst: *Durch einen Punkt B eine Gerade zu ziehen, welche von einem Punkte A einen gegebenen Abstand hat.*

4. Aufgabe. *Zu zwei gegebenen Kreisen sind die gemeinsamen Tangenten zu ziehen, bzw. deren Berührungspunkte zu bestimmen.*

Analysis. Wenn die beiden Kreise einander ganz ausschliefsen,

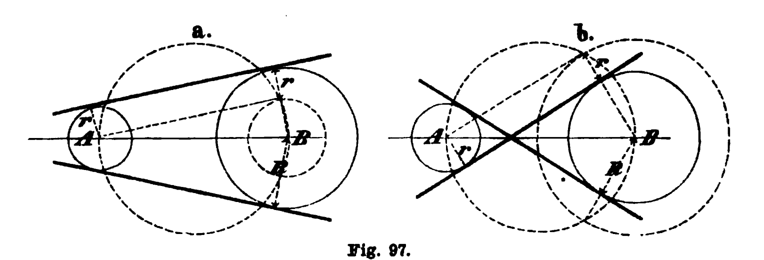


Fig. 97.

so ist die gemeinsame äufsere Tangente, von welcher ab beide Kreise einerseits liegen, zu unterscheiden von der gemeinsamen inneren Tangente, auf deren Gegenseiten beide Kreise liegen. Denken wir zur Tangente die Parallele durch das Centrum des kleinern Kreises gezogen, so ist deren Abstand vom Centrum des anderen Kreises im ersten Falle gleich der Differenz der Radien, im zweiten gleich deren Summe und berührt somit einen zu dem gröfseren koncentrischen Kreis, welcher mit dieser Differenz bzw. Summe der Radien beschrieben ist. Damit ist die Aufgabe auf 3 und 2 zurückgeführt. — Determination.

Zusatz. Die Aufgabe: *eine Gerade zu ziehen, welche von zwei gegebenen Punkten A und B bestimmte Abstände r und R hat,* ist übereinstimmend mit der vorstehenden zu lösen.

§. 29. Konstruktion von Berührungskreisen.

(Punkte in gegebenen Abständen von Punkten und Geraden.)

1. Um die Lage des Mittelpunktes eines Kreises zu erhalten, wenn dieser durch einen Punkt gehen, bzw. eine Gerade oder einen Kreis berühren soll, ist zu beachten, dafs der Abstand des Mittelpunktes von letzteren Gebilden stets gleich dem Radius sein mufs. Aus §. 26, 2 folgt somit:

Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines mit gegebenem Radius zu beschreibenden Kreises,

a) *welcher durch einen Punkt geht, ist ein Kreis um diesen Punkt mit dem gegebenen Radius;*

b) *welcher eine Gerade berührt, ist das Paar von Parallelen zu der Geraden in einem dem Radius gleichen Abstande;*

c) *welcher einen Kreis berührt, ist das Paar koncentrischer Kreise mit der Summe und mit der Differenz der Radien als Radius.* (Erstere giebt ausschliefsende, letztere giebt einschliefsende Berührung.)

2. *Soll ein Kreis mit gegebenem Radius je zwei der Elemente Punkt P, Gerade G, Kreis K berühren,* so ergeben sich die folgenden sechs mehrdeutig bestimmten Einzelaufgaben. Es sollen berührt werden:

1) P_1, P_2; 2) P_1, G_1; 3) P_1, K_1; 4) G_1, G_2; 5) G_2, K_1; 6) K_1, K_2.

Die Dermination der Aufgabe hat die Abhängigkeit der Anzahl der fraglichen Kreise von der Gröfse des gegebenen Radius und den Abständen der gegebenen Stücke (bzw. Radien der gegebenen Kreise) darzulegen.

Zusatz. Eine etwas allgemeinere Fassung dieser Aufgabe ist die folgende: *Punkte zu suchen, welche gegebene Abstände haben von je zweien der Elemente Punkt, Gerade oder Kreis.*

3. Ist der Radius nicht gegeben, während der Kreis zwei der Elemente Punkt, Gerade und Kreis berühren soll, so ergeben sich für die Lage des Mittelpunktes geometrische Örter, von welchen hier nur die angeführt werden können, welche der ersten und der vierten der sechs Einzelaufgaben in 2 entsprechen. Aus §§. 23, 4 Zusatz α und 24, 10 folgt nämlich:

Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher

a) *durch zwei Punkte geht, ist deren Mittelnormale;*

b) *zwei einander schneidende Gerade berührt, ist das Paar von Winkelhalbierenden der Geraden;*

c) *zwei Parallele berührt, ist die Mittelparallele.*

Hiernach lassen sich leicht die Aufgaben lösen: *Zu drei Punkten oder drei Geraden die berührenden Kreise zu ziehen* (s. §. 37).

Als geometrische Örter des Mittelpunktes für die Fälle No. 2, 3, 5, 6 ergeben sich Kurven, deren Betrachtung in einem späteren Kurs folgen wird.

4. Die den Fällen 2 und 3 entsprechenden geometrischen Örter lassen sich aber hier noch angeben, sobald der gegebene Punkt auf einem der gegebenen Elemente liegt.

Bei gegebenem Berührungspunkte auf einer Geraden oder auf einem Kreise ergiebt sich aus §§. 23, 8 und 25, 6:

Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher in einem gegebenen Punkte

a) *eine Gerade berührt, ist die Normale des Berührungspunktes;*

b) *einen Kreis berührt, ist die Centrale des Punktes.*

5. Mit Hülfe der in 3 und 4 angegebenen geometrischen Örter lassen sich die Aufgaben lösen:

Kreise zu konstruieren, von welchen ein Berührungspunkt entweder

a) *auf einer Geraden* oder

b) *auf einem Kreise gegeben ist*

und welche aufserdem entweder

α) *einen Punkt* oder

β) *eine Gerade* oder

γ) *einen Kreis berühren.*

Für die letzteren Fälle ist zu beachten:

a) *Die Berührungspunkte eines Kreises, der eine Gerade und einen Kreis berührt, liegen auf einer Geraden mit einem Grenzpunkte des zur Geraden normalen Durchmessers des letzteren Kreises.*

b) *Die Berührungspunkte zweier Kreise mit einem dritten liegen auf einer Geraden mit einem Grenzpunkte desjenigen Durchmessers eines der beiden Kreise, welcher mit dem Radius nach dem Berührungspunkte des andern Kreises parallel ist.*

Zum Beweise sind zu benützen: §. 15, 3c, §. 11, 8, §. 17, 3 und §. 7, 6.

Neuntes Kapitel.

Vergleichung ungleicher Strecken mittels des Kreises.

§. 30. Strecken zwischen einem Punkte und einer Geraden.

1. Denkt man sich einen Punkt mit allen Punkten einer Geraden verbunden, so ist unter diesen Strecken nur eine zur Geraden normal (§. 11, 3b) und diese ist unter allen die kürzeste (§. 23, 10 Zusatz); alle übrigen heifsen schief zur Geraden und sind paarweise gleich (§. 12, 6), nämlich je zwei solche, deren Fufspunkte vom Fufspunkte der Normalen gleichweit entfernt sind.

2. Werden aber zwei Schiefe als verschieden grofs angenommen, etwa $AD > AC$ und liegen sie auf einerlei Seite von AB,

der Normalen, so schliefst ein Kreis um A mit AD als Radius die Sehne DD_1 und den Punkt C ein (§. 23, 1), so dafs $BC < BD$ und (nach §. 17, 2)

$$\sphericalangle BCA > BDA$$

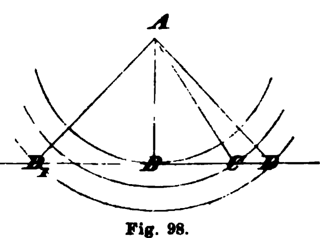


Fig. 98.

sein mufs. Liegen aber die ungleichen Schiefen auf verschiedenen Seiten von AB, etwa $AD_1 > AC$, so giebt es (1) auf derselben Seite mit AC eine mit AD_1 gleiche Strecke AD u. s. w. Wir folgern:

Gehen von einem Punkte aus nach einer Geraden die Normale und ungleiche Schiefe, so ist

a) *der Fufspunkt der gröfseren weiter als der der kleineren vom Fufspunkte der Normalen entfernt, und*

b) *die gröfsere Schiefe bildet mit der Richtung nach letzterem den kleineren Winkel.*

3. Wenn umgekehrt $BD > BC$, so hat ein um A mit AC als Radius beschriebener Kreis BC als halbe Sehne und D liegt aufserhalb des Kreises, somit ist $AD > AC$, daher (nach 2)

$$\sphericalangle ACB > ADB.$$

Wenn aber, in zweiter Umkehrung,

$$\sphericalangle ACB > ADB,$$

so kann nicht $AD = AC$ und nicht $AD < AC$ sein (2), somit mufs $AD > AC$ sein; dann ist aber auch $BD > BC$ (2).

Wir behaupten also:

Gehen von einem Punkte aus nach einer Geraden die Normale und zwei Schiefe, so ist von letzteren

a) *diejenige mit gröfserem Abstande ihres Fufspunktes vom Fufspunkte der Normalen die gröfsere,* und

b) *diejenige, welche mit der Richtung nach dem Normalenfufspunkte den kleineren Winkel bildet, die gröfsere.*

4. Gehen von einem Punkte A aus nach einer Geraden zwei beliebige Strecken, AB und AC, so kann man letztere als Radien zweier Kreise betrachten, deren Centraldistanz BC ist; dann ist (nach §. 25, 3)

$$BA + AC > BC \text{ und } BA - AC < BC,$$

Fig. 99.

d. h.:

Die Summe der Entfernungen eines Punktes seitlich einer Strecke von deren Grenzpunkten ist gröfser als die Strecke, die Differenz jener Entfernungen ist kleiner als die Strecke.

5. Werden nun seitlich von einer Strecke BC beliebige Punkte, etwa A, A_1, A_2 gewählt, so ist (4):

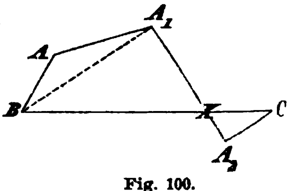


Fig. 100.

$$
\begin{aligned}
BA_1 &< BA + AA_1 \\
BX &< BA_1 + A_1X. \\
XC &< XA_2 + A_2C
\end{aligned}
$$

folglich:

$$BA_1 + BX + XC < BA + AA_1 + BA_1 + A_1X + XA_2 + A_2C$$

oder: $$BC < BA + AA_1 + A_1A_2 + A_2C;$$ d. h.:

Die Verbindungsstrecke zweier Punkte ist kleiner als die Summe der Strecken eines Geradenzuges, welcher die beiden Punkte verbindet.

§. 31. Strecken von zwei Punkten nach einer Geraden, von zwei Geraden nach einem Punkte.

1. Wählt man zwei Punkte A und B auf derselben Seite einer Geraden RS und zu dem einen, etwa B, den symmetrischen B_1 zu RS als Axe, so ist

$$AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB,$$

letztere Summe ist $> AB$, also

$$AB_1 > AB.$$

Fig. 101.

Zwei Punkte auf derselben Seite einer Geraden sind einander näher, als einer von ihnen dem symmetrischen Punkte des andern zu der Geraden als Axe.

2. Und umgekehrt:

Wenn ein Punkt dem einen von zwei zu einer Geraden symmetrischen Punkten näher liegt als dem andern, so liegt er mit ersterem auf derselben Seite der Geraden.

Denn wenn $AB < AB_1$ und A läge nicht mit B sondern mit B_1 auf einerlei Seite, so wäre $AB_1 < AB_1$, entgegen der Annahme.

3. Wird nun noch die Summe $AC + CB_1$ mit der Summe der Entfernungen eines beliebigen andern Punktes X der Geraden von A und B verglichen, so zeigt sich, dafs

$$AC + CB = AC + CB_1 = AB_1$$

und $AX + XB = AX + XB_1$; aber $AB_1 < AX + XB_1$, somit ist $AC + CB < AX + XB$; d. h.:

Liegen zwei Punkte auf derselben Seite einer Geraden, so ist die Summe ihrer Entfernungen von je einem Punkte der letzteren am kleinsten für den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden des einen jener Punkte mit dem zum andern symmetrischen in Bezug auf die Gerade als Axe.

4. Wählen wir nun zwei Gerade SA, SB und einen Punkt P zwischen der Halbierenden des $\sphericalangle ASB$ und dem einen Schenkel SA, ferner die Normalen PA und PB, so schneidet letztere die Winkelhalbierende in M. Wenn nun

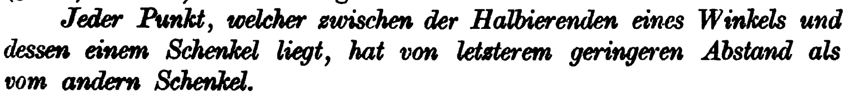
$$MB_1 \perp SA, \text{ so ist } MB_1 = MB$$

(§. 12, 7a); aber wegen

$$PB = PM + MB_1 \text{ ist } PB > PB_1 > PA$$

Fig. 102.

(§. 23, 10 Zus.). Somit folgt:



Jeder Punkt, welcher zwischen der Halbierenden eines Winkels und dessen einem Schenkel liegt, hat von letzterem geringeren Abstand als vom andern Schenkel.

5. Auf indirektem Wege erweist man leicht die Umkehrung hiervon:

Jeder Punkt innerhalb eines Winkels, welcher von dessen einem Schenkel kleineren Abstand hat als vom anderen, liegt mit ersterem auf derselben Seite der Halbierenden des Winkels.

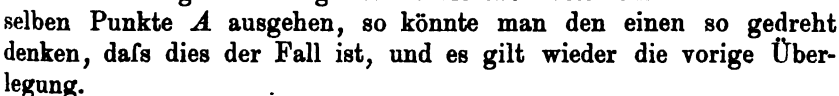
§. 32. Strecken zwischen Punkt und Kreis.

1. Ein auf einer Kreislinie liegender Punkt A begrenzt mit anderen Punkten derselben verschiedene Bögen. Wenn etwa

$$\widehat{AB} > \widehat{AB_1}$$

(jedoch $\widehat{AB}$ nicht gröfser als der Halbkreis), so liegen B_1 und A auf dem Halbkreise einerseits BC, also auch einerseits des Durchmessers XY, der die Symmetrieaxe zu BB_1 ist. Dann ist aber (§. 31, 1) $\overline{AB} > \overline{AB_1}$. Würden die ungleichen Bögen nicht wie eben von dem-

Fig. 103.



selben Punkte A ausgehen, so könnte man den einen so gedreht denken, dafs dies der Fall ist, und es gilt wieder die vorige Überlegung.

Wenn aber umgekehrt die Sehne $\overline{AB} > \overline{AB_1}$, so kann nicht $\widehat{AB} = \widehat{AB_1}$ und nicht $\widehat{AB} < \widehat{AB_1}$ sein, weil sonst $\overline{AB} = \overline{AB_1}$ (§. 24, 2), bzw. $\overline{AB} < \overline{AB_1}$ sein müfste; es kann also nur $\widehat{AB} > \widehat{AB_1}$ sein. Wir folgern:

Zum gröfseren Bogen eines Kreises gehört die gröfsere Sehne und umgekehrt, falls die Bögen nicht gröfser als der Halbkreis sind.

Zusatz. Zum Halbkreise selbst gehört also auch die gröfste Sehne, d. h.:

Der Durchmesser ist die gröfste Sehne im Kreis.

2. Verschieden grofse Sehnen erhält man auch durch Annahme

verschiedener Entfernung derselben von der Kreismitte. Dreht man dann die Sehnen in Parallellage, so kommen die Normalen MA_2 und MB_2 in einerlei Richtung, ohne Änderung ihrer Gröfse; wenn dann $MB_2 > MA_2$, so liegt BB_1 auf der vom Mittelpunkte abgewendeten Seite von AA_1 begrenzt also nur einen Teil des Bogens AA_1; d. h.:

Fig. 104.

Von zwei Sehnen ist die mit kleinerem Abstande vom Mittelpunkte die gröfsere — und umgekehrt — letzteres, weil, wenn $AA_1 > BB_1$ ist, dann nicht $MA_2 = MB_2$ (§. 24, 6) und nicht $MA_2 > MB_2$ sein kann.

Zusatz. Der kleinste, bzw. gröfste Abstand vom Mittelpunkte, welchen eine Sehne haben kann, ist 0, bzw. r: die zugehörige Sehne ist dann $2r$ bzw. 0. Das erste Ergebnis stimmt mit dem Zusatz zu 1 überein; das zweite führt auch hier zur Erkenntnis, dafs eine Tangente aufzufassen ist als eine Sekante, deren Schnittpunkte mit dem Kreise in einen Punkt zusammenfallen.

3. Wird nun Punkt A in der Ebene des Kreises beliebig angenommen, so hat auch er von den verschiedenen Punkten des letzteren verschiedene Entfernungen. Stets aber ist (§. 30, 4):

$$AB > AM - MB$$

oder

$$AB > AC \text{ und}$$

$$AB < AM + MB$$

oder

$$AB < AC_1, \text{ d. h.:}$$

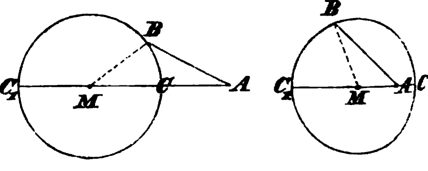


Fig. 105.

Unter allen Verbindungsstrecken eines beliebigen Punktes mit den Punkten einer Kreislinie ist diejenige die gröfste, welche durch den Mittelpunkt geht; diejenige ist die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht.

4. Wählen wir unter sämtlichen Sehnen, welche durch einen innerhalb eines Kreises liegenden Punkt A möglich sind, eine beliebige BC, ferner den Durchmesser durch A und die zu demselben normale Sehne XY, so ist die Normale

$$MF < MA$$

(§. 23, 10 Zus.), also (2) ist

$$BC > XY; \text{ d. h.:}$$

Fig. 106.

Von allen Sehnen, welche durch einen (innerhalb eines Kreises gelegenen) Punkt gehen, ist die zum Durchmesser jenes Punktes normale Sehne die kleinste.

Zehntes Kapitel.

Kreis und Winkel.

§. 33. Arten der Winkel beim Kreise.

Tritt zu einem Kreise ein Winkel in Beziehung, so kann dessen Scheitel verschiedene Arten der Lage haben.

a) Liegt derselbe innerhalb und zwar zunächst im Mittelpunkte, so dafs seine Schenkel Radien sind, so heifst er Centriwinkel; liegt er aber aufser der Mitte, so heifst er Sehnenwinkel.

b) Liegt der Scheitel auf der Kreislinie und sind seine Schenkel Sehnen, so entsteht ein Peripheriewinkel; ist aber nur sein einer Schenkel eine Sehne, sein anderer eine Tangente, so wird diese besondere Art des Peripheriewinkels Berührungswinkel genannt.

c) Liegt der Scheitel aufserhalb und sind seine Schenkel Tangenten oder Sekanten, so nennt man ihn Tangentenwinkel, bzw. Sekantenwinkel.

In allen diesen Fällen hat der Winkel einen oder zwei zugehörige Bögen, nämlich denjenigen, welcher von seinen Schenkeln (bzw. deren Gegenstrahlen) eingeschlossen wird.

§. 34. Vergleichung der Winkel beim Kreise.

1. Betrachten wir zunächt zwei gleiche Centriwinkel desselben Kreises (oder zweier Kreise mit gleichen Radien), so ergiebt sich sofort deren Deckungsfähigkeit; hieraus folgt:

Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Sehnen und Bögen — und umgekehrt.

Fig. 107.

2. Zeichnen wir nun noch an den Enden der Radien r_1 und r_2 eines Centriwinkels α die Tangenten t_1 und t_2, so bilden letztere einen Tangentenwinkel β. Nun folgt aus (§. 18, 4b), dafs

$$\sphericalangle\, \alpha' = \alpha,$$

sowie $\sphericalangle\, \alpha + \beta = 2R$; d. h.:

a) *Ein Tangentenwinkel ergänzt den Winkel der zugehörigen Berührungsradien zu $2R$.*

Fig. 108.

Mit Rücksicht auf 1 folgt hieraus:

b) *Zu gleichen Tangentenwinkeln eines Kreises gehören gleiche (Centriwinkel und) Sehnen und Bögen — und umgekehrt.*

Zusatz. Rücken die Berührungspunkte der beiden Tangenten mehr und mehr zusammen, so wird schliefslich $\alpha = 0$, $\beta = 2R$ werden, d. h. der Schnittpunkt der beiden Tangenten fällt in den Berührungspunkt, beide Tangenten bilden eine einzige.

3. Gehen wir weiter zu Sehnen- und Sekantenwinkel, so zeigt die Figur, dafs (§. 17, 2) für den ersteren $\sphericalangle\, \alpha = \beta + \gamma$, für den letzteren $\sphericalangle\, \alpha' = \beta' - \gamma'$, d. h.:

a) *Ein Sehnenwinkel ist gleich der Summe der Peripheriewinkel, welche auf dem von ihm und seinem Scheitelwinkel abgeschnittenen Bögen stehen* —

und:

b) *Ein Sekantenwinkel ist gleich der Differenz der Peripheriewinkel, welche auf den von seinen Schenkeln eingeschlossenen Bögen stehen.*

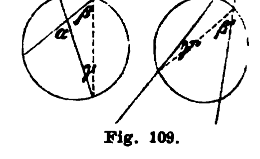


Fig. 109.

4. Ist ferner $t_1 s$ ein Berührungswinkel und wird der zugehörige Centriwinkel $r_1 r_2$ durch r halbiert und im Ende von r die Tangente t gezogen, so ist

$$\sphericalangle\, t_1 t = r_1 r,$$

da eine Drehung um M im Betrag des $\sphericalangle\, r_1 r$ den Winkel $r_1 t_1$ auf rt bringt (§. 18, 4c); ferner ist $t \parallel s$, weil beide $\perp r$; also ist

Fig. 110.

$$\sphericalangle\, t_1 s = r_1 r = \tfrac{1}{2} r_1 r_2, \text{ d. h.:}$$

Ein Berührungswinkel ist halb so grofs als der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Centriwinkel.

5. Wählen wir endlich einen Peripheriewinkel α, zu welchem der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel α' gehört, und zieht man im Scheitel von α die Tangente, so ist:

$$\sphericalangle\, \alpha + \beta + \gamma = 2R = \frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{2};$$

nun lehrt aber 4, dafs

$$\beta = \frac{\beta'}{2} \text{ und } \gamma = \frac{\gamma'}{2},$$

Fig. 111.

somit mufs:

$$\sphericalangle\, \alpha = \frac{\alpha'}{2} \text{ sein; d. h.:}$$

Ein Peripheriewinkel ist halb so grofs als der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Centriwinkel.

Zusätze. 1) Wächst der Centriwinkel bis 180°, so wächst auch der zugehörige Peripheriewinkel und wird schliefslich 90°; d. h.:

Ein auf oder in einem Halbkreise oder über einem Durchmesser stehender Peripheriewinkel ist ein Rechter.

2) Wächst der Centriwinkel über 180°, so wird der zugehörige Peripheriewinkel gröfser als 90°, und wenn letzterer zwischen seinen Schenkeln den ganzen Umfang enthält, so wird er = 180°. (Vgl. 2. Zusatz.)

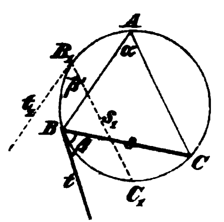
3) Aus 4 und 5 folgt noch:

Ein Peripherie- und ein Berührungswinkel auf gleichem Bogen sind einander gleich.

Dafs z. B. (Fig. 112) $\sphericalangle \alpha = \beta$ ist, ergiebt sich übrigens auch durch eine um den Mittelpunkt stattfindende Drehung des Winkels st im Betrag des halben Bogens $\widehat{AB}$, so dafs B nach B_1 kommt. Alsdann ist nämlich $t_1 \parallel AB$ und, da C um einen Bogen $\widehat{CC_1} = \widehat{AB_1}$ gedreht wurde, auch

$$B_1C_1 \parallel AC \text{ (§. 24, 3b);}$$

somit ist $\sphericalangle\ \beta = \beta' = \alpha$.


Fig. 112.

6. Aus dem vorigen Satze 5 ergiebt sich, weil auf einem Bogen nur ein Centriwinkel, aber unendlich viele Peripheriewinkel stehen können, sofort die Folgerung:

a) *Peripheriewinkel auf demselben Bogen oder auf gleichen Bögen sind von gleicher Gröfse* —

oder:

b) *Jede Kreissehne erscheint von sämtlichen Punkten des einen durch sie abgeschnittenen Bogens aus betrachtet unter demselben Winkel.*

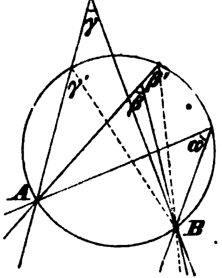
7. Von Wichtigkeit ist auch die Umkehrung von 6 b, nämlich:

a) *Der geometrische Ort des Scheitels eines Winkels von bestimmter Gröfse, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, ist ein Paar durch jene Punkte gehender Kreisbögen, zu deren Ergänzung (zum Kreise) jener Winkel als Berührungswinkel gehört.*

Denn wenn α, β, γ solche Winkel sind, deren Schenkel durch A und B gehen, so ist durch A, B und den Scheitel von α ein Kreis bestimmt (§. 25, 2 Zusatz b). Läge dann der Scheitel von β etwa innerhalb desselben, so wäre $\beta > \beta'$ (§. 17, 2 Zus.), aber $\beta' = \alpha$, so dafs β nicht $= \alpha$ sein könnte; läge aber der Scheitel eines Winkels γ aufserhalb jenes Kreises, so wäre

$$\gamma < \gamma', \text{ aber } \gamma' = \alpha,$$

so dafs γ nicht $= \alpha$ sein könnte. Die Winkel, deren Scheitel innerhalb oder aufserhalb des Bogens liegen, sind somit nicht $= \alpha$, so dafs die Scheitel der mit α gleichen Winkel sämtlich auf dem Kreise liegen müssen.


Fig. 113.

Als specieller Fall von a) folgt:

b) *Der geometrische Ort des Scheitels eines rechtwinkeligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse ist der über der Hypotenuse als Durchmesser beschriebene Kreis.*

8. Es lassen sich die Sätze in 6 und 7 noch anders gewinnen und deuten. Wenn nämlich a_1 und b_1 zwei durch denselben Punkt S_1 der

Kreislinie gehende Gerade sind und a_2, b_2 die durch S_2 nach den Schnittpunkten der ersteren mit dem Kreise gehenden Geraden, und wenn t die Tangente in S_1, f der Scheitelstrahl $S_2 S_1$, so ist:

$$\sphericalangle\, ta_1 = fa_2 \text{ und } \sphericalangle\, tb_1 = fb \text{ (5, Zus. 3)},$$

also:

$$\sphericalangle\, (tb_1 - ta_1) = fb_2 - fa_2$$

oder:

$$\sphericalangle\, a_1 b_1 = a_2 b_2;$$

d. h.:

a) *Drehen sich zwei Gerade um zwei Punkte einer Kreislinie so, dafs sie einander stets in einem weiteren Kreispunkte schneiden, so drehen sie sich gleichzeitig um gleiche Winkel* —

oder:

a′) *Irgend zwei Punkte eines Kreises sind die Mittelpunkte zweier kongruenten gleichwendigen Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen einander in den übrigen Punkten des Kreises schneiden; dabei entsprechen dem Scheitelstrahle beider Büschel wechselseitig die in den Scheiteln gezogenen Tangenten.*

Fig. 114.

Der Satz 7a läfst sich dann auch als Umkehrung hiervon auffassen:

b) *Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier kongruenten gleichwendigen Strahlenbüschel bilden einen durch die Scheitel desselben gehenden Kreis.*

IV. Abschnitt.

Strecken, Winkel und Kreise geschlossener Figuren.

Elftes Kapitel.

Dreieck und Dreiseit.

§. 35. Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln.

A. Seiten und Winkel eines Dreiecks.

Der Fall, daſs in einem Dreiecke zwei Seiten oder zwei Winkel einander gleich sind, das axige Dreieck und Dreiseit, wurde schon in §. 11, C behandelt. Wir fassen hier nur noch den Fall ungleicher Seiten und Winkel ins Auge.

1. Aus §. 30, 4 folgt sofort:

In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten gröſser als die dritte, die Differenz derselben kleiner als die dritte Seite.

2. Der Satz in §. 30, 2b führt zu folgendem:

Ist in einem und demselben Dreieck eine Seite gröſser als eine andere, so liegt der gröſseren Seite auch der gröſsere Winkel gegenüber.

3. Als Umkehrung von 2 folgern wir sofort aus §. 30, 3b:

Ist in einem und demselben Dreieck ein Winkel gröſser als ein anderer, so liegt dem gröſseren Winkel auch die gröſsere Seite gegenüber.

Zusätze. a) *Dem gröſsten Winkel eines Dreiecks liegt die gröſste Seite gegenüber.*

b) *Im stumpfwinkeligen Dreieck ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die gröſste.*

c) *Im rechtwinkeligen Dreieck ist die Hypotenuse gröſser als jede einzelne der beiden Katheten.*

B. Seiten und Winkel zweier Dreiecke.

Die Bedingungen, unter welchen zwei Dreiecke in allen Stücken übereinstimmen, sind schon in §. 21 angegeben, so daſs hier nur noch die Fälle teilweiser Übereinstimmung in Betracht zu ziehen sind.

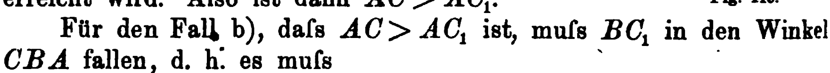
4. *Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und einem anliegenden Winkel übereinstimmen, so liegt* a) *dem gröſseren der beiden anderen anliegenden Winkel auch die gröſsere Seite gegenüber, und umgekehrt* b) *der gröſseren den ersteren Winkel mitbildenden Seite auch der gröſsere Winkel.*

Denn legt man die Dreiecke mit den übereinstimmenden Seiten AB und Winkeln A auf einander, so mufs für den Fall a), dafs

$$\sphericalangle CBA > C_1BA$$

ist, der Punkt C_1 auf AC liegen, da bei der Drehung um B von BA aus erst BC_1 und dann BC erreicht wird. Also ist dann $AC > AC_1$.

Fig. 115.



Für den Fall b), dafs $AC > AC_1$ ist, mufs BC_1 in den Winkel CBA fallen, d. h. es mufs

$$\sphericalangle CBA > C_1BA\,.$$

sein.

5. *Wenn zwei Dreiecke in je zwei Seiten übereinstimmen, so liegt* a) *dem gröfseren der eingeschlossenen Winkel die gröfsere Seite gegenüber, und umgekehrt* b) *der gröfseren Seite der gröfsere Winkel.*

Legt man im ersten Falle die Dreiecke so, dafs zwei gleiche Seiten in AB einander decken und $\sphericalangle C_1AB$ einen Teil von $\sphericalangle CAB$ bildet, so sind die Endpunkte des anderen Paares gleicher Seiten, C und C_1, symmetrisch zur Winkelhalbierenden von C_1AC; C_1 liegt aber auch auf derselben Seite der Symmetrieaxe mit B, da bei der Drehung um A aus der Lage AB erst AC_1, dann die Axe, dann AC erreicht wird. Daher ist $BC_1 < BC$ (§. 31, 1).

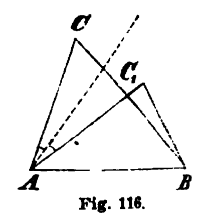


Fig. 116.

Im zweiten Falle werden zwei gleiche Seiten in AB zur Deckung gebracht und beide Dreiecke auf einerlei Halbebene von AB aus gelegt. Da dann $BC_1 < BC$, so liegt B und C_1 auf einerlei Seite der Symmetrieaxe zu CC_1 (§. 31, 2) und da diese durch A geht, so ist

$$\sphericalangle C_1AB < CAB.$$

6. *Wenn zwei Dreiecke in einer Seite übereinstimmen, die anliegenden Winkel aber in dem einen Dreieck kleiner sind als in dem andern, so ist die Summe der beiden anderen Seiten im ersteren ebenfalls kleiner als im letzteren.*

Denn wenn die beiden Dreiecke mit den gleichen Seiten in AB einander decken, und C und C_1 nach einerlei Seite von AB gelegt sind, so mufs C_1 in den Winkelraum von BAC, sowie von ABC fallen, da

$$\sphericalangle C_1AB < CAB \text{ und } \sphericalangle ABC_1 < ABC$$

ist. Verlängert man AC_1 bis zum Schnitt D mit BC, so ist

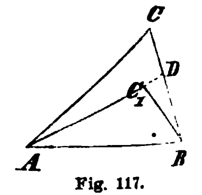


Fig. 117.

$$\begin{array}{l} AC_1 + C_1D < AC + CD \\ \underline{C_1B \qquad\quad < C_1D + DB} \\ AC_1 + C_1B < AC + CB, \end{array}$$ d. h.:

Die Summe der Verbindungsstrecken irgend eines Punktes einer Dreiecksfläche mit den Grenzpunkten einer Seite ist kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten.

§. 36. Die besonderen Punkte des Dreiecks.

1. In jedem beliebigen Dreieck ABC ist die Mittelnormale c' zu AB der geometrische Ort des von A und B gleichweit entfernten Punktes (§. 12, 6a), ebenso ist die Mittelnormale a' zu BC der geometrische Ort des von B und C gleichweit entfernten Punktes; der Schnittpunkt von c' und a' mufs also auch von C und A gleichweit entfernt sein, folglich mufs er auf der Mittelnormalen b' zu CA liegen (§. 12, 6b). Wir folgern also:

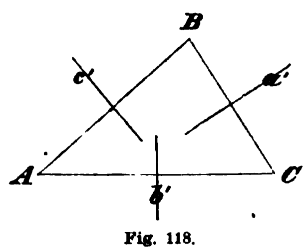
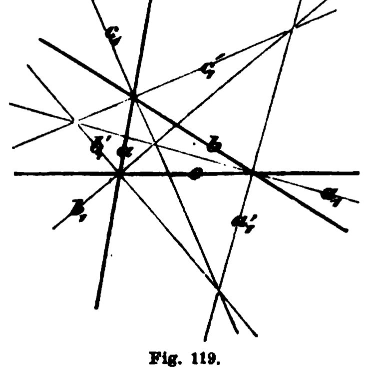


Fig. 118.

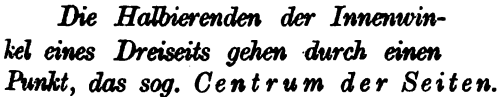
Die Mittelnormalen zu den Seiten eines Dreiecks gehen durch einen Punkt, das sog. C e n t r u m d e r E c k e n.

Verschiedene Lagen des Centrums der Ecken, je nachdem das Dreieck spitz-, recht- oder stumpfwinkelig ist.

2. Zeichnen wir ferner die Halbierenden zunächst der Innenwinkel eines Dreiseits abc, so ist fürs erste die den $\sphericalangle\, ab$ Halbierende c_1 der geometrische Ort des von a und b gleichweit entfernten Punktes (§. 12, 7a), ebenso ist die den $\sphericalangle\, bc$ Halbierende a_1 der geometrische Ort des von b und c gleichweit entfernten Punktes; der Schnittpunkt von c_1 und a_1 mufs also auch von c und a gleichweit entfernt sein, er mufs also auf der Halbierenden b_1 des $\sphericalangle\, ca$ liegen (§. 12, 7b) — d. h.:


Fig. 119.

Die Halbierenden der Innenwinkel eines Dreiseits gehen durch einen


kel eines Dreiseits gehen durch einen Punkt, das sog. C e n t r u m d e r S e i t e n.

Zusatz. a) Die Abschnitte solcher von den Ecken durch einen Punkt gezogenen Geraden (E c k t r a n s v e r s a l e n), welche einerseits von den Ecken begrenzt sind, heifsen o b e r e, die anderen u n t e r e A b s c h n i t t e.

b) Da der geometrische Ort des von a und b gleichweit entfernten Punktes nicht allein c_1, sondern auch c_1' ist, d. i. die Halbierende des Nebenwinkels ab, und dasselbe auch von a_1' bezüglich des Nebenwinkels bc gilt, so liegt der Schnittpunkt von c_1' und a_1'

auf b_1. So wie sich also vorhin das *innere Centrum der Seiten* fand, so erkennt man nun, dafs es aufser diesem auch noch drei *äufsere Centren der Seiten* giebt.

3. Wenn wir weiterhin in einem beliebigen Dreieck ABC durch die Ecken die Normalen zu den bezüglich gegenüberliegenden Seiten, die sog. Höhen des Dreiecks zeichnen, a', b', c', so kann man auch von diesen, und zwar durch Rückführung auf 1, zeigen, dafs sie durch denselben Punkt gehen. Legt man nämlich durch die Ecken Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten, so bilden diese

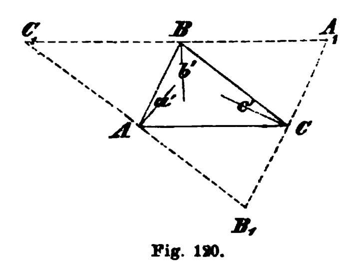


Fig. 120.

ein neues Dreieck $A_1B_1C_1$; nun ist (§. 16, 7a) $C_1A = BC = AB_1$, also A die Mitte von B_1C_1; ebenso sind B und C die Mitten von C_1A_1 und A_1B_1. Nun sind aber a', b', c' auch normal zu den Seiten des $\triangle A_1B_1C_1$ (§. 11, 4c), also sind sie deren Mittelnormalen, haben daher die in 1 ausgesprochene Eigenschaft, d. h.:

Die Höhen eines Dreiecks gehen durch einen Punkt, den sog. Höhenpunkt.

4. Zeichnen wir endlich in einem Dreieck ABC die durch die Seitenmitten gehenden Ecktransversalen, die sog. Schwerlinien (oder Medianen), zunächst deren zwei, AA_1 und BB_1, so schneiden sie einander in S. Nun treten diametrale Punktpaare auf: B |/| C zu A_1, C |/| A zu B_1 als Centrum. Bestimmen wir zu diesen Centren noch die mit S diametralen Punkte A_2 und B_2, so ist

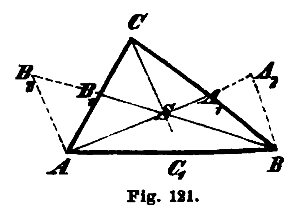


Fig. 121.

(§. 16, 1 und §. 14, 4') $SC \parallel$ und $= AB_2$ und A_2B. Daher sind letztere Strecken (§. 16, 4) diametral zum Schnittpunkt S der Verbindungsgeraden AA_2 und BB_2, und SC ist die Mittelparallele zu jenen Parallelen, halbiert somit auch AB (§. 16, 8a).

Hieraus folgt:

a) *Die Schwerlinien eines Dreiecks gehen durch einen Punkt, den sog. Schwerpunkt.*

Als weiteres Resultat ergiebt sich hieraus:

$$AS = SA_2 = 2 \cdot SA_1 \text{ und } BS = 2 \cdot SB_1, \text{ d. h.:}$$

a) *Zwei Schwerlinien eines Dreiecks schneiden einander so, dafs je der obere Abschnitt doppelt so grofs ist als der zugehörige untere.*

§. 37. Das Sehnendreieck und Tangentendreiseit.

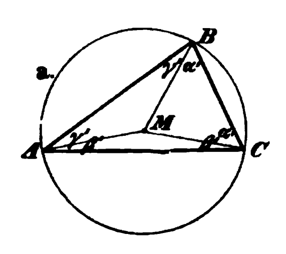
1. Ein Vieleck, dessen Ecken auf einem Kreise liegen, heifst dem Kreise eingeschrieben (Sehnenvieleck), letzterer heifst: dem Vieleck umgeschriebener Kreis (sog. Umkreis).

1'. Ein Vielseit, dessen Seiten einen Kreis berühren, heifst dem Kreise umgeschrieben (Tangentenvielseit), letzterer heifst: dem Vieleck eingeschriebener Kreis (Inkreis), falls er innerhalb, und: angeschriebener Kreis (Ankreis), falls er aufserhalb des Vielecks liegt.

2. In einem Dreieck ist das Centrum der Ecken (§. 36, 1) Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, d. h.:
Für jedes Dreieck giebt es einen umgeschriebenen Kreis.

2'. In einem Dreiseit ist jedes Centrum der Seiten (§. 36, 2) Mittelpunkt je eines berührenden Kreises, d. h.:
Für jedes Dreiseit giebt es einen eingeschriebenen Kreis und drei angeschriebene Kreise.

3. Die Winkel α, β, γ des Sehnendreiecks ABC (Fig. 122) werden durch die nach dessen Ecken gehenden



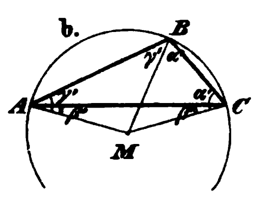
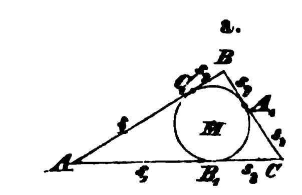


Fig. 122.

3'. Die Seitenstrecken a, b, c des Tangentendreiseits ABC (Fig. 123) werden durch die Berührungspunkte



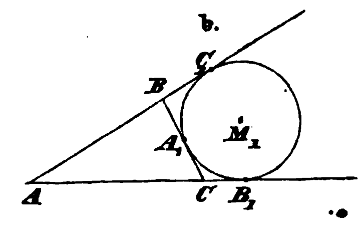


Fig. 123.

Radien des umgeschriebenen Kreises geteilt, und diese sind entweder nur innere oder teils innere teils äufsere Teilstrahlen der Winkel (§. 7, 7), je nachdem der Mittelpunkt des Kreises innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks liegt; im letzteren Fall sind einzelne Teilwinkel negativ zu nehmen. Nun ist:

$$\beta' + \gamma' = \alpha$$
$$\gamma' + \alpha' = \beta$$
$$\alpha' + \beta' = \gamma$$
$$2 \cdot (\alpha' + \beta' + \gamma') = \alpha + \beta + \gamma = 2R,$$

also:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = R;$$

somit:

$$\alpha' = R - \alpha$$
$$\beta' = R - \beta$$
$$\gamma' = R - \gamma, \text{ d. h.:}$$

Jeder Teil eines Dreieckswinkels zwischen dem Radius des umgeschriebenen Kreises und einer Seite ist gleich der halben Summe der Winkel des Dreiecks (R) weniger dem der betreffenden Seite gegenüberliegenden Winkel.

des berührenden Kreises geteilt, und diese sind entweder nur innere oder teils innere teils äufsere Teilpunkte der Seitenstrecken (§. 6, 5), je nachdem der Mittelpunkt des Kreises innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks liegt; im letzteren Fall sind einzelne Teilstrecken negativ zu nehmen (vgl. Zus.). Nun ist:

$$s_2 + s_3 = a$$
$$s_3 + s_1 = b$$
$$s_1 + s_2 = c$$
$$2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3) = a + b + c = 2s^{*)},$$

also:

$$s_1 + s_2 + s_3 = s;$$

somit:

$$s_1 = s - a$$
$$s_2 = s - b$$
$$s_3 = s - c, \text{ d. h.:}$$

Jeder Teil einer Dreieckseite zwischen dem Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises und einem Eck ist gleich der halben Summe der Seiten des Dreiecks weniger der dem betreffenden Eck gegenüberliegenden Seite.

Zusätze. 1) Jeder der angeschriebenen Kreise eines Dreiseits berührt eine Seitenstrecke selbst, die beiden anderen in ihrer Verlängerung. Dann gilt etwa für den Kreis M_1 die Beziehung:

$$BC_1 = BA_1 \text{ und } CB_1 = CA_1,$$

und

$$AB_1 = AC_1,$$

also:

$$2 \cdot AB_1 = 2 \cdot AC_1 = AB_1 + AC_1 = AC + CB_1 + AB + BC_1 = AC + AB + BC = 2s,$$

somit:

$$AB_1 = AC_1 = s,$$

was sich leicht in Worte fassen läfst.

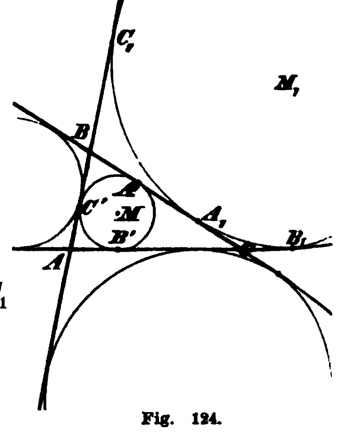


Fig. 124.

*) Wir werden künftig die Summe der Seiten oder den Umfang eines Dreiecks durch u oder durch $2s$ bezeichnen, so dafs s den halben Umfang bedeutet.

2) Hieraus folgt, dafs:

$$BA_1 = BC_1 = s - c = s_3 \text{ und } CA_1 = CB_1 = s - b = s_2.$$

Vergleicht man diese Werte mit den in (3′) gefundenen, so folgt, dafs:

$$BA_1 = CA', \text{ d. h.:}$$

Jeder Ankreis eines Dreiecks teilt die nicht in ihrer Verlängerung berührte Seitenstrecke in eben solche (nur vertauscht liegende) Abschnitte wie der Inkreis.

3) Weiter folgt sofort:

$$B_1B' = B_1A - B'A = s - (s - a) = a, \text{ ebenso } C_1C' = a, \text{ d. h.:}$$

Wird zu einem Dreieck der Inkreis und ein Ankreis gezeichnet, so ist der Abstand der Berührungspunkte auf einer Seite, zu welcher die Kreise nicht beiderseitig liegen, gleich derjenigen Seitenstrecke, zu welcher die Kreise beiderseitig liegen.

4) Wir fügen noch hinzu, dafs:

$$A'A_1 = b - c.$$

Zwölftes Kapitel.

Viereck und Vierseit.

§. 38. Das axige Viereck und Vierseit.

(Antiparallelogramm und Deltoid.)

1. Die Entstehung eines Vierecks wurde §. 17, 4 gegeben. Je nachdem die über ein Eck hinaus verlängerten Seitenstrecken in die Fläche des Vierecks nicht eintreten oder eintreten, heifst ein Eck ein ausspringendes oder ein einspringendes.

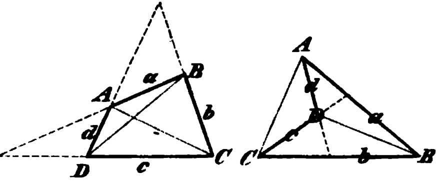


Fig. 125.

Zwei nicht auf einer Seite liegende Ecken heifsen Gegenecken, A, C, ihre Verbindungsgerade Diagonale; zwei nicht an einem Eck zusammenstofsende Seiten heifsen Gegenseiten, a, c, ihr Schnittpunkt Nebeneck.

Nach der Entstehungsart des Vierecks entweder aus vier gegebenen Punkten, von welchen keine drei in einer Geraden liegen, oder aus vier Geraden, von welchen keine drei durch einen Punkt gehen, unterscheidet man Viereck und Vierseit.

Ein Viereck mit einem Paare paralleler Seiten heifst Trapez; diese Figur wurde schon betrachtet in §. 16, 8 und 9.

2. Zwei Paare symmetrischer Punkte A und B, C und D be-

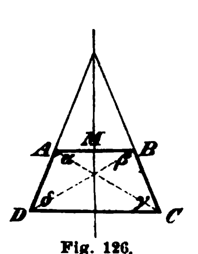


Fig. 126.

stimmen ein axiges Viereck. In diesem sind die Verbindungsstrecken nicht symmetrischer Punkte (zwei Gegenseiten und zwei Diagonalen) und die an symmetrischen Punkten liegenden Winkel paarweis gleich; die Verbindungsstrecken symmetrischer Punkte sind parallel; die gleichen Seiten sowohl als die Diagonalen schneiden einander auf der Axe.

3. Ein Viereck, in welchem zwei an einer Seite liegende Winkel einander gleich sind und ebenso die an der Gegenseite, heifst ein Antiparallelogramm.

Die genannten Seiten sind parallel; denn wenn in $ABCD$ angenommen ist: $\sphericalangle\, \alpha = \beta$ und

$$\sphericalangle\, \delta = \gamma, \text{ so ist:}$$

$$\alpha + \delta + \beta + \gamma = 2 \cdot (\alpha + \delta) = 4R,$$

also:

$$\alpha + \delta = 2R, \text{ d. h.: } AB \parallel CD.$$

4. In Bezug auf die Mittelnormale zu einer dieser parallelen Seiten, etwa zu AB ist:

$$MA \wedge MB,$$

2′. Zwei Paare symmetrischer Geraden a und b, c und d be-

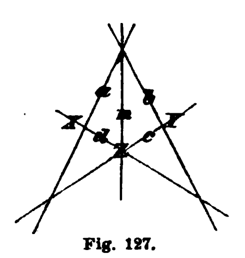


Fig. 127.

stimmen ein axiges Vierseit. In diesem sind die Winkel nicht symmetrischer Geraden (zwei Winkel an Gegenecken und die von Gegenseiten gebildeten Winkel) und die auf symmetrischen Geraden liegenden Seitenstrecken paarweis gleich; die zwei Verbindungsgeraden der Scheitel gleicher Winkel sind normal zur Axe.

3′. Ein Vierseit, in welchem zwei an einem Eck zusammentreffende Seiten einander gleich sind und ebenso die an dem Gegeneck, heifst ein Deltoid.

4′. Wenn im Vierseit $abcd$ angenommen ist $a = b$ und $c = d$, so ist in Bezug auf die Halbierende m des $\sphericalangle\, ab$: $X \wedge Y$, so-

und da $\sphericalangle \alpha = \beta$, so ist auch

$$AD \wedge BC;$$

da ferner CD sich selbst symmetrisch entspricht (§. 11, 4b und §. 10, 2'), so gilt auch für die Schnittpunkte $C \wedge D$, d. h.:

Ein Antiparallelogramm ist axig in Bezug auf die Mittelnormale zu einer seiner parallelen Seiten.

mit ist m Mittelnormale zu XY, also liegt, wegen $c = d$, auch Z auf ihr, somit ist $c \wedge d$, d. h.:

Ein Deltoid ist axig in Bezug auf die Halbierende eines seiner von gleichen Seitenstrecken gebildeten Winkel.

5. Hieraus folgt sofort die Giltigkeit der in 2 und 2' gegebenen Aussagen auch für das Antiparallelogramm, beziehungsweise Deltoid.

6. Ferner heben wir noch hervor:

In einem Antiparallelogramm ist die Mittelnormale zu einer der parallelen Seiten auch solche für deren gegenüberliegende Seite.

In einem Deltoid ist die Halbierende des Winkels zwischen einem Paare gleicher Seiten auch Halbierende des gegenüberliegenden Winkels.

Vgl. hiermit die Sätze vom gleichschenkeligen Dreieck und Dreiseit in §. 11, C.

7. Zur Übung in der Beweisführung mögen die Sätze dienen:

a) Ein Viereck, in welchem zwei Gegenseiten gleich sind und ebenso die Winkel an einer dritten Seite, ist ein Antiparallelogramm.

b) Ein Viereck, in welchem zwei Gegenseiten einander gleich sind und ebenso die Diagonalen, ist ein Antiparallelogramm.

a') Ein Vierseit, in welchem zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind und ebenso die Seiten an einem dritten Eck, ist ein Deltoid.

b') Ein Vierseit, in welchem zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind und die Diagonalen zu einander normal, ist ein Deltoid.

§. 39. Das centrische Viereck oder Vierseit.

(Parallelogramm.)

1. Zwei Paare zu demselben Centrum diametraler Punkte (Geraden) bestimmen ein centrisches Viereck (Vierseit), dessen Gegenseiten parallel sind (§. 14, 4').

2. Ein Viereck (Vierseit) mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten heifst Parallelogramm, wie z. B. $ABCD$ (Fig. 128). Das centrische Viereck ist somit ein Parallelogramm. — Nach §. 15, 3c gilt dann:

In einem Parallelogramm ist die Summe zweier benachbarten Winkel $= 2R$.

3. Wird zuerst nur $AB \parallel CD$ angenommen, so sind beide diametral in Bezug auf die Mitte M von AC (§. 14, 5'); werden nun erst $AD \parallel BC$ zugefügt gedacht, so sind die durch diese Parallelen mit den vorigen hervorgerufenen Schnittpunkte D und B ebenfalls symmetrisch zu M (§. 16, 1'); d. h.:

Das Parallelogramm ist eine centrische Figur.

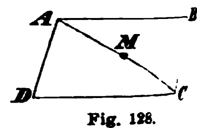


Fig. 128.

Zusatz. Hieraus folgt unmittelbar:

a) *Im Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich*, ebenso *die an Gegenecken liegenden Winkel.*

b) *Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.*

c) *Jede durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms gehende und von Gegenseiten (oder ihren Verlängerungen) begrenzte Gerade wird in jenem Punkte halbiert.*

d) *Die Mittelparallele zweier Gegenseiten geht durch den Schnittpunkt der Diagonalen.*

4. Sofort ergeben sich auch die Umkehrungen der vorstehenden Sätze, nämlich:

a) *Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zweimal zwei Gegenseiten gleich sind.*

Denn wenn $AB = DC$ und $AD = BC$ sein soll und vorerst nur $\triangle ABC$ gezeichnet ist, so ist hierdurch die Lage des Punktes D gegen A und C eindeutig bestimmt, da er anderseits als B von AC liegen mufs (§. 12, 6c); auf dieselbe Weise ist aber auch der mit B diametrale Punkt in Bezug auf das Centrum M zu AC bestimmt.

b) *Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zweimal zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind.*

Denn wenn $\sphericalangle A = C,\ \sphericalangle B = D,$

so ist $\sphericalangle A + B = C + D = 2R$ (§. 17, 6)

und $\sphericalangle A + D = B + C = 2R,$

also $AD \parallel BC$ und $AB \parallel CD.$

c) *Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn einmal zwei Gegenseiten parallel und gleich sind* (§. 16, 7b).

d) *Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn seine Diagonalen einander halbieren.*

Denn das Viereck ist centrisch (1).

§. 40. Das axige und centrische Viereck oder Vierseit.
(Rechteck, Raute, Quadrat.)

1. Ein Parallelogramm, in welchem zwei an einer Seite liegende Winkel einander gleich sind, heifst ein Rechteck.

1′. Ein Parallelogramm, in welchem zwei an einem Eck liegende Seiten einander gleich sind, heifst eine Raute (ein Rhombus).

Rechteck und Raute sind besondere Formen des Antiparallelogramms, bzw. Deltoids (vgl. §. 38, 3 und 3′).

2. Aus 1 und aus §. 39, 2 und 3 Zusatz a folgt:

a) *In einem Rechteck sind alle Winkel von gleicher Gröfse, jeder ist ein Rechter* —

und umgekehrt:

b) *Ein Viereck mit vier gleichen Winkeln ist ein Rechteck;* denn in ihm sind zunächst zwei Paare gegenüberliegender Winkel gleich, also (§. 39, 4b) ist es ein Parallelogramm, und auch zwei benachbarte sind gleich, also (1) ist es ein Rechteck.

2′. Aus 1′ und aus §. 39, 3 Zusatz a folgt:

a′) *In einer Raute sind alle Seiten von gleicher Gröfse* —

und umgekehrt:

b′) *Ein Viereck mit vier gleichen Seiten ist eine Raute;* denn in ihm sind zunächst zwei Paare gegenüberliegender Seiten gleich, also (§. 39, 4a) ist es ein Parallelogramm, und auch zwei benachbarte sind gleich, also (1′) ist es eine Raute.

3. Da das Rechteck in doppelter Weise als Antiparallelogramm aufgefafst werden kann, so folgt aus §. 38, 6:

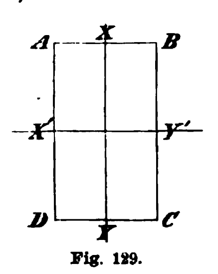


Fig. 129.

a) *In einem Rechteck ist die Mittelnormale zu jeder Seite auch solche zur Gegenseite.*

b) *Das Rechteck ist centrisch und axig in Bezug auf zwei zu einander normale Axen.*

3′. Da die Raute in doppelter Weise als Deltoid aufgefafst werden kann, so folgt aus §. 38, 6:

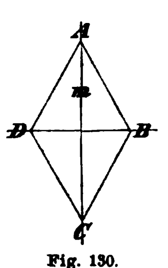


Fig. 130.

a′) *In einer Raute halbiert jede Diagonale die Winkel zweier Gegenecken.*

b′) *Die Raute ist centrisch und axig in Bezug auf zwei zu einander normale Axen.*

Zusatz. Hieraus folgt unmittelbar:

Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Die Diagonalen einer Raute sind zu einander normal.

4. Sofort ergeben sich auch die Umkehrungen der vorstehenden Sätze, z. B.:

a) *Ein Parallelogramm, in welchem die Mittelnormale zu einer Seite auch solche zur Gegenseite ist, ist ein Rechteck.*

a′) *Ein Parallelogramm, in welchem eine Diagonale die Winkel an zwei Gegenecken halbiert, ist eine Raute.*

Ferner ergiebt sich mit Rücksicht auf §. 39, 3 Zusatz b:

b) *Ein Parallelogramm mit zwei einander gleichen Diagonalen ist ein Rechteck,*

b′) *Ein Parallelogramm mit zwei zu einander normalen Diagonalen ist eine Raute,*

woraus sich unmittelbar folgern läfst:

c) *Ein Viereck mit zwei einander halbierenden und gleich grofsen Diagonalen ist ein Rechteck.*

c′) *Ein Viereck mit zwei einander halbierenden und normalen Diagonalen ist eine Raute.*

5. Ein Parallelogramm, das zugleich Rechteck und Raute ist, heifst ein Quadrat.

Es kann also erklärt werden als a) ein Rechteck, in welchem zwei anstofsende Seiten gleich,

b) eine Raute, in welcher ein Winkel ein Rechter,

c) ein Parallelogramm, in welchem zwei anstofsende Seiten gleich und normal zu einander,

d) ein Viereck, in welchem zwei anstofsende Seiten zu einander normal und alle Seiten einander gleich sind.

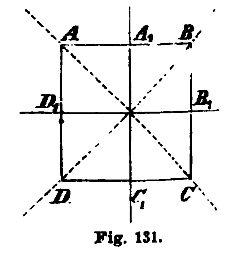


Fig. 131.

Das Quadrat ist centrisch in Bezug auf den Schnittpunkt seiner Diagonalen, axig in Bezug auf die Diagonalen und in Bezug auf die Mittelparallelen seiner Seiten: es ist also centrisch und vieraxig.

§. 41. Das Sehnenviereck und Tangentenvierseit.

1. Wird einem Kreise ein Viereck $ABCD$ eingeschrieben, und

1′. Wird einem Kreise ein Vierseit $ABCD$ umgeschrieben, so ist:

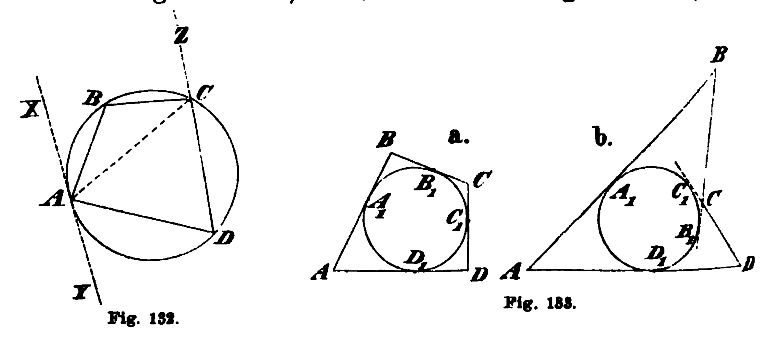


Fig. 132.

Fig. 133.

wird die Tangente in A, sowie die Diagonale AC gezogen, so ist:

$$\sphericalangle DCA = DAY,$$

und

$$\sphericalangle ACB = XAB$$

somit:

$$\sphericalangle DCA + ACB + BAD = XAB + BAD + DAY = 2R$$

oder:

$$\sphericalangle BCD + DAB = 2R;$$

d. h.:

In einem Sehnenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel gleich zwei Rechten.

Vergl. §. 34, 5 Zusatz 2.

Zusatz 1. Ein einem Kreise eingeschriebenes Parallelogramm mufs ein Rechteck sein.

Anmerkung. Wenn oben (Fig. 132)

$$\sphericalangle A + C = 2R,$$

so ist auch:

$$\sphericalangle A = BCZ.$$

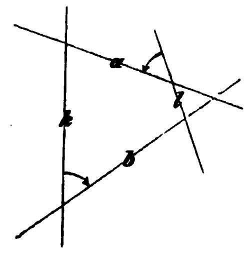


Fig. 134.

Diese Lage zeichnen wir aus durch folgende Definition:

Eine Gerade a heifst mit einer andern b ***antiparallel*** *zu zwei Geraden l und k, wenn* $\sphericalangle$ *la gegenwendig gleich dem* $\sphericalangle$ *kb.*

2. Als Umkehrung von 1 folgt:

Um ein Viereck, in welchem die

$$AA_1 = AD_1$$
$$A_1B = B_1B$$
$$CC_1 = CB_1$$
$$C_1D = D_1D$$

somit:

$$AA_1 + A_1B + CC_1 + C_1D = AD_1 + D_1D + CB_1 + B_1B$$

oder:

$$AB + CD = AD + CB;$$

d. h.:

In einem Tangentenvierseit ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen.

Zusatz 1′. Ein einem Kreise umgeschriebenes Parallelogramm mufs eine Raute sein.

Zusatz 2′. Ist das Vierseit $ABCD$ dem Kreise angeschrieben (vgl. §. 37, 1′), so ist:

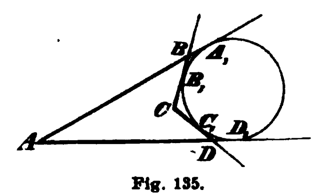


Fig. 135.

$$\begin{aligned} AB - CD &= AA_1 - BA_1 - CC_1 - C_1D \\ &= AD_1 - BB_1 - B_1C - DD_1 \\ &= AD_1 - DD_1 - (BB_1 + B_1C) \\ &= AD - BC; \end{aligned}$$

d. h.:

Bei einem dem Kreise angeschriebenen Vierseit ist die Differenz zweier Gegenseiten gleich der der beiden übrigen.

2′. Als Umkehrung von 1′ folgt:

In ein Vierseit, in welchem die

Summe zweier gegenüberliegenden Winkel gleich zwei Rechten ist, läfst sich ein Kreis beschreiben — denn wenn

$$\sphericalangle BCD + DAB = 2R$$

und wenn etwa der um DAB beschriebene Kreis (§. 37, 2) die BC nicht in C, sondern in E schneiden würde, so wäre:

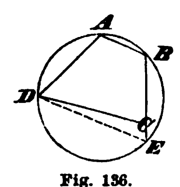


Fig. 136.

$$\sphericalangle BED + DAB = 2R$$

(1), also müfste:

$$\sphericalangle BED = BCD$$

sein, was unmöglich ist (§. 17, 2).

Zusatz. Um jedes Antiparallelogramm läfst sich ein Kreis beschreiben.

3. Aus §. 40, 3 Zusatz folgt leicht:

Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Rechteckes ist der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises.

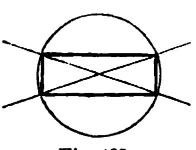


Fig. 138.

Summe je zweier Gegenseiten gleichen Wert hat, läfst sich ein Kreis beschreiben — denn wenn

$$AB + CD = BC + DA,$$

und wenn etwa der die Seiten AB, BC, CD berührende Kreis (§. 37, 2′) nicht AD, sondern AE als Tangente hätte, so wäre:

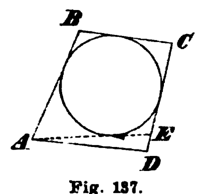


Fig. 137.

$$AB + CE = BC + EA$$

(1′), also müfste:

$$CD - CE = DA - EA$$

oder $ED = DA - EA$ sein, was unmöglich ist (§. 30, 4).

Zusatz. In jedes Deltoid läfst sich ein Kreis beschreiben.

3′. Es ergiebt sich aus §. 40, 3′:

Der Schnittpunkt der Diagonalen einer Raute ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

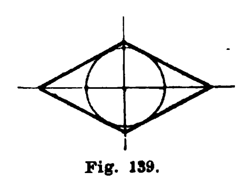


Fig. 139.

4. Es ist nur die Vereinigung von (3) und (3′), wenn wir behaupten (§. 39, 5):

Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Quadrates ist der Mittelpunkt des ein- und umgeschriebenen Kreises. Der Radius des eingeschriebenen Kreises ist gleich der halben Seite des Quadrates (Fig. 140).

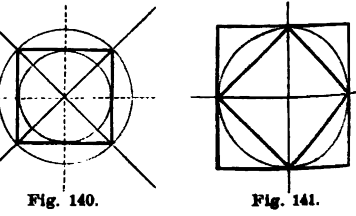


Fig. 140. Fig. 141.

5. Und umgekehrt (Fig. 141):

Die Eckpunkte zweier zu einander normalen Durchmesser bestimmen ein dem Kreise ein- und umgeschriebenes Quadrat — was aus der Symmetrie der Figur in Bezug auf beide Durchmesser folgt.

Dreizehntes Kapitel.

Das Vieleck und Vielseit.

§. 42. Das axige und das centrische Vieleck und Vielseit.

1. Beliebig viele Paare zu derselben Geraden symmetrischer Punkte (Geraden) wie A und A_1, B

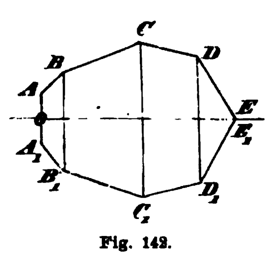


Fig. 142.

und B_1, C und C_1, ... bestimmen ein axiges Vieleck (Vielseit) $ABC\,..\,C_1B_1A_1$; die Seiten desselben sind paarweise gleich und bilden beiderseits der Axe gegenwendig gleiche Winkel (§. 12, 2 und 2′):

Ein axiges Vieleck wird durch die Axe in zwei gegenwendig kongruente Vielecke zerlegt.

1′. Beliebig viele Paare zu demselben Punkte symmetrischer Geraden (Punkte) wie a und a_1, b

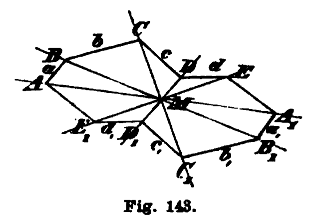


Fig. 143.

und b_1, c und c_1, ... bestimmen ein centrisches Vielseit (Vieleck) $a\,b\,c\,...\,a_1b_1c_1\,...$; die Seiten desselben sind paarweise gleich und bilden beiderseits von einer Centralen gleichwendig gleiche Winkel (§. 16, 2):

Ein centrisches Vielseit wird durch eine Centrale in zwei gleichwendig kongruente Vielseite zerlegt.

Die Eckenzahl des entstehenden axigen Vieleckes ist ungerade

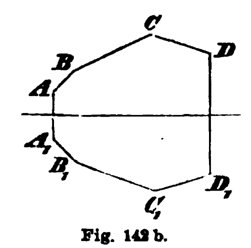


Fig. 142 b.

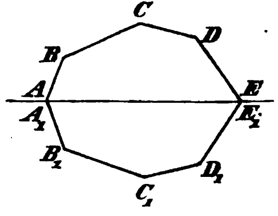


Fig. 142 c.

(Fig. 142) oder gerade (Fig. 142b und 142c), d. h. es entsteht ein unpaares oder paares axiges Vieleck, je nachdem einmal, bez. keinmal

oder zweimal zwei symmetrische Punkte in einen, nämlich in einen Punkt der Axe, zusammenfallen.

2. Umgekehrt gilt auch: *Wird an einer Seitenstrecke eines Vieleckes nach aufsen ein ihm kongruentes gegenwendig angetragen, so ist die Gesamtfigur ein axiges Vieleck, für welches die Seitenstrecke Symmetrieaxe ist.*

Denn wenn (Fig. 142c)

$$ABCDE \cong A_1B_1C_1D_1E_1,$$

so ist

$$\sphericalangle A = A_1, AB = A_1B_1,$$

folglich

$$AB \wedge A_1B_1;$$

da ferner

$$\sphericalangle B = B_1 \text{ und } BC = B_1C_1,$$

so ist auch

$$BC \wedge B_1C_1 \text{ u. s. w.}$$

2'. Umgekehrt: *Wird an einer Seitenstrecke eines Vieleckes nach aufsen ein ihm kongruentes gleichwendig angetragen, so ist die Gesamtfigur ein centrisches Vieleck, für welches die Mitte der Seitenstrecke Centrum ist.*

Denn wenn (Fig. 143)

$$ABC\ldots A_1 \cong A_1B_1C_1\ldots A$$

und wenn dabei

$$AM = MA_1,$$

so ist

$$\sphericalangle MAB = MA_1B_1, \; AB = A_1B_1,$$

folglich

$$AB \,/\!/\!\!/\, A_1B_1;$$

da ferner

$$\sphericalangle B = B_1 \text{ und } BC = B_1C_1,$$

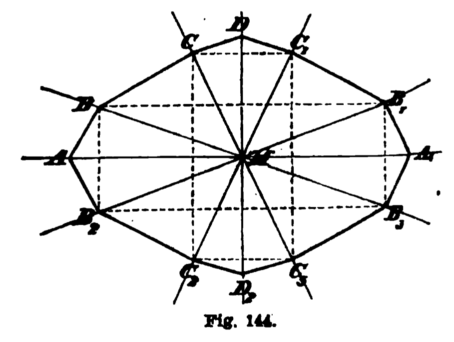
so ist auch

$$BC \,/\!/\!\!/\, B_1C_1 \text{ u. s. w.}$$

3. Wird als das erste Vieleck jetzt ein solches gewählt, wie $ABCDC_1B_1A_1$, welches axig ist in Bezug auf die zu AA_1 Mittelnormale MD, so kann das zweite ihm kongruente jenseits der Seitenstrecke AA_1 aufgefafst werden sowohl als gleichwendig an A_1A angelegt, indem den Ecken $ABCD\ldots$ der Reihe nach

$$A_1B_3C_3D_2\ldots$$

entsprechen, — als auch als gegenwendig an AA_1 angelegt, indem den Ecken $ABCD\ldots$ der Reihe nach $AB_2C_2D_2\ldots$ entsprechen (vgl. die Bemerkung zu §. 14, 3); hiernach ergiebt sich aus 2 und 2':


Fig. 144.

Wird einem axigen Vieleck, in welchem eine Seite sich selbst entspricht (normal zur Axe ist), ein kongruentes Vieleck an diese Seitenstrecke angelegt, so entsteht als Gesamtfigur ein Vieleck, welches centrisch ist in Bezug auf die Mitte jener Seitenstrecke und axig in Bezug auf jene Seite sowohl wie auf ihre Mittelnormale.

4. Die gegenseitige Abhängigkeit der letzteren Eigenschaften wird klar durch folgende Sätze:

Ein Vieleck, welches axig ist in Bezug auf zwei zu einander normale Axen, ist zugleich centrisch in Bezug auf deren Schnittpunkt als Centrum.

Wenn nämlich (Fig. 144) in Bezug auf die Axe AA_1 sowohl als auf DD_2 Symmetrie stattfindet, so ist

$$MB \wedge MB_1,\ MB_1 \wedge MB_3,\ MB_3 \wedge MB_2,$$

also ist

$$MB = MB_1 = MB_3 = MB_2,$$

somit B |/| B_3, u. s. w.

Ein Vieleck, welches zugleich axig und centrisch ist, ist auch axig in Bezug auf eine zweite zur ersten normale und durch das Centrum gehende Axe.

Wenn nämlich (Fig. 144) AA_1 Axe und M Centrum des Vielecks ist, so ist

$$MB = MB_2 \text{ und } MB_2 = MB_1,$$

also

$$MB_1 = MB,$$

ferner ist

$$\sphericalangle BMD = D_2MB_2 = B_1MD,$$

somit

$$MB_1 \wedge MB$$

für Axe DD_2, u. s. w.

5. Gehen durch einen Punkt 2, 3, 4, ... n Gerade, deren Halbstrahlen mit einander gleiche Winkel bilden (wird also ein sog. regelmäfsiger Zweistrahl, Dreistrahl, ..., Vielstrahl gezeichnet) und werden zu diesen Geraden als Axen und

zu einem nicht auf einer Axe liegenden Punkte alle mit einander symmetrischen Punkte genommen,

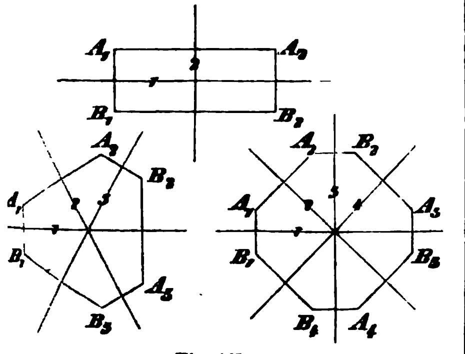


Fig. 145.

zu einer nicht durch den Scheitel gehenden Geraden alle mit einander symmetrischen Geraden genommen,

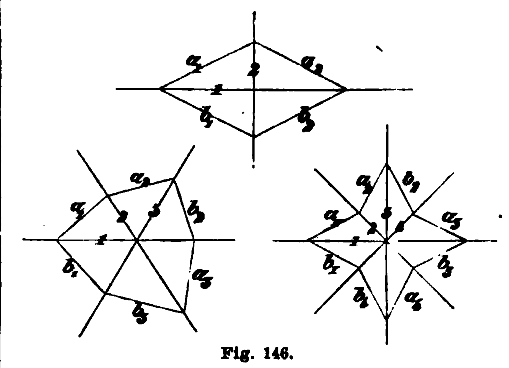


Fig. 146.

so bestimmen diese Punkte, bzw. Geraden die Ecken bzw. Seiten eines 2, 3, 4, ... n-axigen 4, 6, 8, ... $2n$-eckes (-seites).

Wenn man nämlich von $A_1 \wedge B_1$, bzw. $a_1 \wedge b_1$ in Bezug auf 1 als Axe ausgeht, so liegen wegen Gleichheit der Winkel des Strahlenbüschels die folgenden Axen beiderseits von Axe 1 in Bezug auf diese symmetrisch, woraus sich dann die symmetrische Lage der folgenden Punkte bzw. Strecken für Axe 1 ergiebt. Was von Axe 1 gilt, gilt ebenso für alle anderen Axen.

Der regelmäſsige Zweistrahl, Vierstrahl, Achtstrahl, ... wird konstruiert aus dem rechten Winkel und durch fortgesetzte Halbierung desselben, der regelmäſsige Dreistrahl mittelst eines gleichseitigen Dreiecks; durch Halbieren der Winkel desselben ergiebt sich der Sechsstrahl, Zwölfstrahl u. s. w. Es lassen sich hierbei mit Vorteil das gleichschenkelige Winkelscheit und das die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks darstellende gebrauchen.

6. Von den so entstandenen Figuren gelten die Sätze:

Im n-axigen 2n-eck sind alle Winkel einander gleich und jede Seite ist gleich der zweitfolgenden;

Im n-axigen 2n-seit sind alle Seiten einander gleich und jeder Winkel ist gleich dem zweitfolgenden;

denn es ist:

$\sphericalangle A_1 = A_2$ (Strecke $a_1 = a_2$) als symmetrisch zur Axe 2
$\sphericalangle A_2 = B_2$ („ $a_2 = b_2$) „ „ „ „ 3 etc.

und es ist:

$A_1 B_1 = A_2 B_2$ ($\sphericalangle a_1 b_1 = a_2 b_2$) „ „ „ „ 2
$A_1 A_2 = A_3 B_2$ ($\sphericalangle a_1 a_2 = a_3 b_2$) „ „ „ „ 3 etc.

In diesen Figuren beträgt der Winkel einer Seite mit der zweitfolgenden $\frac{4R}{n}$. Denn die Summe je eines der n Paare von zwei auf einander folgenden Auſsenwinkeln ist nach obigem stets die gleiche $= \frac{4R}{n}$ (§. 17, 5) und stellt zugleich den Winkel je einer Seite mit der zweitfolgenden dar (§. 17, 1).

7. Mit dem Hinweis auf §. 12, 3 und 3′ ergiebt sich umgekehrt:

Ein gleichwinkeliges 2n-eck, in welchem jede Seitenstrecke gleich der zweitfolgenden, ist n-axig in Bezug auf die Mittelnormalen der Seiten.

Ein gleichseitiges 2n-seit, in welchem jeder Winkel gleich dem zweitfolgenden, ist n-axig in Bezug auf die Halbierenden der Winkel.

Daſs diese Axen einander in einem Punkte schneiden, folgt daraus, daſs je zwei derselben zu einer dazwischen liegenden symmetrisch sind. Der Winkel einer Axe mit der zweitfolgenden ist dann derselbe, wie der einer Seite mit der zweitfolgenden (§. 18, 4) $= \frac{4R}{n}$ (vgl. 6); somit ist der Winkel je zweier benachbarten Axen $= \frac{4R}{2n} = \frac{2R}{n}$.

§. 43. Das regelmäfsige Vieleck.

1. Wird bei der in §. 42, 5 angegebenen Entstehung des n-axigen $2n$-eckes und $2n$-seites der zuerst anzunehmende Punkt (A_1) als ein sich selbst symmetrisch entsprechender auf die Axe verlegt (Fig. 147), bzw. die Gerade (a_1) als eine sich selbst symmetrisch entsprechende, also zu einer Axe normale angenommen (Fig. 148), so

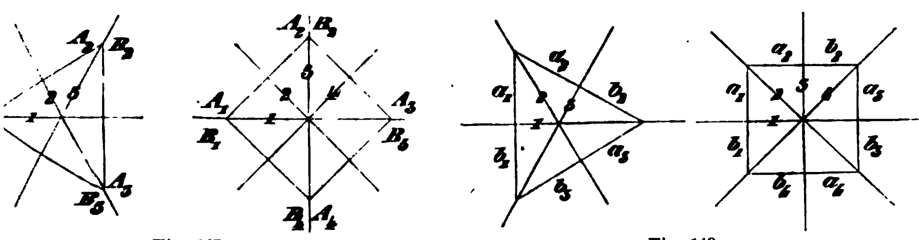


Fig. 147. Fig. 148.

verschwindet die eine Hälfte der Punkte und Geraden und es entsteht eine besondere Art von 3, 4,... n-eck, bzw. 3, 4,... n-seit, nämlich ein 3, 4,... n-axiges oder ein sog. regelmäfsiges.

Unter einem regelmäfsigen Vieleck (Vielseit) versteht man nämlich ein solches, in welchem alle Winkel einander gleich und ebenso alle Seiten einander gleich sind.

2. Von einem solchen ist ersichtlich:

Ein regelmäfsiges n-eck ist n-axig in Bezug auf seine Winkelhalbierenden und seine Mittelnormalen der Seiten.

Denn an diese Axen schliefsen sich die übrigen Stücke an gemäfs §. 12, 3 und 3'.

3. Wir unterscheiden nun die regelmäfsigen Vielecke von gerader Seitenzahl (paare Vielecke) von denen mit ungerader Seitenzahl (unpaare Vielecke). In einem der ersteren Art mufs nämlich eine Winkelhalbierende durch das Gegeneck gehen, da nach Annahme beiderseits derselben gleichviel gleich grofse Seiten und Winkel liegen; aus demselben Grunde mufs die Mittelnormale einer Seite auch solche für deren Gegenseite sein. In einem unpaaren regelmäfsigen Vieleck aber schliefsen sich an eine winkelhalbierende Symmetrieaxe beiderseits gleichviel gleiche Seiten und Winkel an bis auf eine unpaar übrig bleibende Seite, die sich selbst entsprechen, d. i. durch die Axe normal halbiert werden mufs; d. h.:

In einem regelmäfsigen Vieleck von gerader Seitenzahl ist jede Verbindungsgerade der Mitten von Gegenseiten, sowie auch die von Gegenecken Symmetrieaxe; in einem von ungerader Seitenzahl ist jede Verbindungsgerade eines Eckes mit der Mitte der Gegenseite Symmetrieaxe.

4. Da die $2n$ Axen eines regelmäfsigen $2n$-eckes durch das Centrum gehen und zwei benachbarte einen Winkel

$$= \frac{2R}{2n} = \frac{R}{n}$$

bilden, so ist der von n solchen auf einander folgenden $= R$, d. h.:

Von den $2n$ Symmetrieaxen eines regelmäfsigen $2n$-eckes sind jede erste und $(n+1)^{te}$ zu einander normal.

Somit liegt hier der in §. 42, 3 betrachtete Fall zweier normalen Symmetrieaxen vor und es folgt:

Ein regelmäfsiges $2n$-eck ist centrisch in Bezug auf die Mitte der Verbindungsstrecke α) *zweier Gegenecken* oder β) *der Mitten zweier Gegenseiten.*

§. 44. Das axige Sehnenvieleck und Tangentenvielseit.

1. Von den Vielecken und Vielseiten, um und in welche ein Kreis beschrieben werden kann, fassen wir zunächst die der vorangehenden §§. ins Auge. Für die in §. 42, 5 erhaltenen Figuren ergiebt sich:

Um das n-axige $2n$-eck läfst sich ein Kreis beschreiben.

Denn der Schnittpunkt der Symmetrieaxen ist auch Schnittpunkt der Mittelnormalen der Ecken, deren jedes mit dem folgenden symmetrisch liegt, und hat somit von allen Ecken den gleichen Abstand.

In das n-axige $2n$-seit läfst sich ein Kreis beschreiben.

Denn der Schnittpunkt der Symmetrieaxen ist auch Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Seiten, deren jede mit der folgenden symmetrisch liegt, und hat somit von allen Seiten den gleichen Abstand.

2. Geht die Konstruktion des Kreises voran, so folgt umgekehrt:

Ein gleichwinkeliges einem Kreise einbeschriebenes $2n$-eck ist n-axig in Bezug auf die Durchmesser zu den Mitten der Seiten.

Es folgt nämlich die Gleichheit zweier beiderseits an eine Seite anstofsenden Seiten aus den symmetrischen Richtungen derselben in Bezug auf die Mittelnormale der ersteren Seite und aus der symmetrischen Lage der Kreisteile,

Ein gleichseitiges einem Kreise umbeschriebenes $2n$-seit ist n-axig in Bezug auf die Durchmesser zu den Ecken.

Es folgt nämlich die Gleichheit zweier beiderseits auf einen Winkel folgenden Winkel aus der symmetrischen Lage der Scheitelpunkte der letzteren und der Tangenten von diesen an die symmetrisch liegenden Kreisteile,

so dafs dann §. 42, 7 zur Geltung kommt.

3. Da die regelmäfsigen Vielecke specielle Fälle der n-axigen Vielecke und Vielseite sind, so folgt:

Um und in ein regelmäfsiges Vieleck läfst sich ein Kreis beschreiben. Der gemeinsame Mittelpunkt beider Kreise ist der Schnittpunkt der Mittelnormalen oder der Winkelhalbierenden der Seiten.

Der Radius des umbeschriebenen Kreises heifst der grofse Ra-

dius, der des einbeschriebenen der kleine Radius des regelmäfsigen Vielecks.

4. Lassen wir wieder die Konstruktion des Kreises vorangehen, so ergiebt sich:

Ein gleichseitiges einbeschriebenes Vieleck ist regelmäfsig; denn die Winkel sind alle einander gleich, da sie zu gleichen Bögen, nämlich zu $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ des Umfangs beim n-eck, gehören.	*Ein gleichwinkeliges umbeschriebenes Vielseit ist regelmäfsig;* denn die Sehnen und Bögen der Tangentenwinkel sind einander gleich (§. 34, 2 b) und bilden mit den Tangenten kongruente Dreiecke, woraus die Gleichheit der Seiten folgt.

5. Denkt man den Vollwinkel am Centrum eines Kreises in n gleiche Teile geteilt (d. i. den regelmäfsigen n-strahl konstruiert), so gehören zu letzteren gleiche Sehnen; werden in sämtlichen Teilpunkten des Kreises die Tangenten gezogen, so bilden je zwei benachbarte Tangenten gleiche Winkel, da ihre Berührungsradien gleiche Winkel bilden (§. 34, 2 b), und die Tangentenstrecken sind gleich grofs. Wir folgern:

Teilt man den Vollwinkel am Centrum eines Kreises in n gleiche Teile, so bestimmen die Sehnen und Tangenten der Teilpunkte des Kreises ein eingeschriebenes und ein umgeschriebenes regelmäfsiges Vieleck.

Zusätze. — a) Das regelmäfsige Viereck wird bestimmt durch zwei zu einander normale Durchmesser; das regelmäfsige Achteck, Sechzehneck, ... ergiebt sich daraus durch wiederholtes Halbieren der Centriwinkel.

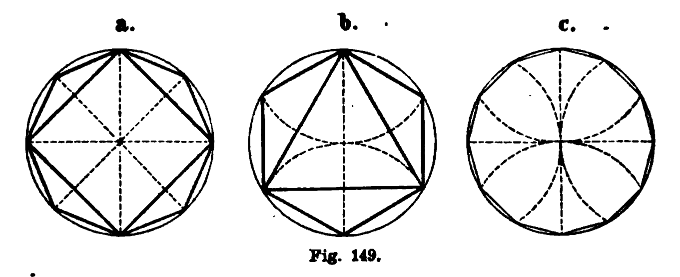


Fig. 149.

b) Das regelmäfsige Sechseck ergiebt sich durch sechsmaliges Eintragen des Radius als Sehne. Denn das Dreieck aus Sehne und Radien nach deren Endpunkten hat einen Centriwinkel (§. 17, 3 d)

$$= \frac{2R}{3} = \frac{4R}{6}$$

= dem sechsten Teile des Vollwinkels.

c) Das regelmäfsige Zwölfeck ergiebt sich beim Halbieren der Centriwinkel des Sechsecks oder durch Antragen des Radius von den

Grenzpunkten zweier zu einander normalen Durchmesser, da der Centriwinkel $= \frac{4R}{4} - \frac{4R}{6} = \frac{4R}{12}$.

6. Wie in 2 nachgewiesen wurde, schliefsen sich in einem gleichwinkeligen einbeschriebenen Vieleck an jede Seite beiderseits einander gleiche Seiten an, in einem gleichseitigen umbeschriebenen Vielseit an jeden Winkel beiderseits gleiche Winkel. Numerieren wir daher die Seiten oder Winkel, so ist $(1) = (3) = (5) = (7) = \ldots$ und $(2) = (4) = (6) = \ldots$, und nehmen wir nun den Fall an, dafs die Zahl der Ecken oder Seiten eine ungerade sei, so wird in der Reihe der ungeraden Nummern auf die letzte ungerade Nummer $(2n+1)$ als zweitfolgende die Nummer (2) kommen, d. h. alle Seiten bzw. Winkel werden einander gleich sein. Hieraus folgt:

Ein gleichwinkeliges einbeschriebenes Vieleck von ungerader Seitenzahl ist regelmäfsig.

Ein gleichseitiges umbeschriebenes Vielseit von ungerader Seitenzahl ist regelmäfsig.

7. Wird einem Kreise irgend ein Vieleck ein- bzw. umgeschrieben, so gelangt man durch Betrachtungen, analog denen in §. 41. 1 und 1′ zu folgenden Sätzen:

a) *Bei jedem einem Kreise eingeschriebenen $2n$-eck ist die Summe der n Winkel ungerader Ordnung gleich der Summe derer von gerader Ordnung* —

a′) *Bei jedem einem Kreise umgeschriebenen $2n$-eck ist die Summe der n Seitenstrecken ungerader Ordnung gleich der Summe derer von gerader Ordnung* —

und (vgl. §. 37, 3 und 3′):

b) *Wird bei einem eingeschriebenen $(2n+1)$-eck ein Winkel durch einen Radius geteilt, so ist unter den nun vorhandenen $(2n+2)$ Winkeln die Summe der $(n+1)$ Winkel ungerader Ordnung gleich der Summe der $(n+1)$ übrigen.*

b′) *Wird bei einem umgeschriebenen $(2n+1)$-seit eine Seitenstrecke als durch den Berührungspunkt geteilt angenommen, so ist unter den nun vorhandenen $(2n+2)$ Strecken die Summe der $(n+1)$ Strecken ungerader Ordnung gleich der Summe der $(n+1)$ übrigen.*

V. Abschnitt.

Vergleichung der Flächen geschlossener Figuren.

Vierzehntes Kapitel.

Vergleichung von Flächen.

§. 45. Gröfse, Zusammensetzung und Zerlegung von Flächen.

A. Gröfse der Flächen.

1. Man versteht unter der Fläche einer geschlossenen Figur den von dessen Umfang begrenzten Raumteil der Ebene. Während wir bisher die geometrischen Gröfsen Strecke und Winkel allein ins Auge gefafst haben, wenden wir uns nun zu der dritten planimetrischen Gröfse, der Gröfse irgend eines Teiles der Ebene oder dem Inhalt der Fläche, abgesehen von der Form der letzteren.

2. Zwei Flächen heifsen inhaltsgleich oder kurz gleich (=), wenn sie entweder als Ganze oder mit ihren Teilen (die man durch Teillinien erhält) so zur Deckung gebracht werden können, dafs je ein Teil der einen Fläche einen Teil der andern Fläche deckt. — Gleich sind daher sowohl kongruente Flächen, als auch solche, welche in gleichviel paarweis kongruente Flächen durch Teillinien zerlegt werden können.

3. Trägt man eine Fläche so neben eine andere an, dafs beide eine gemeinschaftliche Grenzlinie haben, so bilden sie eine einzige Fläche, deren Inhalt die Summe der Inhalte beider Flächen ist. Die Summe bleibt die gleiche, wo auch die zweite Fläche an die erste angetragen wird; denn auf die Form wird hier keine Rücksicht genommen.

Trägt man dagegen eine Fläche in die Fläche einer andern Figur, so dafs sie einen Teil der Fläche der letzteren bildet, so ist der andere Teil der letzteren die Differenz der beiden Flächen. Auch hier ist es gleichgültig, an welcher Stelle die eine Fläche in die andere eingetragen wird.

4. Damit zwei Dreiecke bei einfachem Antragen wiederum ein Dreieck geben, müssen beide in einer Seite übereinstimmen und ein

anliegender Winkel in dem einen Dreieck einen solchen des andern zu $2R$ ergänzen. Das Gleiche gilt für Parallelogramme. Bei Recht-

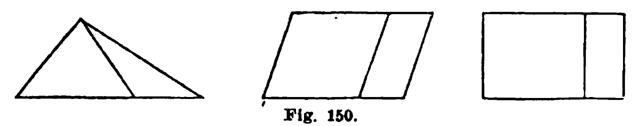
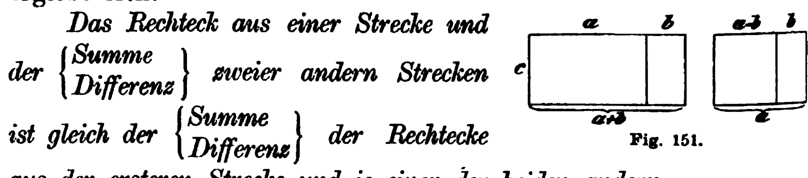


Fig. 150.

ecken genügt sonach die Übereinstimmung in einer Seite, um aus ihnen unmittelbar ein neues Rechteck zusammensetzen zu können.

B. Zu- und Abnahme von Rechtecken und Quadraten mit ihren Seiten.

5. Verlängert oder verkürzt man eine Seite a eines Rechtecks um eine Strecke b und zeichnet über $(a \pm b)$ ein Rechteck mit derselben anstoſsenden Seite c, die das ursprüngliche Rechteck hatte, so ergiebt sich:

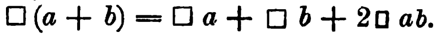


Das Rechteck aus einer Strecke und der $\left\{\begin{matrix}\textit{Summe}\\ \textit{Differenz}\end{matrix}\right\}$ *zweier andern Strecken ist gleich der* $\left\{\begin{matrix}\textit{Summe}\\ \textit{Differenz}\end{matrix}\right\}$ *der Rechtecke aus der ersteren Strecke und je einer der beiden andern.*

Fig. 151.

Zusatz. Von zwei Rechtecken, die in einer Seite übereinstimmen, hat das mit der gröſseren zweiten Seite den gröſseren Inhalt.

6. Verlängert man die Seite a eines Quadrates (Fig. 152) um eine Strecke b und zeichnet ein Quadrat über $(a+b)$, so zerfällt dasselbe durch Verlängerung der Seiten des ursprünglichen Quadrats in die Quadrate über a und b und die beiden Rechtecke aus a und b; daher ist:



$$\square(a+b) = \square a + \square b + 2\square ab.$$

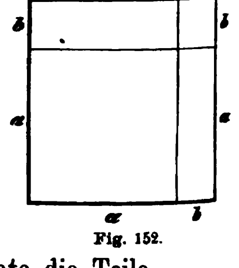


Fig. 152.

Vermindert man aber die Seite a eines Quadrats (Fig. 153) um die Strecke b und errichtet über $(a-b)$ ein Quadrat, so bilden dessen Seiten und ihre Verlängerungen in dem ersten Quadrate die Teile

$$\square(a-b),\ 2\square ab,$$

wenn wir den Teil $\square b$ doppelt in Rechnung ziehen; daher ist:

$$\square(a-b) = \square a - [2\square ab - \square b] = \square a + \square b - 2\square ab.$$

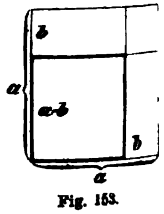


Fig. 153.

Das Quadrat über der $\left\{\begin{matrix}\textit{Summe}\\ \textit{Differenz}\end{matrix}\right\}$ *zweier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate dieser Strecken* $\left\{\begin{matrix}\textit{vermehrt}\\ \textit{vermindert}\end{matrix}\right\}$ *um das doppelte Rechteck aus letzteren.*

7. Zeichnet man (Fig. 154) ein Rechteck aus der Summe $(a+b)$ und Differenz $(a-b)$ zweier Strecken und vervollständigt die Figur durch Zeichnung des Rechtecks aus a und $(a+b)$, das in $\square a$ und $\square ab$ zerfällt, so sind von diesem die oberen Teile $\square ab$ und $\square b$ wegzunehmen, um das Reckteck $(a+b)\ (a-b)$ zu erhalten, daher ist

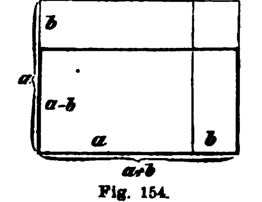


Fig. 154.

$$\square (a+b)(a-b) = \square a + \square ab - \square ab - \square b$$
$$= \square a - \square b.$$

Das Rechteck aus der Summe und Differenz zweier Strecken ist gleich der Differenz der Quadrate zu diesen.

§. 46. Gleichheit von Flächen.

A. Bei Ubereinstimmung in Grundseite und Höhe.

1. Unter der Höhe eines Parallelogramms oder eines Trapezes versteht man den Normalabstand zweier parallelen Seiten; diese werden Grundseiten der betreffenden Höhe genannt. Trapez, Parallelogramm, Dreieck haben bzw. 1, 2, 3 Höhen. Haben zwei solche Figuren gleiche Höhen und verlegt man deren Grundseiten auf dieselbe Gerade und zwar die Flächen einerseits dieser Geraden, so fallen die je den Grundseiten gegenüberliegenden Ecken oder Seiten in eine einzige zur Grundseite parallele Gerade (§. 12, 8 d), und umgekehrt: es haben zwei zwischen denselben Parallelen liegende Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze gleiche Höhe (§. 12, 8 c).

2. Wir vergleichen zuerst Parallelogramme mit übereinstimmender Grundseite und Höhe, die in die angegebene Lage gebracht sind. Die anderen Seiten bilden Paare perspektivisch kongruenter Strecken $a \# a_1$, $b \# b_1$, da sie nur um die Grundseite g gegen einander verschoben sind. Daher ist auch das Trapez $ab \# a_1 b_1$. Die Subtraktion dieser Flächen von Trapez ab_1 ergiebt: ▱ $aa_1 = bb_1$, d. h.:

a) *Parallelogramme, welche in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, sind inhaltsgleich.*

Um das eine Parallelogramm zu zerlegen, damit die Teile zur Deckung mit denen des andern Parallelogramms gebracht werden können, genügen ein oder mehrere Schnitte parallel der Seite des zweiten Parallelogramms.

Durch indirekten Beweis ergiebt sich leicht die Umkehrung des Satzes a):

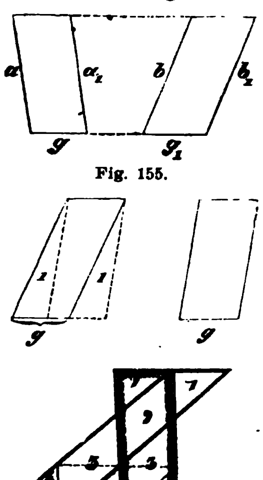


Fig. 155.

Fig. 156.

b) *Inhaltsgleiche Parallelogramme, welche*

in einer $\left\{\begin{matrix}\textit{Grundseite}\\ \textit{Höhe}\end{matrix}\right\}$ *übereinstimmen, stimmen auch in der zugehörigen* $\left\{\begin{matrix}\textit{Höhe}\\ \textit{Grundseite}\end{matrix}\right\}$ *überein.*

3. Da jedes Dreieck durch Anfügen eines diametralen Dreiecks in Bezug auf eine Seitenmitte als Centrum ergänzt werden kann zu einem Parallelogramm von doppeltem Inhalte, so folgt:

a) *Der Inhalt eines Dreiecks ist halb so grofs als der eines Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe,*

Fig. 157.



woraus dann weiter folgt:

b) *Dreiecke von gleicher Grundseite und Höhe sind inhaltsgleich.*



c) *Dreiecke auf gemeinsamer Grundseite, deren Gegenecken in einer Parallelen zu letzterer liegen, sind inhaltsgleich.*

d) *Inhaltsgleiche Dreiecke, welche in einer* $\left\{\begin{matrix}\textit{Grundseite}\\ \textit{Höhe}\end{matrix}\right\}$ *übereinstimmen, stimmen auch in der zugehörigen* $\left\{\begin{matrix}\textit{Höhe}\\ \textit{Grundseite}\end{matrix}\right\}$ *überein.*

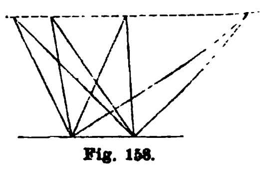


Fig. 158.



e) *Der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks von bestimmtem Inhalt u. bestimmter Grundseite ist ein Paar Parallele zur Grundseite.*

4. Zieht man in einem Trapez $ABCD$ durch die Mitte M der einen nicht parallelen Seite AB die Parallele EF zur andern CD, so kann das $\triangle\, AFM$ in die mit ihm diametrale Lage BEM gebracht werden, wodurch das Trapez in das Parallelogramm $FECD$ übergeht, dessen Seiten FD und EC mit der Mittelparallelen MN übereinstimmen; d. h.:

Fig. 159.

Ein Trapez ist inhaltsgleich einem gleich hohen Parallelogramm, dessen Grundseite gleich der Mittelparallelen des Trapezes oder gleich der halben Summe der parallelen Seiten ist (§. 16, 9).

Zusatz. Trapeze von gleicher Höhe und gleichen Parallelseiten oder gleichen Mittelparallelen sind inhaltsgleich.

B. Ohne Übereinstimmung in Grundseite und Höhe.

5. *Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallele zu den Seiten, so entstehen beiderseits der Diagonale inhaltsgleiche Parallelogramme.*

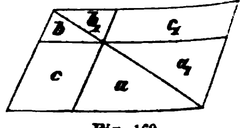


Fig. 160.

Denn die beiderseits liegenden Dreiecke

sind gleich, daher auch ihre Differenzen:

$$(a + b + c) - a - b = (a_1 + b_1 + c_1) - a_1 - b_1 \text{ oder } c = c_1.$$

6. Nehmen wir an, das so zerlegte Parallelogramm sei ein Rechteck $BKYL$, das entstanden sei, indem man in einem rechtwinkeligen Dreieck ACB das Quadrat der Hypotenusenhöhe $CDKX$ konstruierte und BC bis zum Schnitt mit KX verlängerte; dann ist jenes Quadrat KC gleich dem Rechteck CL. Von den Seiten dieses Rechtecks ist aber die eine $= DB$, die andere $= XY = DA$, da $\triangle ADC$ durch eine Drehung um C im Betrag von einem R nach YXC kommt. Daraus folgt:

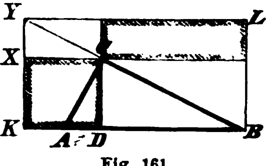


Fig. 161.

Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenusenhöhe gleich dem Rechteck aus den beiden (durch sie gebildeten) Abschnitten der Hypotenuse.

Zusatz. Da je zwei Sehnen, welche von den Grenzpunkten eines Durchmessers nach einem Punkte C der Peripherie eines Kreises gezogen sind, ein rechtwinkeliges Dreieck mit letzterem bilden (§. 34, 5 Zusatz 1), so folgt:

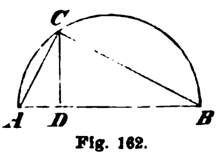


Fig. 162.

Das Quadrat einer auf einem Durchmesser normalen Halbsehne (Kreisordinate) ist gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten des Durchmessers.

7. Die Abschnitte, in welche die Höhe eines Dreiecks die Grundseite teilt, nennt man die Projektionen der angrenzenden Seiten auf die Grundseite. So ist (Fig. 163) AB_1 Projektion von AB auf AC.

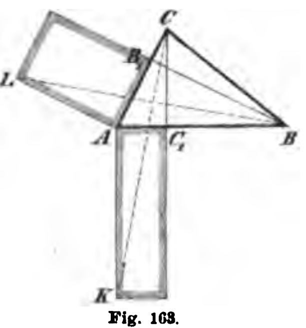


Fig. 163.

Zeichnet man nun aus einer Seite $AC = AL$ und der Projektion AB_1 der andern AB auf sie ein Rechteck B_1L, ebenso aus $AK = AB$ und AC_1 das Reckteck C_1K, so sind beide einander gleich. Denn sie sind jeweils das Doppelte der Dreiecke ABL und AKC (3, a), welche durch eine Drehung des einen um A im Betrag von einem R zur Deckung gelangen. Daraus folgt:

In einem Dreieck ist das Rechteck aus einer Seite und der Projektion einer zweiten auf sie gleich dem Rechteck aus der zweiten Seite und der Projektion der ersten auf sie.

8. Da im rechtwinkeligen Dreieck (Fig. 164) jede Kathete zugleich Projektion der Hypotenuse ist, so folgt:

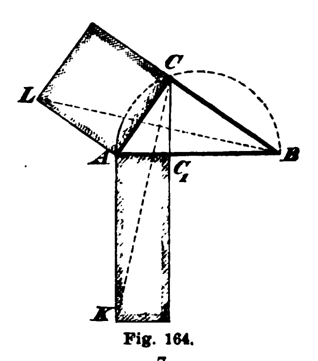


Fig. 164.

Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf sie.

Zusatz. Daraus folgt wie in 6:

Das Quadrat einer Sehne ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser und der Projektion der Sehne auf den Durchmesser, der von einem ihrer Grenzpunkte ausgeht.

§. 47. Summen von Flächen.

1. Die Fläche eines Parallelogramms kann aufgefafst werden als beschrieben durch Verschiebung einer Seite längs einer anstofsenden Seite. Verschieben wir eine Strecke nach einander längs den Seiten eines Geradenzugs, so entsteht eine Fläche, die aus einer Summe von Parallelogrammen gebildet ist. Zwei solche Verschiebungen heifsen gleichen Sinnes, wenn der Schnittpunkt der bewegten Geraden AA_1 mit irgend einer festen Geraden auf dieser beidemal in gleicher Richtung hingleitet, z. B. auf A_2B_2 und B_2C_2 bei der Verschiebung längs AB und BC; entgegengesetzten Sinnes, wenn er auf ihr in entgegengesetzten Richtungen hingleitet, z. B. auf B_2C_2 und C_2D_2 bei der Verschiebung längs BC und CD. Nehmen wir die Flächen der einen Verschiebungsrichtung als positiv an, so sind die der entgegengesetzten Richtung negativ zu nehmen.

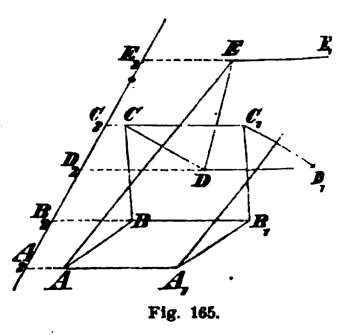


Fig. 165.

Es ergiebt sich nun leicht:

Eine Strecke beschreibt bei der Verschiebung längs zweier Seiten eines Dreiecks zwei Parallelogramme, deren Summe gleich dem Parallelogramm ist, das durch Verschiebung der Strecke längs der dritten Seite entsteht.

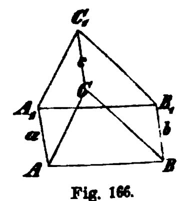


Fig. 166.

Wird nämlich AA_1 (a) nach CC_1 (c) und von da nach BB_1 (b) verschoben, so ist wegen Gleichheit und Parallelismus dieser Strecken auch $\triangle A_1B_1C_1 \# ABC$. Durch Verschiebung der Fläche $A_1B_1C_1$ nach ABC verwandelt sich aber die Fläche beider Parallelogramme ac und cb in das Parallelogramm ab, wobei die bei C liegende Dreiecksfläche, welche den Parallelogrammen nicht angehört, von ABC bzw. $A_1B_1C_1$ in Abzug kommt. Es ist also

$$[]\, ac + cb = ab$$

und ferner mit Berücksichtigung des Sinnes der Verschiebung:

$$[]\, ab + bc = ac, \quad []\, ca + ab = cb.$$

Anmerkung. Man vergleiche hiermit die Zusammensetzung von

Strecken (§. 6, 5) und Winkeln (§. 7, 7 und §. 17). Es läfst sich dieser Satz von dem Dreieck leicht auf das Vieleck übertragen.

Als specieller Fall ergiebt sich aus ihm der Lehrsatz §. 46, 2a, wenn nämlich $AA_1 \parallel BC$ angenommen wird; umgekehrt kann aus letzterem leicht der vorstehende Lehrsatz abgeleitet werden.

2. Da die beiden Parallelogramme AC_1 und BC_1 inhaltsgleich sind mit irgend welchen Parallelogrammen AC_2 und BC_3 über AC und BC, deren Gegenseiten durch A_1 und B_1 gehen, so folgt der Satz des Pappus (wohl Ende des dritten Jahrhunderts n. Chr.):

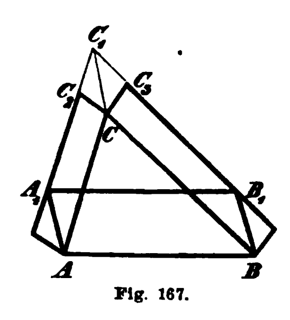


Fig. 167.

Ein Parallelogramm über einer Dreiecksseite, deren Gegeneck zwischen zwei Gegenseiten des Parallelogramms fällt, ist gleich der Summe der Parallelogramme über den andern Seiten, deren Gegenseiten durch die Ecken des ersteren Parallelogramms gehen.

3. Wird ACB als ein R und $ABKL$ als ein Quadrat angenommen, ferner $AM \perp AC$, $BS \perp BC$, so kann das Dreieck ABC durch eine Drehung um A im Betrag von einem R in die Lage ALM gebracht werden (es kommt dann B auf L, AC in die Richtung von AM und ebenso fallen die Normalen zu diesen Richtungen BC und LM aufeinander), woraus folgt, dafs $AM = AC$, d. h. CM ein Quadrat; ebenso CS. Dies liefert den Satz des Pythagoras oder pythagoreischen Lehrsatz (6. Jahrh. v. Chr.): $\square AB = \square AC + \square CB$.

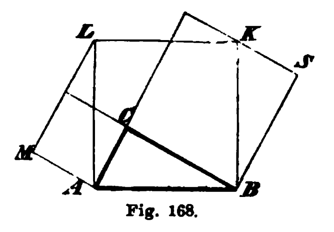


Fig. 168.

Das Hypotenusenquadrat ist gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus § 46, 8 (und Fig. 164), indem die beiden Rechtecke aus der Hypotenuse und den Projektionen

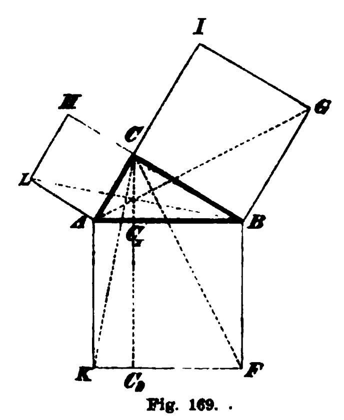


Fig. 169.

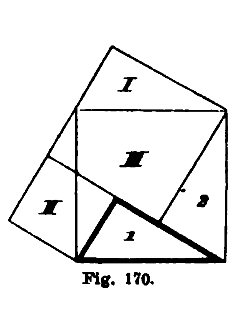


Fig. 170.

der Katheten auf sie zusammen das Hypotenusenquadrat bilden (Fig. 169; Beweis des Euklid). — Statt weiterer Beweise, deren man sehr viele zu diesem Satze erfand, sei nur angedeutet, wie durch Zerlegung und andere Anordnung der Teile das Hypotenusenquadrat und die Kathetenquadrate in einander übergehen (Fig. 170): das rechtwinkelige Dreieck läfst sich in das Hypotenusenquadrat nach 1 und 2 eintragen; durch die Verschiebung von 1 nach I und 2 nach II entsteht eine Fläche I, III, II, welche die Summe der beiden Kathetenquadrate darstellt. Andere Zerlegungen geben die folgenden zwei Figuren.

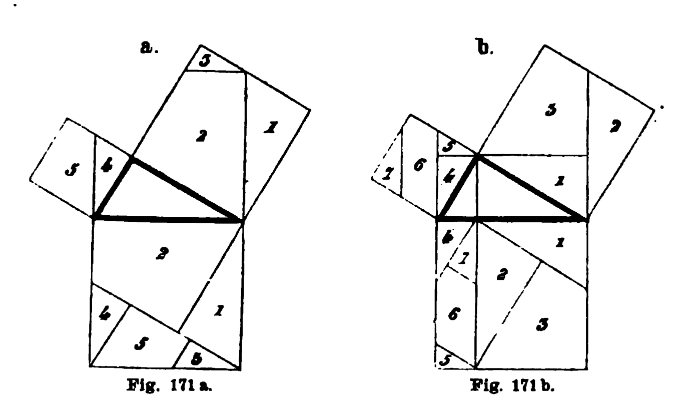


Fig. 171 a. Fig. 171 b.

4. Wie aus §. 46, 8 der pythagoreische Lehrsatz für das rechtwinkelige Dreieck sich durch Addition der Rechtecke ergiebt, so folgt

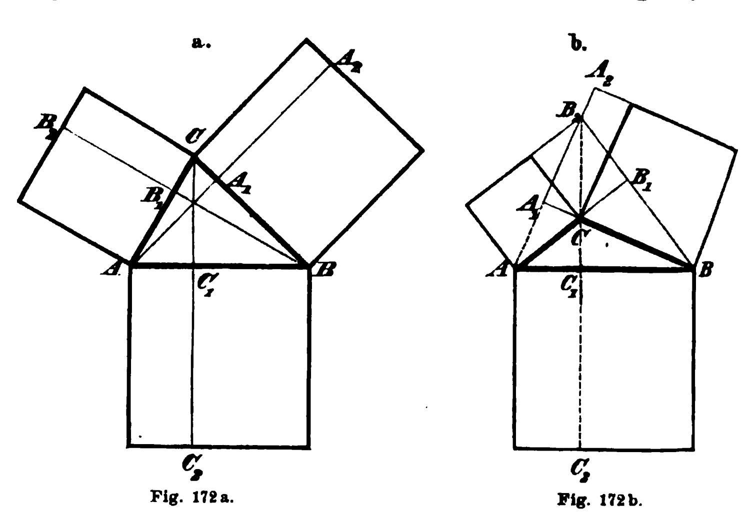


Fig. 172 a. Fig. 172 b.

aus §. 46, 7 eine Verallgemeinerung dieses Satzes für das schiefwinkelige Dreieck (Fig. 172). Nach der dort angewandten Bezeichnung ist:

$$\square\, AC_2 = AB_2,$$
$$\underline{\square\, C_2B = BA_2} \text{ und } \square\, B_2C = A_2C$$
$$\square\, AC_2 + C_2B = AB_2 + BA_2$$
$$= AB_2 \pm B_2C + BA_2 \pm A_2C \mp B_2C \mp A_2C,$$

worin die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem AB einem spitzen Winkel C (Fig. 172a) oder einem stumpfen Winkel C (Fig. 172b) gegenüberliegt. Die letzte Gleichheit geht aber über in die folgende:

$$\square\, AB = \square\, AC + \square\, BC \mp 2 \square\, B_2C.$$

In einem Dreieck ist das Quadrat der Gegenseite eines $\left\{\begin{matrix}\textit{spitzen}\\ \textit{stumpfen}\end{matrix}\right\}$ *Winkels gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten* $\left\{\begin{matrix}\textit{vermindert}\\ \textit{vermehrt}\end{matrix}\right\}$ *um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf sie.*

5. Je nachdem also ein Winkel im Dreieck gleich, kleiner oder größer als ein R ist, ist das Quadrat der Gegenseite des Winkels gleich, kleiner oder größer als die Summe der Quadrate der anderen Seiten — und umgekehrt:

Wenn in einem Dreieck das Quadrat der Gegenseite eines Winkels gleich, kleiner oder größer als die Summe der Quadrate der anderen Seiten ist, so ist der Winkel gleich, kleiner oder größer als ein R.

Fünfzehntes Kapitel.

Verwandlung und Teilung von Flächen.

§. 48. Flächenverwandlung.

A. Mit Beibehaltung einer Seite oder Höhe.

Unter der Verwandlung einer Figur in eine andere verstehen wir im folgenden die Konstruktion einer zweiten Figur, welche mit der ersten in dem Flächeninhalte übereinstimmt.

1. Aufgabe. *Es ist ein Dreieck oder Parallelogramm in eine eben solche Figur zu verwandeln, die mit ersterer in einer Seite übereinstimmt, während in der neuen Figur noch weiter bestimmt sei: a) ein anliegender Winkel oder b) eine Seite.*

a) Man trägt den Winkel an der Grundseite an und begrenzt den

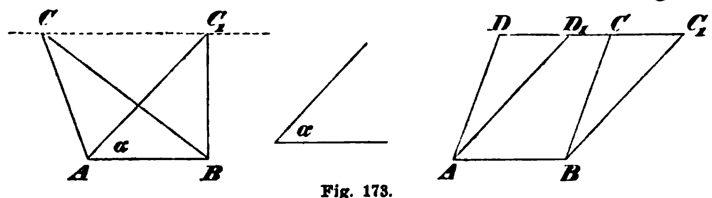


Fig. 173.

zweiten Schenkel desselben durch die vom Gegeneck ausgehende Parallele zur Grundseite, bzw. durch die Gegenseite des Parallelogramms.

b) Man trägt die gegebene Seite von dem einen Grenzpunkte der Grundseite nach jener Parallelen, bzw. Gegenseite. Der Beweis der Gleichheit der Flächen und die Determination der Aufgabe ist einfach.

Insbesondere kann man hiernach *ein Parallelogramm in ein Rechteck, ein Dreieck in ein rechtwinkeliges oder gleichschenkeliges verwandeln.* In letzterem Falle ergiebt sich die Spitze des Dreiecks als Schnittpunkt zweier früher definirten geometrischen Örter.

2. Aufgabe. *Es ist ein Dreieck in ein Parallelogramm (Rechteck) zu verwandeln: a) mit Beibehaltung einer Seite, b) mit Beibehaltung einer Höhe.*

Das Parallelogramm wird aus dem beibehaltenen Stücke und a) der halben Höhe, b) der halben Grundseite konstruiert.

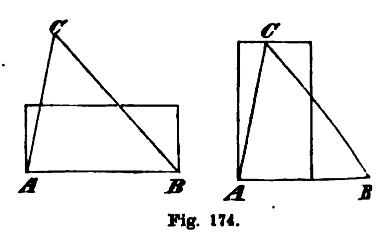


Fig. 174.

Bei der umgekehrten Aufgabe der *Verwandlung eines Parallelogramms in ein Dreieck* wird eine der nicht beizubehaltenden Seiten verdoppelt.

3. Aufgabe. *Es soll ein Vieleck in ein solches verwandelt werden, das ein Eck weniger hat.* — Man trennt das betreffende Eck A durch die benachbarte Diagonale BE ab, zieht durch das Eck die Parallele AF zu dieser Diagonale bis zum Schnitt F einer folgenden Seite und verbindet diesen Punkt F mit dem gegenüberliegenden Grenzpunkte B der Diagonale. Diese Verbindungsgerade BF ist die neue Grenzlinie; denn es ist $\triangle AEB = FEB$.

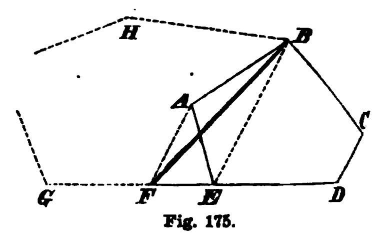


Fig. 175.

Zusatz. a) Es wird hiermit das Eck A des Geradenzuges BAE in eine Gerade DE verlegt, eine Konstruktion, welche auch in den folgenden Aufgaben wiederkehrt. — Würde andererseits von BAE ebenfalls eine Fläche $HBAEG\ldots$ anstofsen, so wäre nun die Grenze BAE beider Flächen durch die Gerade BF ersetzt, ohne dafs an dem Inhalt jeder dieser Flächen etwas geändert wäre.

b) Es läfst sich mittels der angegebenen Konstruktionen *ein Vieleck in ein Dreieck* und schliefslich dieses *in ein Rechteck verwandeln.*

4. Aufgabe. *Ein Trapez wird mit Beibehaltung seiner Höhe in ein Parallelogramm oder Rechteck verwandelt,* indem man die Mittelparallele als Grundseite nimmt.

Auch ein *beliebiges Viereck kann direkt in ein Parallelogramm oder Rechteck verwandelt werden,* indem man es durch eine Diagonale

in zwei Dreiecke zerlegt denkt und auf diese die Konstruktion der Aufgabe 2a mit der Diagonale als Grundseite anwendet.

B. Ohne Beibehaltung einer Seite.

5. Aufgabe. *Es ist a) ein Dreieck oder b) ein Parallelogramm in ein solches zu verwandeln, das mit dem gegebenen in einem Winkel übereinstimmt, während noch die Gröfse einer der einschliefsenden Seiten bestimmt ist.*

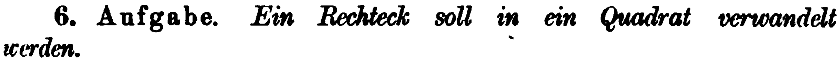
a) Es sei ABC das gegebene Dreieck, $\sphericalangle A$ der Winkel, AB_1 die Seite des fraglichen Dreiecks. Ziehe B_1C und damit parallel BC_1, so ist AC_1 die zweite Seite dieses Dreiecks, da $\triangle BC_1C = BC_1B_1$ ist.

b) Es sei $ABCD$ das gegebene Parallelogramm, $\sphericalangle A$ der Winkel, AB_1 die Seite des fraglichen Parallelogramms. Ziehe B_1D und damit parallel BD_1, so ist AD_1 die zweite Seite dieses Parallelogramms; denn es ist

$$\square D_1C = D_1X = D_1B_1 = BC_1.$$

Fig. 176.

Eine andere Konstruktion ergiebt sich unmittelbar aus §. 46, 5.



6. Aufgabe. *Ein Rechteck soll in ein Quadrat verwandelt werden.*

Man verfährt entweder gemäfs dem Satze §. 46, 6 Zusatz, indem man die beiden Seiten des Rechtecks nebeneinander anträgt, über der Summe der Seiten einen Halbkreis beschreibt und am gemeinschaftlichen Grenzpunkte beider Seiten die Kreisordinate zieht;

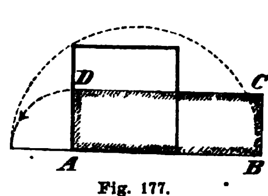


Fig. 177.

diese ist dann die Quadratseite; — oder man benützt §. 46, 8 Zusatz, indem man die kleinere Seite von einem Grenzpunkte aus in die gröfsere einträgt, den Halbkreis über der gröfseren beschreibt und im Grenzpunkte der kleineren die Kreisordinate zieht; die Sehne vom Grenzpunkte dieser Ordinate nach dem andern Grenzpunkte der eingetragenen Seite ist die gesuchte Quadratseite.



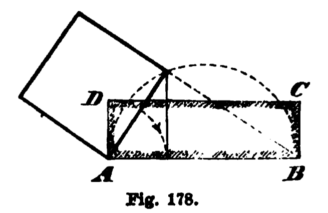


Fig. 178.

7. Aufgabe. *Die Summe oder Differenz zweier Quadrate soll als Quadrat dargestellt werden.*

Im ersten Falle zeichnet man aus beiden Quadratseiten als Katheten ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse dann die

gesuchte Quadratseite ist. Im zweiten Falle wird die gröfsere Quadratseite als Hypotenuse, die kleinere als Kathete genommen und die andere Kathete giebt die gesuchte Quadratseite.

§. 49. Flächenteilung.

1. Aufgabe. *Ein Parallelogramm ist durch Geraden parallel einer Seite oder ein Dreieck durch Geraden von einem Eck aus in n gleiche Teile zu teilen.*

Man teile im ersten Falle die an die betreffende Seite angrenzende Seite in n gleiche Teile (vgl. Aufg. §. 6, 17) und ziehe die Parallelen durch die Teilpunkte; im zweiten Falle teile man die Gegenseite des Ecks in n gleiche Teile und verbinde diese Teilpunkte mit dem Eck.

Zusatz. In ähnlicher Weise *wird ein Trapez in n gleiche Teile geteilt,* indem man die beiden Parallelen so teilt und die Teilpunkte der Reihe nach verbindet (§. 46, 4 Zusatz).

2. Aufgabe. *Ein Dreieck ist von einem auf einer Seite gelegenen Punkte aus in n gleiche Teile zu teilen.*

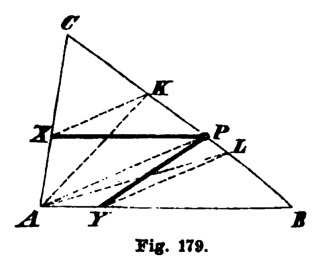


Fig. 179.

Man teilt eben diese Seite, auf welcher der Punkt P liegt, in n (z. B. drei) gleiche Teile, verbindet P mit dem Gegeneck A und zieht durch die Teilpunkte Parallele zur Verbindungsgeraden, also

$$KX \parallel PA \parallel LY,$$

so ergeben letztere die Schnittpunkte der fraglichen Teilgeraden auf den andern Seiten. Denn z. B. $\triangle AKL$ ist ein solcher verlangter Teil des gegebenen Dreiecks und durch die Parallele KX zu PA wird nur die Spitze K des $\triangle APK$ nach X verlegt; ebenso ist $\triangle APL = APY$.

3. Aufgabe. *Ein Dreieck ist von einem innerhalb desselben gelegenen Punkte aus zu halbieren im Anschlufs an eine Teilgerade, welche von dem Punkte a) nach einem Eck oder b) nach einer Seite geht.*

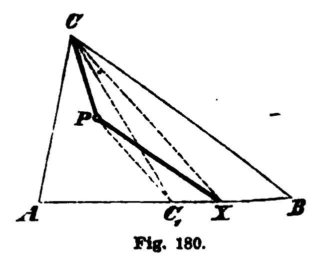


Fig. 180.

Ist im ersten Falle PC die Teilstrecke nach dem Eck C, so halbiere man die Gegenseite in C_1, ziehe PC_1 und $CX \parallel PC_1$; alsdann ist PX die Teilgerade, da

$$\triangle CXP = CXC_1$$

ist.

Ist PQ (Fig. 181) im zweiten Falle

die Teilgerade, welche die Seite AB in Q treffe, so halbiere man diese Seite in C_1, ziehe $QS \parallel C_1P$ bis zum Schnitt S mit CC_1, so ist $\triangle C_1PQ = C_1PS$. Ziehe dann $SX \parallel PC$, so ist PX die fragliche Teilgerade, da

$$\triangle PCS = PCX,$$

somit $\triangle CPC_1 = PCX + PC_1Q$ ist.

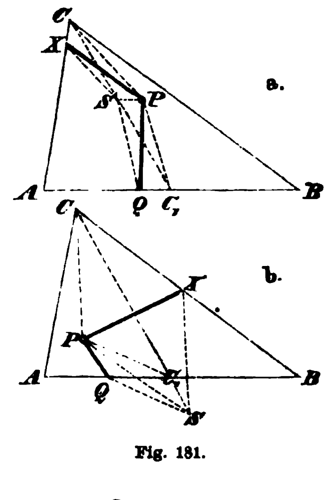


Fig. 181.

4. Aufgabe. *Ein Vieleck ist von einem Eck aus zu halbieren.*

Es sei A das betreffende Eck; man ziehe die benachbarte Diagonale BF und mit dieser durch die übrigen Ecken parallele Gerade. Verbindet man die Mitten dieser Teilstrecken durch einen Geradenzug von A bis zum entgegenliegenden Eck, so ist durch diesen Geradenzug die Fläche halbiert. Nach §. 48, 3, Zusatz a, kann dieser Geradenzug in eine Teilgerade verwandelt werden durch wiederholte Anwendung der dort gegebenen Konstruktion.

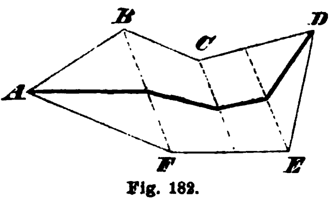


Fig. 182.

Anhang.

§. 50. Berechnung der Flächen.

1. Obgleich im vorliegenden Teil der Planimetrie nur die Gleichheit und der Unterschied, Summe und Differenz der planimetrischen Gröfsen behandelt wurde, dagegen die durch Produkte und Quotienten dargestellten Beziehungen erst im zweiten Teile folgen sollen, geben wir wegen der praktischen Wichtigkeit hier noch anhangsweise die Berechnung der Flächen geradlinig begrenzter Figuren.

Um die Gröfse einer Fläche zu bestimmen, bedient man sich als Mafseinheit eines Quadrates, dessen Seite die Längeneinheit ist. Gehen auf die Grundseite eines Rechtecks a und auf die anstofsende Seite b Längeneinheiten, so kann man an die Grundseite a Quadrateinheiten anlegen und in das ganze Rechteck b solcher Streifen von je a Flächeneinheiten; es gehen also in das Rechteck $b \cdot a$ Flächeneinheiten. Dies drückt man kurz durch den Satz aus:

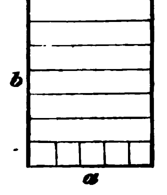


Fig. 183.

Man erhält den Inhalt eines Rechtecks, indem man zwei anstofsende Seiten mit einander multipliziert —

womit man ausdrücken will, dafs man die Zahl der Flächeneinheiten erhält durch Multiplikation der Zahlen der Längeneinheiten der beiden Seiten, vorausgesetzt, dafs beide letzteren Zahlen durch einerlei Mafs erhalten wurden; das Mafs für die erhaltene Zahl ist dann die Fläche des zur benützten Längeneinheit gehörenden Quadrates.

Hieraus folgt sofort, in gleicher Weise ausgedrückt:

Der Inhalt eines Quadrates ist gleich dem Produkt der Seite mit der Seite.

Wenn die Längeneinheit nicht in der Seite des Rechtecks aufgeht, so nimmt man einen Bruchteil der ersteren $\frac{1}{n}$ als Mafs; das Quadrat zu diesem ist dann $\frac{1}{nn}$ der Flächeneinheit, da nn solcher Quadrate in die Flächeneinheit gehen. Ist dann die eine Seite des Rechtecks $a = \alpha \cdot \frac{1}{n}$, die andere $b = \beta \cdot \frac{1}{n}$, so gehen auf die Grundseite α solcher kleinen Quadrate und in das Rechteck β solcher Streifen, also $\beta \cdot \alpha$ Quadrate; der Inhalt ist dann

$$\beta \cdot \alpha \cdot \frac{1}{nn} = \beta \cdot \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{n} = b \cdot a,$$

wie oben. Der Bruchteil $\frac{1}{n}$ kann immer so klein angenommen werden, dafs beim Ausmessen der Seiten höchstens ein unmefsbar kleiner Rest übrig bleibt, der nicht in Betracht zu ziehen ist.

Ein Quadratmeter qm ist hiernach = 100 qdm, 1 qdm = 100 qcm, 1 qcm = 100 qmm. Als Feldmafs dient ein Quadrat von 10 m Länge, das Ar (A), also 100 qm = 1 A, 100 Ar = 1 Hektar (Ha). Es ist z. B. 457,04208 A = 4 Ha 57 A 4 qm 20 qdm 80 qcm.

2. Aus §. 46, 2 ergiebt sich nun:

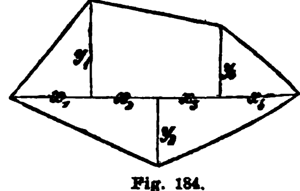
Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundseite und Höhe,

da das Parallelogramm einem Rechteck gleich ist, mit dem es in letzteren Stücken übereinstimmt.

In gleicher Weise folgt aus §. 46, 3 und 4:

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundseite und Höhe.

Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Höhe und der halben Summe der beiden Parallelen (bzw. der Mittelparallelen).


Fig. 184.

Die Fläche eines Vielecks wird bestimmt durch Zerlegung desselben in Dreiecke und Trapeze durch eine Diagonale und Normale (Ordinaten) zu dieser aus den Ecken. Man mifst letztere

(y_1, y_2, y_3), sowie die Abschnitte, welche sie auf der Diagonale bilden (x_1 bis x_4). Dann ist der Inhalt

$$J = \frac{1}{2}[x_1 y_1 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) y_2 + (x_2 + x_3)(y_1 + y_3) + x_4 y_3].$$

3. Die Aufgabe, von einem Rechteck, dessen Inhalt J und eine Seite a in entsprechenden Maſsen ausgedrückt sind, die andere Seite zu berechnen, wird durch Division der ersteren durch die zweite Zahl gelöst; denn weil $J = a \cdot b$, so ist $b = \frac{J}{a}$.

Ebenso wird aus der Fläche J eines Dreiecks und einer Grundseite a oder Höhe h, d. h. aus $J = \frac{1}{2} a \cdot h$ gefolgert:

$$h = \frac{2J}{a}, \quad a = \frac{2J}{h}.$$

Ist der Inhalt eines Quadrats gegeben, so ist die Seite desselben die Quadratwurzel aus der Zahl der Flächeneinheiten, d. h. diejenige Zahl, welche mit der ihr gleichen Zahl multipliziert die erstere Zahl ergiebt.

Ist z. B. der Flächeninhalt eines Quadrates 57 qm 76 qdm, so liegt die Seite zwischen 7 m und 8 m; denn erstere giebt 49 qm, letztere 64 qm. Zählt man das Quadrat zu 7 m von der Fläche ab, so bleiben 8 qm 76 qdm = 876 qdm und zwar (nach §. 45, 6) in Form zweier Rechtecke und eines Quadrates, wovon die ersteren eine Seite von 70 dm Länge haben, so daſs nach obigem die andere Seite nicht ganz $876 : (2 \cdot 70)$, also etwa 6 dm sein kann. Nun ist bei letzterer Annahme der Flächeninhalt der Rechtecke $2 \cdot 70 \cdot 6 = 840$ und der des Quadrates $6 \cdot 6 = 36$, beide zusammen in der That 876 qdm. Also ist die Seite des Quadrates 7 m 6 dm.

Für diese Berechnung ergiebt sich folgendes Schema:

$$\sqrt{57|76} = 76$$
$$87|6 : 146$$

Wäre nach dem Abzählen der beiden Rechtecke und des Quadrates noch ein Rest geblieben, so würde man weiter 76 dm als die Seite des nun hinweggenommenen Quadrates in Betracht ziehen und in gleicher Weise fortfahren, um die zweite Seite der beiden übrigen Rechtecke zu erhalten u. s. f., wodurch sich *cm*, *mm* ergeben.

Man trennt hierbei, entsprechend den hundertteiligen Maſsen der Flächen, die Zahl vom Komma ab in zweizifferige Gruppen und verfährt nach dem angegebenen Schema. Den Ziffern nach dem Decimalzeichen kann man Nullen anhängen und mit diesen die Rechnung bis auf jeden beliebigen Grad der Genauigkeit fortsetzen.

Ist z. B. der Inhalt des Quadrates 5787,28 qdm = 57 qm 87 qdm 28 qcm, so erhält man die Quadratseite:

$$\sqrt{57|87,|28} = 76,07 \ldots.$$
$$8\,8|7 : 146$$
$$112|8 : 1520$$
$$11280|0 : 15207$$
$$635\,1$$

Für eine oder zwei Ziffern weiter genügt, statt der Fortsetzung des angegebenen Verfahrens, die abgekürzte Division:

$$\begin{array}{l}63510 : 1521\dot{4} = 417\\ \;\;2654\\ \;\;1133\end{array}$$

Also ist die Seite 76,07417 dm. Die Rechnung ist übrigens nicht weiter zu führen, als der Genauigkeit der Messung der Fläche entspricht; sind bei dieser die qcm nicht mehr berücksichtigt, so ist bei der Seite die Zahl der cm nicht mehr zu berechnen.

Wie dieses Rechnungsverfahren im Verein mit dem pythagoreischen Lehrsatz zur Berechnung von Strecken dient, zeigt der zweite Teil der Planimetrie.

Übungsaufgaben.

Abkürzungen:

A. Augenmafs.
L. Lineal.
M. Mafsstab.
Wm. Winkelmesser.
Wsch. Winkelscheit und zwar I mit $\frac{R}{2}$, II mit $\frac{R}{3}$ und $\frac{2R}{3}$.
Z. Zirkel.

Aufgaben zum zweiten Kapitel.

§. 1. Strecken.

Vorbemerkung. Als Mafs für die Länge von Strecken hat man ursprünglich die Länge gewisser Körperteile genommen; so den Fufs (Schuh), ein Glied des Daumens (Zoll), die ausgespannte Hand (Spanne), den Arm (Elle), die ausgespannten Arme (Klafter), auch die Länge des Schrittes (1000 Schritt = Meile). Da die Körperteile an verschiedenen Personen verschiedene Länge haben, können sie kein Naturmafs abgeben.. Die französische Nationalversammlung hat im Jahre 1793 beschlossen, als solches die Länge des 40millionten Teiles eines Meridianumfanges der Erde zu bestimmen, und die Messungen ergaben hiefür die Länge des jetzt gebräuchlichen Meter. Da jedoch die Messungen einzelner Meridiane verschiedene Resultate lieferten, so kann auch das Meter nicht als Naturmafs gelten. — Ein Meter (m) wird eingeteilt in 10 Decimeter (dm), 100 Centimeter (cm), 1000 Millimeter (mm); 1000 m = 1 Kilometer (km).

In den folgenden Übungen soll das Millimeter als Einheit genommen werden.

1) Beliebig lange Strecken sind zu zeichnen, zu schätzen, zu messen!

2) Wählt man auf einer Geraden 1, 2, 3, ..., n Punkte, wie viele Halbstrahlen entstehen dann? wie viele Strecken?

3) Es liegen mehrere Strecken a, b, c gezeichnet vor. Es soll konstruiert werden:

$a+b+c=s$, $a+b-c=s_3$, $a-b+c=s_2$, $-a+b+c=s_1$

durch Abtragen mittels Papierstreifen oder Mafsstab.

4) Die von drei Punkten A, B, C einer Geraden begrenzten Strecken AB, BC, AC sind zu messen und die Resultate sind zu prüfen nach den Gleichungen:

$$AB+BC=AC,\quad AC-AB=BC,\quad AC-BC=AB.$$

5) Wenn A, B, C, X, Y, Z auf einander folgende Punkte einer Geraden sind, so soll man

α) AC, BX, CZ je als Summe zweier Strecken,

β) AX, BY, BZ, AZ je als Summe dreier Strecken,

γ) AB, CX, BY je als Differenz zweier Strecken,

δ) $AB+BX$, $BX+XZ$, $AB+BX+XY$, $BY-XY$, $AB+BY-XY$, $AC-XZ+CZ$ je als eine Strecke ausdrücken.

6) Es soll (erst nach Augenmafs, dann unmittelbar darunter auch genau) $a = 36$, $b = 24$ gezeichnet werden und dann noch:

$$\alpha)\ \frac{a+b}{2},\quad \beta)\ 3\cdot(a-b),\quad \gamma)\ 2a+\frac{b}{3},\quad \delta)\ \frac{2a}{3}+\frac{3b}{4}.$$

7) Wenn bei den Punkten in 5) $AB = CX$, so ist auch $AC = BX$. — Umkehrung?

8) Wählt man einen beliebigen Punkt X: α) auf der Verlängerung einer Strecke AB, β) auf AB selbst, so ist im ersten Falle $AX + BX$ doppelt so grofs als MX, wo M die Mitte von AB ist, und im zweiten Falle ist $AX - XB = ?$ Zahlenbeispiel! Allgemeiner Nachweis!

9) Nimmt man auf einer Strecke einen beliebigen Punkt und aufserdem sowohl die Mitte des einen hierdurch gebildeten Abschnittes als der ganzen Strecke, so ist der nicht halbierte Abschnitt doppelt so grofs als das zwischen beiden Mittelpunkten liegende Stück. Zahlenbeispiel! Beweis!

10) Es ist eine Punktgruppe $ABCD$ zu konstruieren, so dafs

$$AB = 37,\ BC = -16,\ CD = 12,\ DE = -9.$$

Dann ist AE zu messen und mit der algebraischen Summe der Strecken zu vergleichen.

11) Zu einer gegebenen Punktreihe $ABCD$ auf einer Geraden soll von einem Punkte A_1 der letzteren ab eine mit jener kongruente Punktreihe konstruiert werden durch Übertragung der einzelnen Strecken: a) mit Papierstreifen (Zirkel), b) mit dem Mafsstab.

12) Zu einer gegebenen Punktreihe $ABCD$ ist von einem Punkte A_1 aus, der dem A entspricht, auf demselben Träger eine kongruente Punktreihe zu konstruieren: a) gleichgerichtet mit der ersten Punktreihe, mittels einer einzigen Abmessung, b) gegengerichtet, mittels Abmessungen vom Mittelpunkte der Strecke AA_1 aus.

§. 2. Winkel.

Vorbemerkung. Für die Messung der Winkel ist der Vollwinkel das natürliche Mafs. Derselbe wurde schon von den Babyloniern in 360 gleiche Teile, Grade (^{0}), eingeteilt, da sie meinten, die Sonne beschreibe in 360 Tagen einen vollen Umlauf am Sternhimmel, so dafs also ein Grad dem scheinbaren Fortschreiten (gradus) der Sonne während eines Tages entspräche. Die Babylonier bedienten sich auch eines sexagesimalen Zahlensystemes, indem sie je 60 Einheiten zu einer Einheit höheren Ranges vereinten, und sie haben wohl schon, wie später allgemein die griechischen Astronomen und die des Mittelalters mit Sexagesimalbrüchen gerechnet. So wurden denn auch vielfach bis auf die neueste Zeit die Mafse in 60 oder $\frac{60}{5} = 12$ gleiche Teile zur Bestimmung kleinerer Mafse zerlegt; der Grad wurde in $60' =$ Minuten (partes minutae primae), die Minute in $60'' =$ Sekunden

(p. min. secundae) geteilt. Erst bei der Einführung der decimalen Teilung der Längenmafse wurde auch der rechte Winkel statt in 90^0 in 100 Grade, der Grad in 100 Minuten geteilt, was übrigens nur für Bruchteile von Graden einen Vorteil in der Rechnung darbietet, während die alte, noch immer fast überall gebräuchliche Einteilung den Vorzug hat, dafs eine gröfsere Anzahl von Teilen des Vollwinkels in ganzen Graden ausgedrückt werden kann.

1) Beliebige Winkel sind zu zeichnen, zu schätzen, zu messen.

2) Es liegen mehrere Winkel, etwa $\alpha = 36^0$, $\beta = 42^0$, $\gamma = 51^0$ gezeichnet vor. Es soll gezeichnet werden:
$\alpha + \beta + \gamma = \sigma$, $\alpha + \beta - \gamma = \sigma_3$, $\alpha - \beta + \gamma = \sigma_2$, $-\alpha + \beta + \gamma = \sigma_1$
durch Abtragen mittels Papierausschnittes oder mittels des Winkelmessers.

3) Drei von demselben Punkte ausgehende Halbstrahlen a, b, c bilden die Winkel ab, bc, ac. Dieselben sind zu schätzen, dann zu messen, und die Resultate sind zu prüfen nach den Gleichungen

$$ab + bc = ac,\quad ac - ab = bc,\quad ac - bc = ab.$$

4) Es sind die den Aufgaben §. 1, 5—9 entsprechenden Aufgaben für Strahlen und Winkel statt für Punkte und Strecken zu lösen.

5) Es ist ein Fünfstrahl $abcde$ zu konstruieren, so dafs

$$\sphericalangle ab = 57^0,\quad bc = -16^0,\quad cd = 12^0,\quad de = -9^0.$$

Es ist nun $\sphericalangle ae$ zu schätzen, dann zu messen und hierauf mit der algebraischen Summe der Winkel zu vergleichen.

6) Die Winkel der Fig. 17 auf S. 12 sind zu schätzen, dann zu messen und hierauf ist ihre Summe zu berechnen.

7) Wenn von fünf um einen Punkt herumliegenden Winkeln $\alpha = 74^0$, $\beta = 101^0$, $\gamma = 59^0$, $\delta = 94^0$ ist, wie grofs ist dann der fünfte Winkel ε?

8) Es ist ein beliebiges Dreieck, Viereck, Fünfeck zu zeichnen; dann sollen die einzelnen Winkel jeder Figur geschätzt, hierauf gemessen, und endlich soll die Summe aller Winkel derselben Figur gebildet werden. (Probe: Die Summe mufs beim Dreieck $= 180^0$, beim Viereck $= 360^0$, beim Fünfeck $= 540^0$ sein.)

9) α) Ein Winkel sei $= 21^0 37' 20''$; wie grofs ist sein 3, 7, $9\frac{1}{2}$faches? β) Das Dreifache (Fünffache) eines Winkels sei $= 87^0 19' 30''$; wie grofs ist der einfache?

10) Zu verwandeln: α) $20^0 24' = x'$; β) $31' 22'' = x''$; γ) $20^0 30'' = x''$; δ) $2^0 3' 45''' = x'$; ε) $80{,}225^0 = x^0 y' z''$; ξ) $100^0 20' 42'' = x^0$.

11) Welche aliquoten Teile des Vollwinkels lassen sich je durch eine ganze Zahl von Graden ausdrücken?

12) Welchen Winkel bilden die Uhrzeiger um α) 12, 3, 6, 9 Uhr, β) 1 Uhr, γ) $5\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $8\frac{3}{4}$ Uhr?

13) Um wie viel Grad dreht sich der Minutenzeiger einer Uhr in α) 1 Stunde, β) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ Stunde, γ) 1, 5, 10, 25 Zeitminuten?

14) In welcher Zeit beschreibt der Minutenzeiger einen Winkel von α) 270°, β) 45°, γ) 18°?

15) Wie viele Nebenwinkel hat ein Winkel? Und wie zeichnet man dieselben?

16) Von zwei Nebenwinkeln sei der eine das 2, 3, 4 .. fache des anderen; wie viel Grad hat jeder von beiden?

17) Die Winkel 60°, 90°, 30°, 60°, 90°, 30° sind an einander um einen Punkt anzutragen. Die Richtungen der Schenkel und die einzelnen Winkel sind nach den Sätzen §. 7, 6 zu vergleichen.

18) Zwischen 3, 5, 7 durch einen Punkt gehenden Geraden ist die Summe von je 3, bzw. 5, 7 nicht an einander grenzenden Winkeln $= 2R$. Beweis?

19) Einerseits einer Geraden liegen um denselben Scheitel

α) 3, 4, ·· *n* gleiche Winkel;

β) 5 Winkel, deren erste vier bezüglich $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{11}{18}R$ sind;

γ) 4 Winkel, von welchen jeder folgende doppelt so grofs ist als der vorhergehende; wie grofs sind je die einzelnen Winkel? (NB. Erst zeichnen nach dem A., dann schätzen, dann rechnen und endlich genau zeichnen mit Winkelmesser!)

20) Welche Gröfse hat jeder von vier um einen Punkt herumliegenden Winkeln, wenn

α) jeder folgende 3mal so grofs ist als der vorhergehende;

β) der zweite 3mal so grofs als der erste, jeder der folgenden aber gleich der Summe der beiden vorhergehenden ist?

21) Zu einem gegebenen Strahlenbüschel $abcda_1$ soll von dem Strahl a_1 aus als entsprechendem Strahle zu a ein kongruentes Strahlenbüschel mit demselben Scheitel konstruiert werden mittels Übertragung der auf einander folgenden Winkel a) mit Papierausschnitten, b) mit Winkelmesser.

22) Die vorige Aufgabe soll gelöst werden α) für ein gleichwendiges Strahlenbüschel mittels e i n e r Abmessung, β) für ein gegenwendiges mittels Abmessungen von der Winkelhalbierenden zu aa_1 aus.

Aufgaben zum dritten Kapitel.

§. 3. Lehrsätze.

1) Die aus zwei zu einander Normalen bestehende Figur ist axig zu beiden als Axen.

2) Die von einem Punkte aus auf zwei Parallele gefällten Normalen bilden eine Gerade.

3) Die Verbindungsgeraden je zweier zu einer Axe symmetrischen Punkte sind parallel.

4) Jede Normale zur Halbierenden eines Winkels schneidet auf

den Schenkeln gleiche Strecken ab und bildet mit ihnen gegenwendig gleiche Winkel. — Umkehrungen dieses Satzes?

5) Alle Geraden, welche auf dem einen Schenkel eines Winkels dieselbe Strecke abschneiden wie auf dem andern, sind parallel; desgleichen solche Geraden, deren Gegenrichtungen mit beiden Schenkeln gegenwendig gleiche Winkel bilden.

6) Im gleichschenkeligen Dreieck ist die Halbierende des Nebenwinkels zum Winkel an der Spitze parallel der Basis.

7) Im gleichschenkeligen Dreieck sind die von den Basisecken zu den Gegenseiten gezogenen Normalstrecken einander gleich; ebenso die bis zu den Gegenseiten gezogenen Halbierenden der Basiswinkel. Ihre Schnittpunkte liegen auf der Mittelnormalen der Basis.

8) Zwei Strahlen eines Axenpunktes, welche einzeln parallel sind zu zwei symmetrischen Geraden, sind selbst symmetrisch.

9) Sind zwei Geraden parallel, so sind es auch die mit ihnen zu einer Axe symmetrischen.

10) Zieht man durch zwei symmetrische Punkte $A \wedge A_1$ ein Paar symmetrische Gerade $a \wedge a_1$ und zu diesen auch ein Paar Parallelen $b \parallel a_1$ und $b_1 \parallel a$, so sind auch letztere symmetrisch.

11) In §. 12, 4 (S. 25) können die symmetrischen Geraden auch parallel sein (mit andern Worten: beide Punktreihen haben einen sich selbst entsprechenden Punkt in unendlicher Entfernung). Man beweise: Zwei kongruente Punktreihen auf zwei Parallelen sind symmetrisch, wenn einander zwei Punkte auf einer zu den Parallelen Normalen entsprechen und je zwei weitere entsprechende Punkte auf einerlei Seite dieser Normalen liegen.

12) Denkt man sich in §. 12, 4′ (S. 25) die Scheitel A und A_1 der kongruenten Strahlenbüschel in unendliche Entfernung gerückt, so werden alle Strahlen eines Büschels parallel. Man erhält kongruente Parallelstrahlenbüschel, d. h. zwei solche Systeme von Parallelen, in welchen zwei Strahlen des einen den gleichen Abstand haben wie zwei entsprechende Strahlen des andern. Man beweise: Zwei kongruente Parallelstrahlenbüschel sind symmetrisch in Bezug auf die Winkelhalbierende zweier entsprechenden Strahlen und Richtungen.

13) Zwei kongruente Parallelstrahlenbüschel, von welchen zwei entsprechende Strahlen parallel sind, sind symmetrisch zur Mittelparallen der letzteren, wenn die entsprechenden Strahlen beider Büschel in entgegengesetzten Richtungen auf einander folgen.

14) Zieht man von einem Axenpunkt zwei gleiche Strecken nach zwei symmetrischen Geraden, so sind diese Strecken symmetrisch, wenn der Winkel zwischen den vom Punkte zu den Geraden gezogenen Normalen die beiden Strecken einschließt oder beide ausschließt.

§. 4. Konstruktionsaufgaben.

1) Von einem Punkte A ist auf eine Gerade b die Normale zu fällen mittels L. und Wsch. (— Man lege L. und Wsch. so, dafs der eine Schenkel des rechten Winkels an b liege, während das L. am andern Schenkel und an A anliegt —).

2) Zu einem gegebenen Punkte A und einer gegebenen Axe ist mittels Wsch. und M. der symmetrische Punkt zu zeichnen.

2′) Zu einer gegebenen Geraden a und einer gegebenen Axe ist mittels Wm. die symmetrische Gerade zu zeichnen.

3) Zu einer Strecke ist die Mittelnormale zu zeichnen mittels M. und Wsch.

3′) Zu einem Winkel ist die Halbierende zu zeichnen mittels Wm.

4) Zu einem gegebenen Punkte A und einer Geraden b durch ihn sind in Bezug auf eine Axe c die symmetrisch entsprechenden Gebilde zu zeichnen.

5) Durch einen Punkt ist eine Gerade zu ziehen, welche mit zwei gegebenen einander schneidenden Geraden gleiche Winkel bildet.

6) Die Mittelnormale einer Strecke ist mit Wm. allein zu konstruieren.

6′) Die Halbierende eines Winkels ist mit M. allein zu konstruieren; ebenso mit M. (L.) und Wsch.

7) Durch einen Punkt A ist zu einer Geraden b die Parallele zu ziehen mittelst L. und Wsch. (— Das L. wird mittelst des rechten Winkels normal zur Geraden gelegt (1), festgehalten und der rechte Winkel an ihm bis zu dem Punkte A verschoben —).

8) Durch einen Punkt zu einer Geraden die Parallele zu konstruieren mittelst L. und M. (nach Übungssatz §. 3, 5).

9) Zur Konstruktion der Parallelen durch einen Punkt A zu einer Geraden b zieht man eine beliebige Strecke c von A nach b, trägt $\sphericalangle bc$ auf derselben Seite von b gegenwendig an beliebigem Punkte an, $\sphericalangle c_1 b_1 = bc$, und macht den Schenkel $c_1 = c$. Der Endpunkt von c_1 liegt dann auf der durch A gehenden Parallelen zu b. — Beweis?

Zur Vereinfachung der Konstruktion nimmt man $\sphericalangle bc$ gleich einem Winkel des Wsch.

Die Konstruktion ist noch einfacher, wenn $\sphericalangle bc = R$ gemacht wird mittels des Wsch.

10) Zur Konstruktion der Winkelhalbierenden trägt man vom Scheitel aus auf den Schenkeln zwei Paar gleiche Strecken ab und verbindet deren Endpunkte übers Kreuz. Der Schnittpunkt des Kreuzes liegt dann auf der Winkelhalbierenden. Warum? — In wiefern ist vorstehende Konstruktion ein specieller Fall von der im Übungssatz 10 des vor. § angegebenen?

11) Zur Konstruktion der Winkelhalbierenden kann man auch vom Scheitel aus auf den Schenkeln gleiche Strecken abtragen und durch deren Endpunkte je eine Parallele zum andern Schenkel ziehen. Der Schnittpunkt der letzteren Geraden liegt auf der Winkelhalbierenden. Warum?

12) Die Symmetrieaxe und zwei symmetrische Punkte A und A_1 seien gegeben. Man soll α) zu einem weiteren Punkte B, β) zu einer weiteren Geraden b mittelst L. allein das entsprechende Gebilde konstruieren. — Andeutung zu α) Verbinde B mit A und A_1; zu β) Wähle auf b den beliebigen Punkt C und konstruiere nach α) C_1.

13) Unter der gleichen Annahme wie in 12) ist durch einen beliebigen Punkt die Normale zur Axe zu konstruieren.

14) Zu einer aus Geraden zusammengesetzten Figur soll in Bezug auf eine Axe die symmetrisch entsprechende nach verschiedenen Methoden konstruiert werden.

15) Ein Winkel und ein Punkt P seien gegeben. Man soll durch P eine Gerade so ziehen, dafs sie auf den Schenkeln vom Scheitel aus gleiche Stücke abschneidet.

16) Es sei eine Gerade a und aufser ihr seien zwei Punkte B und C gegeben. Man soll auf a einen Punkt X suchen, so dafs seine Verbindungsgeraden mit B und C gleiche Winkel mit a bilden. — Andeutung: Konstruiere $B_1 \wedge B$ in Bezug auf a.

Es ist zu unterscheiden, ob B und C auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von a liegen. (Anwendung: Billard — Spiegelung.)

17) Es sei $abc\ldots$ ein Geradenzug und aufserhalb desselben seien zwei Punkte P und Q gegeben. Man soll auf jeder der Geraden $a, b, c,\ldots$ einen Punkt so finden, dafs $\sphericalangle \alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$,.. werde. — Andeutung: Vgl. Nr. 16.

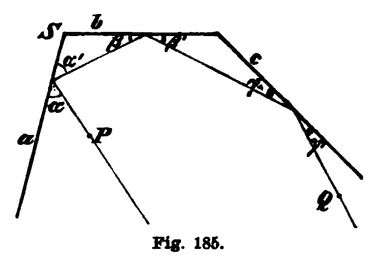


Fig. 185.

Anwendung hiervon auf das Billardspiel durch Beantwortung der Fragen: a) Welchen Weg mufs ein Billardball machen, um nach Berührung der vier Banden des rechteckigen Billards einen andern Ball zu treffen? b) Welchen Weg mufs er machen, um nach Berührung der vier Banden wieder auf den Ausgangspunkt zurückzukommen, und wie läfst sich beweisen, dafs der von dem Ball zurückgelegte Weg gleich ist der Summe der Diagonalen des Billards?

18) In einer Geraden ist ein Punkt zu suchen, der von zwei gegebenen Geraden gleichweit entfernt ist.

19) Auf einem Schenkel eines Winkels ist ein Punkt zu finden,

welcher vom andern Schenkel und von einem gegebenen Punkte P des ersteren gleichweit entfernt ist. — Andeutung: Ziehe von P aus eine Hülfsgerade, welche in P einen Winkel bildet, halb so grofs als der Komplementwinkel des gegebenen.

Aufgaben zum vierten Kapitel.

§. 5. Lehrsätze.

1) Die Winkelhalbierenden gleichwendiger Winkel an einer durch zwei Parallele gelegten Transversalen sind parallel. Ebenso die Winkelhalbierenden gleichwendiger Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln.

2) Umkehrung von 1): Wenn die Winkelhalbierenden gleicher Winkel parallel sind, so sind auch die Schenkel der Winkel paarweise parallel.

3) Eine von zwei Parallelen begrenzte Strecke und die Halbierende eines zwischen der Strecke und der einen Parallelen liegenden Winkels bilden mit der andern Parallelen ein gleichschenkeliges Dreieck.

4) Umkehrung von Übungssatz §. 3, 6.

5) Zieht man im gleichschenkeligen Dreieck die Halbierende eines Basiswinkels bis zum Schenkel und zieht durch den Endpunkt die Parallele zur Basis, so sind die der Basis anliegenden (sogenannten unteren) Abschnitte der Schenkel einander und jener Parallelstrecke gleich.

6) Zwei kongruente Parallelstrahlenbüschel zu beiden Seiten eines sich selbst entsprechenden Strahles sind diametral in Bezug auf jeden Punkt dieses Strahles als Centrum.

7) Zieht man aus einem beliebigen Punkte der Grundseite eines gleichschenkeligen Dreiecks Parallelen zu den Schenkeln, so ist deren Summe gleich dem einen Schenkel.

8) Wird durch jedes Eck A, B, C eines Dreiecks die Parallele zur Gegenseite gezogen, so sind A, B, C die Seitenmitten des neuen Dreiecks.

9) Schneidet man in Fig. 51 (S. 31) auf AB_1 ein Stück $AX = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n}$ von AB_1 ab und zieht BX, so liegt der auf AA_1 entstehende Schnittpunkt Y so, dafs AY bzw. gleich $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n+1}$ von AA_1 ist — und umgekehrt. Auch ist $YX = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n+1}$ von BX. — Andeutung: Verlängere AB_1 um $B_1Z = AX$ und ziehe A_1Z, sowie durch weitere passende Teilpunkte auf AB_1 Parallelen zu A_1Z und wende §. 16, 8c an.

10) Wenn man in einem gleichschenkeligen Dreieck von den Basisecken aus auf den einen Schenkel und auf die Verlängerung des anderen die gleiche Strecke abträgt, so wird die Verbindungsstrecke der Grenzpunkte von der Basis halbiert (und umgekehrt). — Andeutung: Man ziehe eine weitere Gerade parallel zur Basis durch den einen Grenzpunkt der angetragenen Strecke.

11) Im rechtwinkeligen Dreieck ist die von der Mitte M der Hypotenuse AB nach dem Scheitel des rechten Winkels C gezogene Strecke MC gleich der halben Hypotenuse. — Andeutung: Ziehe $ML \parallel AC$, so ist $MC \wedge MB$ zu ML als Axe.

§. 6. Konstruktionsaufgaben.

1) Durch einen Punkt ist zu einer Geraden die Parallele zu ziehen mittels a) L. und M. (Fig. 51 entsprechend), b) L. und Wm., c) L. und Wsch. (Vgl. unten Nr. 13.)

2) Zu einem gegebenen Punkte A und einer Geraden b durch ihn sind in Bezug auf ein Centrum die diametralen Gebilde zu zeichnen.

3) Zwei diametrale Gerade und das Centrum sind gegeben; man soll allein mittels L. a) zu einer weiteren Geraden, b) zu einem weiteren Punkte je das entsprechende Gebilde finden.

4) Zu einer Geraden a ist mittelst L. und Wsch. eine Normale zu ziehen. — Andeutung: Lege L. und an dieses die längste Seite des Wsch. so, dafs dessen zweite Seite an a liegt; dann verschiebe das Wsch. beliebig längs des L. und ziehe die Gerade längs der dritten Seite des Wsch.

5) Um eine Strecke a zu halbieren, zieht man a) durch deren Grenzpunkte gegengerichtete parallele und gleiche Strecken und verbindet die Endpunkte der letzteren, oder: b) man zieht durch die Grenzpunkte von a zwei Paare gegengerichteter Parallelen und verbindet deren Schnittpunkte.

6) Eine Strecke s und aufser ihr ein Punkt P sind gegeben; man soll s durch eine Gerade von P aus halbieren. — Vgl. Nr. 5.

7) Durch einen von drei (nicht in einer Geraden liegenden) Punkten eine Gerade zu ziehen, von welcher die beiden anderen Punkte gleiche Abstände haben.

8) Durch einen Punkt P innerhalb eines Winkels ist eine Gerade so zu ziehen, dafs ihre von den Schenkeln begrenzte Strecke in P halbiert wird.

9) Durch einen Punkt P aufserhalb eines Winkels ist eine Gerade so zu ziehen, dafs die auf ihr durch die Winkelschenkel und P begrenzten Strecken gleich werden.

10) In einen Winkel ist eine Strecke s so einzutragen, dafs sie einer gegebenen Geraden parallel wird.

11) Zwischen zwei Parallele ist eine Strecke von gegebener Gröfse so einzutragen, dafs sie (oder ihre Verlängerung) durch einen gegebenen Punkt P geht.

12) In der Ebene der Fig. 51 sei ein Punkt P gegeben. Man soll durch ihn eine Gerade so ziehen, dafs die von den zwei Paaren Paralleler begrenzten Strecken gleiche Gröfse bekommen. — Andeutung: Ziehe die Parallele zu AA_1 (oder BB_1) durch P.

13) Durch einen Punkt ist zu einer Geraden die Parallele zu ziehen mittels L. und M. nach §. 16, 10a.

14) Wenn zwei Parallele a und a_1 und deren Mittelparallele gegeben sind, so findet man die Mitte einer Strecke, indem man ihre Grenzpunkte auf die Parallelen legt.

15) Unter denselben Bedingungen wie in Nr. 14 soll durch einen Punkt auf einer der Parallelen a oder a_1 zu einer Geraden die Parallele konstruiert werden a) mit L. allein, b) mit M. allein.

16) Zwei Parallele und ein beliebiger Punkt P sind gegeben. Man soll ein gleichschenkeliges Dreieck so konstruieren, dafs P seine Spitze wird, während seine beiden anderen Ecken in die Parallelen fallen und die Grundseite einer gegebenen Geraden g parallel wird. — Andeutung: Auf welchen Geraden mufs der Mittelpunkt der Basis liegen?

17) Um eine Strecke a in n gleiche Teile zu teilen, zieht man durch einen ihrer Grenzpunkte eine Gerade, trägt auf dieser vom Grenzpunkte aus nach derselben Richtung n beliebige gleiche Strecken ab, verbindet den Endpunkt der letzten mit dem zweiten Grenzpunkte von a und zieht durch die übrigen Punkte Parallelen zu den genannten Verbindungsgeraden.

18) Trägt man eine Strecke $(n-1)$mal an und teilt dann die so erhaltene ganze Strecke in n gleiche Teile, so erhält man zwischen den Grenzpunkten der zuerst angetragenen Strecken und den neuen Teilpunkten der Reihe nach $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \cdots$ der ursprünglichen Strecke.

Anwendung. Zwei Mafsstäbe, deren einer Millimeter angiebt, während der andere auf die angegebene Weise durch Teilung von 9 mm in 10 gleiche Teile erhalten wurde, können folgendermafsen zur genaueren Bestimmung der Länge einer Strecke benutzt werden. Man legt einerseits der Strecke von dem einen Grenzpunkte aus den Nullpunkt des ersten Mafsstabes an, anderseits an den andern Grenzpunkt den Nullpunkt des zweiten Mafsstabes, dann kommen zu der Anzahl der am Hauptmafsstabe abgelesenen Millimeter noch so viele Zehntel-Millimeter hinzu, als auf dem zweiten Mafsstabe (vom Nullpunkte ab) Teile gezählt werden bis dahin, wo zwei Teilstriche beider Mafsstäbe

zusammentreffen. — Eine solche Einrichtung zur Messung sehr kleiner Strecken heifst Nonius und wird auch zur Messung von Winkeln verwertet. [Der Name zu Ehren des Portugiesen Nunez, lat. Nonius († 1577), welcher eine von der beschriebenen freilich verschiedene Vorrichtung angab; den Hauptteil, den beweglichen Schieber, führte erst Vernier ein (1631).]

Aufgaben zum fünften Kapitel.

§. 7. Lehrsätze.

1) Im rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreieck beträgt jeder Winkel an der Hypotenuse $\frac{1}{2}R$.

2) In einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen Hypotenuse doppelt so grofs als eine Kathete ist, beträgt der Gegenwinkel der letzteren $\frac{1}{3}R$, der andere Winkel $\frac{2}{3}R$.

3) Sind die Winkel eines Dreiecks $\frac{1}{3}R$, $\frac{2}{3}R$, R, so ist die Hypotenuse das Doppelte der einen Kathete.

4) Verlängert man im rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse je um die anliegende Kathete und verbindet die entstehenden Endpunkte mit dem Scheitel des rechten Winkels, so bilden die Verbindungsgeraden mit einander $1\frac{1}{2}R$.

Zusatz. Welcher entsprechende Winkel entsteht, wenn man die beiden Katheten beide einwärts oder wenn man die eine ein- und die andere auswärts abträgt?

5) Trägt man in einem rechtwinkeligen Dreieck den einen spitzen Winkel am andern Grenzpunkte der anliegenden Kathete in den rechten Winkel hinein, so trifft der Schenkel desselben die Mitte der Hypotenuse.

6) Wird in dem gleichschenkeligen Dreieck ABC, dessen Spitze B sei, CB verlängert bis D, so dafs $BD = CB$, so ist DA normal zu AC.

7) Ist in einem Dreieck die Entfernung eines Eckes von der Mitte der Gegenseite gleich der Hälfte dieser Seite, so ist der Winkel an jenem Eck ein rechter.

8) Im gleichschenkeligen Dreieck ist durch die Gröfse eines Winkels die der übrigen Winkel bestimmt. — Zahlenbeispiel. — Wie konstruiert man die übrigen mittels Wm., wenn der eine gezeichnet vorliegt?

9) Im gleichschenkeligen Dreieck ist

α) der Aufsenwinkel an der Spitze doppelt so grofs als ein Basiswinkel,

β) der Basiswinkel gleich R weniger dem halben Winkel an der Spitze,

γ) ein Aufsenwinkel an der Grundseite gleich R vermehrt um den halben Winkel an der Spitze.

10) Trägt man vom Scheitel A eines spitzen Winkels aus auf dem einen Schenkel eine Strecke AB ab und trägt man dann diese von B aus bis zum andern Schenkel, $BC = AB$, und wieder bis zum ersten Schenkel $CD = AB$ u. s. f., so sind die Basiswinkel der entstehenden gleichschenkeligen Dreiecke bezüglich das 2, 3, 4, $\cdots$ fache des Winkels A.

11) In einem gleichschenkeligen Dreieck, in welchem jeder Basiswinkel $\frac{1}{3}R$ beträgt, teilen die Mittelnormalen der Schenkel die Grundseite in drei gleiche Teile.

12) Wählt man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks Punkte K, L, M, die je von den Ecken A, B, C um $\frac{1}{3}$ der Seiten entfernt sind, so bilden die Verbindungsgeraden der Punkte ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten zu denen des ursprünglichen normal sind. — Andeutung: Halbiere z. B. AM in X und ziehe XK.

13) Teilt man jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks in drei gleiche Teile und verbindet je die einem Eck zunächst liegenden Teilpunkte, so entsteht ein Sechseck mit gleichen Seiten und Winkeln.

14) Die aus dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreiecks zur Hypotenuse gefällte Normale*) teilt das Dreieck in zwei andere, welche unter einander und mit dem ganzen Dreieck einzeln gleiche Winkel haben.

15) Die Halbierenden zweier gegenwendigen Winkel an zwei von einer Transversalen durchschnittenen Parallelen sind normal zu einander.

16) Die Halbierende eines Winkels, ein Schenkel desselben und eine Parallele zum andern Schenkel bilden ein gleichgeneigtes Dreieck.

17) Werden in einem Dreiecke von den Ecken aus (oder von beliebigen auf den Seiten liegenden Punkten aus) gegen die Seiten unter gleichwendig gleichen Winkeln Geraden gezogen, so bilden letztere ein neues Dreieck mit denselben Winkeln wie das ursprüngliche. — Besonderer Fall, wenn die Geraden normal zu den Seiten (oder zu deren Verlängerungen) sind.

18) Zwischen den Schenkeln a und b eines Winkels werden drei Halbstrahlen p, q, r so gezogen, dafs der Scheitel von p und q auf a, der von q und r auf b liegt und dafs p und q mit den Gegenrichtungen von a gleiche Winkel bilden, ebenso q und r mit den Gegenrichtungen von b. Alsdann ist der Winkel der Gegenrichtung des Halbstrahles p mit dem Halbstrahle $r = 2 \sphericalangle ab$.

*) Erklärung: Die von einem Eck eines Dreiecks auf die Gegenseite gefällte Normale heifst die zur betreffenden Seite gehörige Höhe des Dreiecks.

Hierauf beruht die Theorie des **Winkelspiegels**, der dem Geometer zum Abstecken des rechten Winkels dient $\left(\sphericalangle\, ab = \frac{R}{2}\right)$, und des **Spiegelsextanten**, der hauptsächlich zur See als Winkelmeſsinstrument benützt wird.

19) Zieht man von der Halbierenden eines Winkels gleiche Strecken nach dessen Schenkeln, so bilden sie gleiche Winkel mit diesem.

20) Wie viele Diagonalen hat ein 4, 5, 6, $\cdots$ n-eck?

21) Zu zeigen, daſs es mit Rücksicht auf die Anzahl von überstumpfen, stumpfen, rechten, spitzen Winkeln zehn Arten von Vierecken giebt.

22) Jeder Winkel eines n-ecks, dessen Winkel alle einander gleich sind, ist $\left(2 - \frac{4}{n}\right)R$.

23) Die Summe der hohlen Winkel α, β, γ, δ, ε eines Sternfünfeckes ist $= 2R$. Wie groſs ist die Summe der hohlen Winkel eines Sternsiebeneckes?

Fig. 186.

24) In einem gleichwinkeligen $2n$-eck ist jede Seite parallel zur $n$ten folgenden Seite.

25) Zieht man von einem Punkte einer Symmetrieaxe zwei Geraden, welche mit zwei symmetrischen Geraden gegenwendig gleiche Winkel bilden, so sind jene Geraden selbst symmetrisch.

26) Es soll der Satz in §. 17, 6 bewiesen werden mittels Zerlegung des Vielecks in Dreiecke

α) durch Diagonalen von einem Eck aus,

β) durch Strecken, welche von einem Punkte im Inneren des Vielecks nach den Ecken gehen.

27) Die Halbierenden zweier Winkel, deren Schenkel normal zu einander stehen, sind ebenfalls normal zu einander oder parallel.

28) Werden von einem Punkte A Normalen zu den Schenkeln b und c eines Winkels gezogen, so bildet jede der Winkelhalbierenden der Normalen mit den Schenkeln b und c ein gleichgeneigtes Dreieck. — Unterscheidung, ob A auf b (oder c) liegt oder nicht.

29) Die Mittelnormalen der Verbindungsstrecken der Grenzpunkte zweier gleichen Strecken schneiden einander auf einer Winkelhalbierenden beider Geraden.

§. 8. Konstruktionen und Berechnungen.

1) In der Fig. 186 sind aus folgenden Winkeln die übrigen zu berechnen: $x = 48^0$, $\alpha = 32^0$, $y = 95^0$, $z = 55^0$.

2) In einem gleichschenkeligen Dreieck sei

α) der Winkel an der Spitze $= 74^0 29'$ oder $= 179^0 56'$, wie grofs ist der Basiswinkel?

β) der Basiswinkel $= 80^0 50'$, wie grofs ist der Winkel an der Spitze?

γ) der Basiswinkel das Doppelte des Winkels an der Spitze, wie grofs sind beide?

3) Aus zwei gegebenen Winkeln eines Dreiecks den dritten zu bestimmen, ohne das Dreieck selbst zu zeichnen.

4) Wie grofs sind die Winkel α, β, γ eines Dreiecks, wenn

$$1)\ \alpha = \beta = 2\gamma,\quad 2)\ \alpha = \beta = \frac{\gamma}{2},\quad 3)\ \alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{6},$$

$$4)\ \alpha + \beta = \gamma,\quad \alpha - \beta = \frac{\gamma}{3} \text{ sein soll?}$$

5) Von den Dreieckswinkeln α, β, γ sei α um $6^0 47'$ kleiner als β und β um $9^0 25'$ gröfser als γ. Wie grofs sind sie?

6) Man erhält die Halbierende eines Winkels, indem man eine beliebige Strecke sowohl auf dem einen Schenkel, als auch auf dem Gegenstrahl des andern Schenkels vom Scheitel aus abträgt und zur Verbindungsgeraden der Endpunkte dieser Strecken die Parallele durch den Scheitel zieht. — Warum?

7) Man soll die Halbierende des Winkels zweier Geraden a und b zeichnen, ohne deren Durchschnitt zu benützen.

Andeutung: Ziehe eine Gerade c durch a und b; ist dann $\sphericalangle bc = ca$, so ziehe die Mittelnormale zur Strecke c; ist aber etwa $\sphericalangle bc > ca$, so ziehe durch den Schnitt von b und c noch d so, dafs $\sphericalangle bd = ca$, halbiere $\sphericalangle dc$ u. s. w. — Oder: Ziehe eine beliebige Parallele c zu a, welche b schneidet, halbiere $\sphericalangle bc$ durch d, ziehe eine beliebige Normale zur Strecke d u. s. w.

8) Um durch einen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche mit einer Geraden a einen gegebenen Winkel α bildet, fälle man durch P die Normale b zu a, trage in P an b den $\sphericalangle \alpha$ an $= \sphericalangle bc$ und ziehe in P die Normale d zu c.

9) Wie grofs ist jeder Winkel eines 4, 5, 6, $\cdots$ n-ecks, wenn alle Winkel gleich sind? — Müssen unter dieser Bedingung auch alle Seiten gleiche Gröfse haben?

10) Wie viele Ecken hat ein Vieleck, wenn jeder einzelne Winkel desselben α) $1R$, β) $\frac{4}{3}R$, γ) $\frac{5}{3}R$, δ) $\frac{9}{5}R$, ε) $\frac{8}{5}R$, ζ) $\frac{6}{5}R$ beträgt? (Vgl. Aufg. §. 7, 22.)

11) Um die Normale zu einer Geraden a mittels des Winkelscheites zu konstruieren, legt man L. und daran anliegend eine Kathete des Wsch. so, dafs die Hypotenuse des letzteren an a zu liegen kommt; man dreht dann das Wsch. so, dafs seine dritte Seite an das Lineal zu liegen kommt, während letzteres die ursprüngliche

Lage beibehält; die Hypotenuse des Wsch. giebt dann die Richtung der Normalen zu a. — Warum?

12) In der Ebene liege dieselbe Figur zweimal gleichwendig gezeichnet vor; man soll denjenigen Punkt der Ebene konstruieren, um welchen die Figur gedreht werden mufs, um die andere zu decken.

Aufgaben zum sechsten Kapitel.

§. 9.

1) Zu einem gegebenen Drei-, Vier-,.. Vieleck ist ein kongruentes in perspektivischer Lage zu zeichnen.

2) Zwei kongruente Punktreihen können in symmetrische Lage gebracht werden durch Verschiebung längs einer Geraden g: zeichnet man nämlich die beiden Punkte S_1 und S_2 der Punktreihen, welche dem Schnittpunkte S ihrer Träger entsprechen und verbindet man die Mittelpunkte von SS_1 und SS_2, so ist die Verbindungsgerade die gesuchte g.

3) Zwei gegenwendig kongruente Strahlenbüschel können in symmetrische Lage gebracht werden durch Verschiebung längs einer Geraden g: zeichnet man nämlich die beiden Strahlen s_1 und s_2, welche der Verbindungsgeraden der Träger entsprechen, und errichtet auf der Winkelhalbierenden von ss_1 oder ss_2 eine Normale, so ist diese g.

4) Wie vereinfachen sich die Bedingungen für die Kongruenz
α) rechtwinkeliger,
β) gleichschenkeliger Dreiecke?

5) Ein Dreieck mit zwei gleichen Höhen ist gleichschenkelig.

6) Die Verbindungsgeraden der Seitenmitten eines Dreiecks teilen dasselbe in vier kongruente Dreiecke.

7) Schneidet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von den Ecken aus jeweils im gleichen Sinne des Umlaufes um das Dreieck gleiche Strecken ab, so bestimmen

α) deren Endpunkte,

β) die Verbindungsgeraden der Endpunkte mit den Gegenecken je ein gleichseitiges Dreieck. (Vgl. Aufg. §. 7, 12.) — Umkehrung?

8) Zieht man in einem gleichschenkeligen Dreieck von einem beliebigen Punkte der Grundseite aus die Normalstrecken zu den Schenkeln, so ist deren Summe gleich der Höhe auf den Schenkel. — Andeutung: Man ziehe die Höhe auf einen Schenkel und durch den gegebenen Punkt die Parallele zu letzterem.

9) Zieht man von einem Punkte P im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC die Normalstrecken zu den Seiten, so ist deren Summe gleich der Höhe des Dreiecks. — Andeutung: Ziehe durch P die Parallele zu einer Seite und benütze den vorhergehenden Übungssatz.

Wie ändert sich der Satz, wenn P auf eine Seite selbst oder aufserhalb des Dreiecks fällt? (Im letzteren Fall sind drei Fälle zu unterscheiden!)

10) Der Satz No. 11 in §. 5 der Aufgaben ist zu beweisen mittels Konstruktion des Punktes, der in Bezug auf die Hypotenusenmitte diametral mit dem Scheitel des rechten Winkels liegt.

11) Welche möglichen Zusammenstellungen zu je dreien kann man aus den sechs Stücken a, b, c, α, β, γ eines Dreiecks bilden? Wenn zwei Dreiecke in drei solchen Stücken übereinstimmen, sind sie dann kongruent?

12) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Höhe übereinstimmen und in

a) der zugehörigen Seite und einem anliegenden Winkel;

b) der zugehörigen Seite und einer zweiten Seite;

c) deren entsprechend gleichwendigen Winkeln mit den Seiten;

d) zwei gleichliegenden Winkeln;

e) den nicht zu ihr gehörigen Seiten, wenn diese in beiden Dreiecken übereinstimmend auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Höhe liegen.

13) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in der Strecke einer Winkelhalbierenden von dem Eck bis zur Gegenseite und in

a) dem halbierten Winkel und einer denselben mitbildenden Seite;

b) zwei gleichliegenden Winkeln;

c) einem gleichliegenden Winkel und dem Winkel der Halbierenden mit der entsprechenden Richtung der Gegenseite;

d) einer den halbierten Winkel mitbildenden Seite und dem ihr anliegenden Abschnitt der Gegenseite.

14) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und in der Verbindungsstrecke von der Mitte dieser Seite nach dem Gegeneck (der sog. Mittelstrecke oder Schwerlinie) und noch in

a) einer zweiten Seite;

b) dem Winkel der Mittelstrecke mit der halbierten Seite;

c) einem Winkel der halbierten Seite mit einer zweiten Seite, falls der Winkel dieser Seite mit der Mittelstrecke in beiden Dreiecken spitz oder in beiden stumpf ist;

d) dem Winkel der Mittelstrecke mit einer zweiten Seite, falls der Winkel der Mittelstrecke mit der halbierten Seite in beiden Dreiecken von gleicher Art ist.

15) Es sollen die Bedingungen für die Kongruenz von Vierecken aufgestellt werden (gemäfs §. 21, 7).

Aufgaben zum siebenten Kapitel.

§. 10. Lehrsätze.

1) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Halbierenden eines Winkels liegt, schneidet auf dessen beiden Schenkeln gleiche Strecken ab.

2) Zwei Sehnen, welche mit dem durch ihren Schnittpunkt gehenden Durchmesser gegenwendig gleiche Winkel bilden, sind einander gleich; zugleich ist der einerseits des Durchmessers von den Sehnen begrenzte Bogen gleich dem anderseits von ihnen begrenzten.

3) Zwei Sehnen können einander nicht halbieren (aufser wenn sie Durchmesser sind).

4) Eine zu einer Sehne parallele Tangente halbiert den (die) Bogen der Sehne. — Umkehrung?

5) Die Tangenten an den Grenzpunkten eines Durchmessers sind parallel. — Umkehrung?

6) Wie liegen die Endpunkte aller an einen Kreis gezogenen tangentialen und von den Berührungspunkten ab gleichen Strecken?

7) Fällt man von den Grenzpunkten eines Durchmessers auf eine Sehne die Normalen, so sind die zwischen den Fufspunkten der Normalen und dem Kreise liegenden Strecken von gleicher Gröfse. — Andeutung: Ziehe auch vom Mittelpunkte die Normale zur Sehne.

8) Die in den Grenzpunkten einer Sehne errichteten Normalen treffen einen beliebigen Durchmesser in zwei Punkten, die von den Grenzpunkten des Durchmessers gleichweit entfernt sind.

9) Zwei Verbindungsgeraden der Grenzpunkte paralleler Sehnen schneiden einander auf dem zu ihnen normalen Durchmesser.

10) Auf jeder durch das Kreiscentrum gehenden Geraden sind die Abschnitte zwischen dem Kreise und zwei beliebigen parallelen Tangenten von gleicher Gröfse?

11) Auf jeder zu zwei parallelen Tangenten normalen Sekante sind die Abschnitte zwischen Kreis und Tangenten einander gleich.

12) Welche Lage haben die Mitten aller Sehnen von gleicher Gröfse?

13) Bewegt sich eine Strecke, stets gleiche Gröfse behaltend, mit ihren Grenzpunkten auf zwei normalen Geraden, so bewegt sich ihre Mitte auf einem Kreise. — Vgl. Aufg. §. 5, 11.

14) Die Verbindungsgerade zweier Grenzpunkte von einem Paar Durchmesser ist parallel der Verbindungsgerade der anderen Grenzpunkte; beide Verbindungsgeraden treffen irgend ein Paar paralleler Tangenten in Punkten, deren Verbindungsgeraden durch die Kreismitte gehen.

15) Werden zwei parallele Tangenten von den Verlängerungen zweier Durchmesser geschnitten, so sind die Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte parallel und treffen den Kreis (möglicherweise) in den Grenzpunkten zweier Durchmesser.

16) Zwei Verbindungsgerade der Grenzpunkte eines Paares paralleler Sehnen treffen das zu diesen normale Tangentenpaar in Punkten, deren weitere Verbindungsgeraden den Sehnen parallel sind.

17) Werden zwei parallele Tangenten von zwei Normalen durchschnitten, so schneiden einander die Verbindungsgeraden ihrer Schnittpunkte auf dem zu den Tangenten parallelen Durchmesser und treffen (möglicherweise) den Kreis in den Grenzpunkten von Sehnen, welche ebenfalls normal zu den Tangenten stehen.

18) Wird eine Sehne AB um den Radius verlängert und vom Endpunkte C der Durchmesser CD gezogen, so ist der eine zwischen den Sekanten liegende Bogen dreimal so grofs als der andere. — Andeutung: Ziehe Sehne $BX \parallel CD$ und dann Durchmesser XY.

19) An zwei Kreise, welche keine Fläche gemeinsam haben, lassen sich zwei Paare gemeinsamer Tangenten ziehen, sog. äufsere und innere Tangenten. Von diesen gilt:

a) Die Abschnitte der äufseren Tangenten zwischen ihren Berührungspunkten sind einander gleich, ebenso die Abschnitte der inneren Tangenten;

b) die Abschnitte der inneren Tangenten bis zu ihren Schnittpunkten mit den äufseren sind gleich jenen Abschnitten der äufseren Tangenten.

20) Zwei Kreislinien können nicht einander halbieren.

21) Auf einer durch zwei koncentrische Kreise gehenden Geraden liegen zwischen den Kreisen gleiche Strecken.

Aufgaben zum achten Kapitel.

§. 11. Konstruktionen.

1) Ein gegebener Winkel α soll verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht werden.

2) Man soll drei gegebene Strecken a, b, c so von einem Punkte ausgehend antragen, dafs ihre Endpunkte in einer Geraden liegen und gleichweit von einander entfernt sind. — Andeutung: Es sei $PM = a$ die kleinste Strecke; dann zeichne in Bezug auf M als Centrum $P_1 \,|/|\, P$ und mit Hülfe von P_1 auch die ebenfalls diametral zu diesem Centrum liegenden Endpunkte von b und c.

3) Von einem gegebenen Kreise (oder Kreisbogen) ist das Centrum zu finden.

4) Auf einer Geraden (oder auf einem Kreise) ist ein Punkt zu finden, welcher gleichweit entfernt ist a) von zwei gegebenen Punkten, b) von zwei gegebenen Geraden.

5) Man soll mit L. und Z. einen Winkel a) von 60^0, b) von 30^0, c) von 90^0 konstruieren.

6) Man soll einen rechten Winkel in drei gleiche Teile teilen.

7) Es sind zwei Punkte A und B gegeben. Es soll eine Reihe von Punkten der Geraden AB (die nicht gezogen ist) mit dem Zirkel allein bestimmt werden, ohne letzteren weiter als um die Strecke AB zu öffnen. — Andeutung: Man konstruiere zwei zur Geraden symmetrische Punkte und von diesen aus einen weiteren Axenpunkt; diesen benütze man in gleicher Weise zur Konstruktion eines weiteren Punktes u. s. f.

8) Durch einen Punkt in einer Kreisfläche ist eine Sehne zu ziehen, welche in jenem Punkte halbiert wird.

9) Die Aufgabe in §. 8, 7 ist mit Zirkel und Lineal zu lösen.

10) Durch einen auf einer Kreislinie liegenden Punkt ist eine Sehne zu ziehen, deren Abstand von der Kreismitte gegeben ist.

11) Es ist der geometrische Ort des Endpunktes jeder Tangente von gegebener Länge an einen Kreis zu zeichnen.

12) Es ist auf einer Geraden oder einem Kreise ein Punkt zu bestimmen, von welchem aus die Tangente an einen gegebenen Kreis eine bestimmte Länge hat.

13) Durch einen Punkt a) in einer, b) aufserhalb einer Kreisfläche ist eine Gerade so zu legen, dafs die innerhalb des Kreises liegende Strecke eine gegebene Länge habe. (Determination.)

14) Die Konstruktion der Tangenten von A aus an einen Kreis M kann so geschehen, dafs man MA zieht, im Schnittpunkte B mit dem Kreise die Normale zu MA, hierauf von M aus mit MA als Radius einen Kreis, welcher die Normale in C und C_1 durchschneidet, und endlich MXC und MYC_1 zieht: AX und AY sind dann die Tangenten. Warum?

15) An einen gegebenen Kreis ist eine Tangente zu ziehen,

a) welche von zwei gegebenen Punkten gleichweit entfernt sei;

b) welche mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bilde;

c) so dafs das zwischen zwei gegebenen Parallelen liegende Stück derselben eine gegebene Gröfse habe.

16) Es seien zwei Kreise K_1 und K_2 gegeben; man soll eine Gerade so ziehen, dafs sie

a) K_1 berühre und in K_2 eine Sehne von gegebener Länge bilde;

b) in K_1 und K_2 Sehnen von gegebenen Längen bilde.

Bemerkung. Um die folgenden Aufgaben möglichst kurz angeben zu können, bezeichnen wir die Seitenstrecken eines Dreiecks durch a, b, c, die gegenüberliegenden Winkel bezw. durch α, β, γ, den Umfang durch u, die Höhe auf c durch h_3, die zwei anderen Höhen bzw. durch h_1 und h_2, die von h_3 auf c gebildeten Abschnitte, welche an a und b liegen, bezw. durch a_3 und b_3. — Ist das Dreieck ein rechtwinkeliges, so sei $\gamma = R$, also c die Hy-

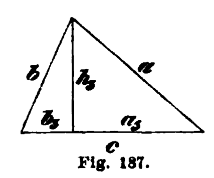


Fig. 187.

potenuse, h_3 deren Höhe; ist das Dreieck ein gleichschenkeliges, so sei $a = b$, also c die Grundseite, h_3 deren Höhe.

Es soll nun ein rechtwinkeliges Dreieck konstruiert werden aus folgenden Bestimmungsstücken*):

17) a, b; 18) a, c; 19) α, c;
20) α, a; 21) h_3, a; 22) h_3, α;
23) h_3, a_3; 24) a, a_3; 25) α, a_3;
26) $a + b, c$; 27) $a + b, \alpha$; 28) $a - b, c$;
29) $a - b, \alpha$; 30) $a + c, b$; 31) $a + c, \alpha$;
32) $c - a, b$; 33) $c - a, \alpha$; 34) $a + h_3, \alpha$;
35) $a - h_3, \alpha$; 36) $a_3 - b_3, \alpha$; 37) $a + b + c, \alpha$;
38) $a + b - c, \alpha$; 39) $\alpha - 2\beta = 0, c$; 40) $\alpha - 3\beta = 0, a$;
41) $b - \frac{1}{2}c = 0, a$.

Es soll ein gleichschenkeliges Dreieck konstruiert werden, wenn gegeben:

42) c, a; 43) c, α; 44) c, γ; 45) c, h_3;
46) a, α; 47) a, γ; 48) a, h_3; 49) α, h_3;
50) γ, h_3; 51) c, h_1; 52) a, h_1; 53) α, h_1;
54) γ, h_1; 55) $a + c, \alpha$; 56) $a + c, \gamma$; 57) $a + h_3, c$;
58) $a - h_3, c$; 59) $a + h_3, \gamma$; 60) $a - h_3, \gamma$; 61) u, h_3;
62) u, α; 63) u, γ.

Es soll ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck gezeichnet werden aus:

64) c; 65) h_3; 66) $c + a$; 67) $c - a$; 68) u;
69) $a + h_3$; 70) $a - h_3$.

Es soll ein gleichseitiges Dreieck konstruiert werden aus:

71) a, 72) u; 73) h; 74) $a + h$; 75) $a - h$.

Es soll ein Dreieck konstruiert werden aus folgenden Bestimmungsstücken:

76) a, b, γ; 77) a, α, β;
78) a, b, c; 79) a, b, α;
80) $a, b, b + c$; 81) $a, a + b, a + c$;
82) $a, c, b - c$; 83) $a, b, b - c$;
84) a, b, h_3; 85) a, h_3, α;
86) a, h_3, b_3; 87) a, h_3, γ;
88) h_3, α, β; 89) h_3, a_3, b_3;

---

*) Die im Texte vermittelst abkürzender Zeichen gegebenen Aufgaben sind stets in Worte zu kleiden.

90) h_3, a_3, α;
91) h_3, c, α;
92) h_3, c, b;
93) $a + b, h_3, \alpha$;
94) $a - b, h_3, \beta$;
95) $a, b + c, \beta$;
96) $a, b - c, \beta$;
97) $a, b + c, \alpha$;
98) $a, b - c, \alpha$;
99) $a, b + h_3, \alpha$;
100) $a, b - h_3, \alpha$;
101) $b - h_3, \alpha, \beta$;
102) $a_3 - b_3, a, \beta$;
103) $a_3 - b_3, a, b$;
104) $a_3 - b_3, a, \alpha$;
105) $a_3 - b_3, a, h_3$;
106) $a_3 - b_3, \alpha, \beta$;
107) $a_3 - b_3, c, h$;
108) $a_3 - b_3, a + b, \beta$;
109) $a, b, \alpha + \beta$;
110) $a, \alpha + \beta, \alpha + \gamma$;
111) $a, b, \alpha - \beta$;
112) $a, \alpha - \beta, \alpha + \gamma$;
113) $a, \alpha - \beta, \gamma$;
114) $a, \alpha + \beta, \alpha - \beta$;
115) u, α, β;
116) u, h_3, β.

117) Auf dem einen Schenkel eines Winkels, dessen Scheitel S sei, ist ein Punkt P gegeben; es soll auf dem andern Schenkel ein Punkt X so konstruiert werden, dafs:

a) $SX = PX$; b) $SX + PX = k$; c) $SX - PX = l$;
d) $PX - SX = m$

wird, wo k, l, m gegebene Strecken sind.

118) Parallel zur Grundseite AB eines Dreiecks ABC soll (auf der einen oder andern Seite von AB) eine Gerade so gezogen werden, dafs, wenn dieselbe die (nötigenfalls verlängerten) Schenkel CA und CB bzw. in X und Y schneidet, dann:

a) $XY = AX$; b) $XY = AX + BY$; c) $XY = AX - BY$;
d) $XY = CX + BY$; e) $XY = CX - BY$;
f) $XY = AX - CY$

wird. — Determinationen.

119) Auf den Seiten AB und AC des Dreiecks ABC sind bzw. die Punkte X und Y so zu bestimmen, dafs:

a) $AX = CY$ und $XY \parallel BC$;

b) $AX = CY$ und XY eine gegebene Gröfse l hat;

c) $AX = XY$ und $BX = AY$; d) $AX = XY = CY$

wird.

120) Um einen gegebenen Mittelpunkt soll man einen Kreis beschreiben, welcher noch einer der folgenden Bedingungen genügt, nämlich:

a) durch einen Punkt geht,
b) eine Gerade berührt,

c) einen Kreis berührt,

d) aus einer Geraden eine Sehne von gegebener Gröſse,

e) aus einem Kreise eine Sehne von gegebener Gröſse ausschneidet.

121) Man soll einen Kreis zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer Geraden liegt und welcher auſserdem

a) durch zwei Punkte geht,

b) eine Gerade in gegebenem Punkte berührt,

c) einen Kreis in gegebenem Punkte berührt,

d) zwei Gerade berührt.

122) Um jeden von zwei gegebenen Punkten ist ein Kreis zu beschreiben, so daſs diese Kreise einander berühren und der eine derselben auſserdem noch

a) durch einen Punkt geht,

b) eine Gerade berührt,

c) einen Kreis berührt.

123) Es sei ein Geradenzug $ABCD\cdot\cdot$ gegeben, der seine hohlen Winkel alle nach einer Seite (nach innen) kehrt. Man beschreibe aus B mit BA als Radius einen Kreisbogen bis zum Schnittpunkte B_1 mit der Verlängerung von CB, dann aus C einen Kreisbogen mit CB_1 als Radius bis zum Schnittpunkte C_1 mit der Verlängerung von DC u. s. w. So entsteht eine aus Kreisbögen zusammengesetzte Kurve (die durch Abwickeln eines Fadens von $ABCD\cdot\cdot$ entstehende Evolvente $AB_1C_1\cdots$ der Evolute $ABC\cdot\cdot$). Man beweise, daſs an dem Grenzpunkte zweier Kreisbögen die Tangente beiden gemeinsam ist und daſs der letzte Radius gleich der Summe der Strecken des Geradenzuges ist (ausschlieſslich der letzten Strecke).

124) Ein sog. Oval entsteht auf folgende Weise. Die Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks werden über die Basis verlängert und von der Spitze desselben wird ein Kreisbogen zwischen die Schenkel beschrieben, dessen Radius gröſser als ein Schenkel ist. Von den Grenzpunkten der Basis wird dann mit dem Überschuſs zwischen Radius und Schenkel als Radius je ein weiterer Kreisbogen im Anschluſs an den ersten bis zur Verlängerung der Basis gezogen. Zu der so erhaltenen Figur wird noch die in Bezug auf die Basis als Axe symmetrische Figur gezeichnet. Der innerhalb der Kurve liegende Teil der Axe heiſst groſse Axe, der entsprechende Teil ihrer Mittelnormalen die kleine Axe.

Es soll nachgewiesen werden, daſs an den Grenzpunkten der Bögen die Tangenten für beide gemeinschaftlich sind und daſs die Figur centrisch ist.

125) Es sei die groſse und kleine Axe AA_1 und BB_1 eines Ovals, sowie der Radius des gröſseren oder des kleineren Bogens gegeben. Das Oval ist gemäſs 124 zu konstruieren.

126) Als weitere Konstruktionen von Ovalen mit gegebenen Axen AA_1 und BB_1 seien folgende auszuführen:

a) Man ziehe AB und halbiere die Winkel, welche AB mit den in A und B errichteten Normalen zu den Axen bildet; vom Schnittpunkte C dieser Winkelhalbierenden fälle man die Normale auf AB und benütze deren Schnittpunkte mit den Axen als Mittelpunkte der Kreisbögen.

b) Man zeichne über der halben grofsen Axe AM ein gleichseitiges Dreieck AMC, trage MB von M aus auf MC nach MD; BD treffe AC in E; die Parallele durch E zu MC bestimmt die Mittelpunkte der Kreisbögen.

Zusatz. Wird einerseits der kleinen Axe die Figur ersetzt durch einen Halbkreis über dieser Axe, so entsteht eine eiförmige Linie. Eine solche ergiebt sich auch, wenn man in der obigen Angabe (124) für die Konstruktion eines Ovales statt eines gleichschenkeligen Dreiecks ein ungleichseitiges Dreieck nimmt.

127) Man soll drei einander berührende Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3 konstruieren, wenn a) $r_1 = r_2 = r_3$, b) $r_1 = r_2$, $r_3 > r_1$, c) $r_1 > r_2 > r_3$.

128) In einen Centriwinkel (insbesondere einen Quadranten) ist ein Kreis zu zeichnen, der die Radien und den Bogen berührt. — Andeutung: Der Berührungspunkt auf letzterem ist zunächst zu bestimmen.

129) Es ist mit gegebenem Radius ein Kreis zu konstruieren, welcher:

a) eine Gerade berührt und aus einer anderen eine gegebene Strecke ausschneidet;

b) aus zwei Geraden gegebene Strecken ausschneidet;

c) eine Gerade berührt und mit einem Kreis eine gemeinsame Sehne von gegebener Länge (speciell gleich dem Durchmesser) hat;

d) mit zwei Kreisen gemeinsame Sehnen von gegebenen Längen hat.

130) Man soll einen Kreis zeichnen, welcher:

a) zwei koncentrische Kreise berührt und zugleich durch einen Punkt geht, der 1) auf einem der Kreise, oder 2) zwischen den Kreisen liegt;

b) zwei parallele Gerade berührt und zugleich durch einen zwischen ihnen gegebenen Punkt geht.

131) Die Schenkel eines Winkels werden von einem gegebenen Kreise berührt. Man soll Kreise zeichnen, welche den Kreis und beide Geraden berühren.

132) Eine Figur, welche von zwei mit gleichen Radien beschriebenen Kreisbögen und deren Centrale begrenzt ist, heifst Spitzbogen. In einen solchen soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher die drei Grenzlinien berührt. — Andeutung: Da der Berührungspunkt auf der Centrale sich sofort ergiebt, so kommt die Lösung

auf §. 29, 5 a γ zurück. — Die Tangente in dem Berührungspunkte des gesuchten und eines gegebenen Kreises schneidet hierbei die Verlängerung der gemeinsamen Sehne der beiden gegebenen Kreise in einem Punkte, der um den Radius der letzteren von ihrer Centralen entfernt ist. Dies ist zu beweisen und darauf eine zweite einfache Konstruktion des fraglichen Kreises zu gründen.

133) Um die Grundseite (den Abschnitt der Centralen) eines Spitzbogens ist ein Halbkreis beschrieben. Der Raum zwischen diesem und dem Spitzbogen selbst soll durch einen berührenden Kreis ausgefüllt werden.

134) Zwei Kreise mit gleichen Radien, die einen dritten gleichartig berühren, sind gegeben. Es sind Kreise zu konstruieren, welche diese drei Kreise berühren.

Aufgaben zum neunten Kapitel.

§. 12.

1) In jedem Viereck mit nur hohlen Winkeln ist die Summe der beiden Diagonalen

a) gröfser als die Summe zweier gegenüberliegenden Seitenstrecken,

b) gröfser als der halbe und kleiner als der ganze Umfang des Vierecks. Beweis?

2) Werden auf drei unter gleichen Winkeln $\left(\frac{4R}{3}\right)$ von demselben Punkte M ausgehenden Halbstrahlen beliebige Punkte A, B, C angenommen, so ist M unter allen Punkten der Ebene derjenige, für welchen die Summe der Entfernungen von A, B, C ein Minimum ist. Beweis? — Andeutung: Die in A, B, C normal zu den Strahlen gezogenen Geraden bilden ein gleichseitiges Dreieck. Auf irgend einen Punkt M_1 wende man Aufgabe §. 9, 9 an.

3) Wird ein im Innern eines Dreiecks liegender Punkt mit den Ecken verbunden, so ist die Summe der Verbindungsstrecken gröfser als der halbe Umfang des Dreiecks.

Aufgaben zum zehnten Kapitel.

§. 13. Lehrsätze.

1) Werden beide Schenkel eines Winkels von einem Kreise durchschnitten, so ist der Winkel gleich der halben Summe oder Differenz der auf den abgeschnittenen Bögen stehenden Centriwinkel, je nachdem der Scheitel des Winkels innerhalb oder aufserhalb des Kreises fällt.

2) Gehen von der Mitte C eines Bogens AB zwei Sehnen CX und CY aus, welche die Sehne AB bzw. in X_1 und Y_1 schneiden ($AX_1 > AY_1$), so ist, wenn noch XY gezogen wird,

$$\sphericalangle AY_1Y = X \text{ und } \sphericalangle XX_1B = Y.$$

3) Welches ist der geometrische Ort der Mitte jeder Sehne eines Kreises, welche von demselben Punkte des Kreises ausgeht? — Andeutung: Fälle auf alle Sehnen die Normalen von M aus.

4) Zwei durch einen Punkt der Kreisfläche gezogene und zu einander normale Sehnen teilen den Kreis in vier Bögen, von welchen je die Summe zweier nicht an einander liegenden gleiche Gröfse hat.

5) Wie lautet die Umkehrung des Satzes in §. 34, 6a? Beweis?

6) Der Satz in §. 24, 3a ist durch vorstehende 5 zu beweisen. — Andeutung: Ziehe in Fig. 80 AB_1.

7) Werden in einem Kreise zwei parallele Sehnen AB und A_1B_1 und je vom einen Grenzpunkte derselben aus wieder zwei parallele Sehnen BC und B_1C_1 gezogen, so sind auch die Verbindungsgeraden CA_1 und C_1A einander parallel.

8) Wie grofs ist ein Tangentenwinkel, wenn dessen Scheitel um den Durchmesser von der Kreismitte absteht?

9) Durchschneidet man zwei Tangenten eines Kreises durch eine dritte, so bilden die Centralen der Schnittpunkte einen Winkel, welcher halb so grofs ist als der Winkel der Berührungsradien der beiden ersten Tangenten.

10) Werden durch den Berührungspunkt zweier Kreise zwei Sekanten gelegt und verbindet man die je in demselben Kreise entstehenden Schnittpunkte, so sind die Verbindungsgeraden parallel.

11) Wenn bei einem Kreise der eine Grenzpunkt eines Durchmessers zugleich Mittelpunkt eines zweiten Kreises ist, so werden die Sehnen des letzteren Kreises, welche nach dem zweiten Grenzpunkte jenes Durchmessers gerichtet sind, von ersterem Kreise halbiert.

12) Ein Schnittpunkt zweier Kreise liegt auf derselben Geraden mit den Grenzpunkten der zwei Durchmesser, die durch den andern Schnittpunkt der Kreise gezogen werden.

13) Berührt ein Kreis einen zweiten und geht er zugleich durch den Mittelpunkt des letzteren, so wird jede durch den Berührungspunkt gehende Sehne des zweiten durch den ersten halbiert.

14) Jede durch den Berührungspunkt zweier Kreise gehende Gerade schneidet in den Kreisen Bögen ab, deren Centriwinkel gleiche Gröfse haben.

15) Schneiden zwei Kreise einander, von welchen der eine durch den Mittelpunkt des andern geht, so schneidet jede durch den einen Schnittpunkt der Kreise gehende Gerade die Kreise in zwei weiteren Punkten, welche mit dem zweiten Schnittpunkte beider Kreise

ein gleichschenkeliges Dreieck bilden. — Andeutung: Man beweise, dafs alle solche Dreiecke in ihren Winkeln übereinstimmen mit dem durch den genannten Mittelpunkt bestimmten Dreieck, das gleichschenkelig ist.

16) Die durch einen Schnittpunkt zweier Kreise gezogenen und durch letztere begrenzten Strecken erscheinen vom zweiten Schnittpunkte aus alle unter demselben Winkel. — Andeutung: Man vergleiche den Winkel zweier solchen Strecken, dessen Scheitel bei dem ersten Schnittpunkte liegt, mit dem Winkel, unter welchem vom zweiten Schnittpunkte aus in jedem Kreise die Verbindungsstrecke der auf ihm liegenden Grenzpunkte jener fraglichen beiden Strecken erscheint.

17) Dreht man zwei Gerade so um zwei Punkte A und B eines Kreises, dafs ihr Schnittpunkt auf der Peripherie des Kreises hingleitet, und dreht man zugleich eine dritte Gerade um einen Punkt C der Tangente in A so, dafs sie stets mit der um A sich drehenden Geraden parallel bleibt, so gleitet der Schnittpunkt X dieser Parallelen und der Geraden durch B auf einem Kreise hin, welcher durch die drei Punkte A, B, C geht. — Andeutung: Führe auf §. 34, 7 zurück durch den Nachweis, dafs $\sphericalangle\, CXB = CAB$ oder $= 2R - CAB$ ist.

§. 14. Konstruktionen und Berechnungen.

1) Welche Gröfse haben die über dem 3., 4., 5., ... Teile eines Kreisumfanges stehenden Peripheriewinkel?

2) Wenn auf einer Kreislinie sechs Punkte gegeben sind, so dafs je zwei auf einander folgende bezüglich $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ des Umfanges begrenzen, welche Winkel bilden dann irgend welche Verbindungsgeraden der Punkte?

3) In einem gegebenen Punkte einer Kreislinie (oder eines Kreisbogens) ist die Tangente zu konstruieren, ohne die Kreismitte zu benützen.

4) In einen gegebenen Kreis ist eine Sehne zu zeichnen, so dafs der über ihr stehende Peripheriewinkel eine gegebene Gröfse hat. — Andeutung: Ziehe eine Tangente in beliebigem Punkte und trage in diesem an die Tangente einwärts den gegebenen Winkel an.

5) Es ist die Gesamtheit der Punkte zu konstruieren, von welchen aus eine gegebene Strecke a unter einem gegebenen Winkel α erscheint (Anwendung auf das Theater). — Andeutung: Trage an a den $\sphericalangle\,\alpha$ an, ziehe die Mittelnormale zu a und schneide sie durch die im Scheitel von α zum zweiten Schenkel errichtete Normale: der Schnittpunkt ist Mittelpunkt.

6) Die Aufgaben §. 11, 18, 19, 26, 28 sollen gelöst werden für den Fall, dafs die Hypotenuse der zu konstruierenden Dreiecke schon ihrer Lage nach gegeben ist.

7) Es ist ein Punkt X zu suchen, so daſs von ihm aus zwei an einander stoſsende Strecken a und b bezw. unter gegebenen Winkeln α und β erscheinen. (Sog. Pothenotsche Aufgabe.) — Andeutung: Zweimalige Anwendung von 5.

Was ergiebt sich, wenn $\alpha + \beta$ den Winkel zwischen a und b zu $2R$ ergänzt?

8) Es ist ein Dreistrahl abc gegeben und eine Strecke $2s$; letztere soll zwischen zwei äuſsere Strahlen so eingetragen werden, daſs sie durch den mittleren Strahl halbiert wird. — Andeutung: Konstruiere nach 6 über s den $\sphericalangle\, ab$ und über s den $\sphericalangle\, bc$; oder verfahre gemäſs den Aufgaben §. 6, 8 und 10.

9) Es ist ein Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade in zwei bestimmten Punkten unter gegebenem Winkel*) schneidet.

10) Es ist ein Kreis zu zeichnen mit gegebenem Radius, welcher einen andern Kreis in gegebenem Punkte rechtwinkelig schneidet.

11) Es ist durch zwei Punkte eines Kreises ein zweiter Kreis zu legen, welcher einen andern gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet.

Aufgaben zum elften Kapitel.

§. 15. Lehrsätze.

1) Welche verschiedenen Arten der Lage können drei Gerade der Ebene haben, wenn man

a) nach der Parallelität,

b) nach der Anzahl ihrer Schnittpunkte ordnet?

2) Es sind die wichtigsten Eigenschaften des Dreiecks anzugeben und darnach zu ordnen, ob sie

a) von den Winkeln,

b) von der Beziehung zwischen Winkeln und gegenüberliegenden Seiten,

c) von den Seiten allein handeln.

3) Die Sätze in §. 35, 2 und 3 sind zu beweisen durch Übertragen der kleineren Strecke auf die gröſsere, bzw. des kleineren Winkels auf den gröſseren. — Andeutung: Ist im $\triangle ABC$ etwa $AB > AC$, so trage AC auf AB ab $= AX$ und ziehe XC u. s. w.; ist aber $\sphericalangle\, C > B$, so mache $\sphericalangle\, BCX = XBC$ und wende §. 35, 1 an.

4) Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die halbe Summe der drei Seiten.

5) Der Umfang eines Dreiecks, dessen Ecken auf den Seiten eines andern Dreiecks liegen, ist kleiner als der Umfang des letzteren.

---

*) Unter dem Schnittwinkel zweier Linien (Kurven) versteht man den Winkel, welchen die Tangenten des Schnittpunktes mit einander bilden.

6) Teilt man in einem gleichschenkeligen Dreieck ABS die Grundseite AB in drei gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte mit der Spitze, so sind die beiden äufseren Winkel, welche bei S entstehen, gleich grofs, aber kleiner als der mittlere. — Andeutung: Es sei $AFGB$ die Reihenfolge der Teilpunkte; mache in Bezug auf F als Centrum S_1 |/| S und vergleiche in der centrischen Figur $ASGS_1$ die Strecken und Winkel mit Benützung von §. 30, 3a und §. 35, 2.

7) Eine Höhe eines Dreiecks ist kleiner als die halbe Summe der anliegenden Seiten. — Was läfst sich also über die Summe der drei Höhen aussagen?

8) Die Halbierende eines Dreieckwinkels teilt die Gegenseite so, dafs jeder Abschnitt kleiner ist als die anliegende Dreieckseite. — Andeutung: §. 17, 2 Zusatz und §. 35, 3.

9) Wird ein Punkt im Innern eines Dreiecks mit den Ecken verbunden, so ist die Summe dieser Verbindungsstrecken kleiner als der Umfang des Dreiecks. (Vgl. auch Aufgabe §. 12, 3.)

10) Der um eine Dreieckseite als Durchmesser beschriebene Kreis geht durch die Fufspunkte der zu den beiden anderen Seiten gehörigen Höhen. — Vgl. §. 33, 7b.

11) Der um einen oberen Höhenabschnitt eines Dreiecks als Durchmesser gezogene Kreis geht durch die Fufspunkte der beiden anderen Höhen. (Vgl. §. 36, 2a.)

12) Der Satz in §. 36, 3 (Existenz des Höhenpunktes) ist mit Benützung von Peripheriewinkeln zu beweisen. — Andeutung: Ziehe im $\triangle ABC$ die Höhen AA_2 und BB_2 und verbinde ihren Schnittpunkt H mit C; ziehe die Kreise über AB und CH bzw. als Durchmesser, so ist:

$$\sphericalangle BAA_2 = BB_2A_2 = HCA_2.$$

13) Von einem Dreiecke, dessen drei Winkel α, β, γ sind und worin deren Ergänzungen zu einem R mit α_1, β_1, γ_1 bezeichnet werden mögen, sollen die folgenden Winkel bestimmt (und die bezüglichen Ergebnisse in Form von Lehrsätzen ausgesprochen) werden:

a) zwischen einer Höhe und einer benachbarten Seite;

b) zwischen der Verbindungsgeraden zweier Höhenfufspunkte und einer benachbarten Seite;

c) zwischen der Verbindungsgeraden zweier Höhenfufspunkte und einer der zugehörigen Höhen;

d) zwischen zwei Verbindungsgeraden von Höhenfufspunkten (vgl. auch 14);

e) zwischen der Verbindungsgeraden einer Seitenmitte mit einem Höhenfufspunkte und der Seite durch letzteren;

f) zwischen derselben Verbindungsgeraden und der ersteren Seite;

g) zwischen den Geraden von einer Seitenmitte nach den Höhenfuſspunkten der anderen Seiten;

h) zwischen den Geraden von einem Höhenfuſspunkte nach zwei Seitenmitten;

i) zwischen den Geraden von einem Höhenfuſspunkte nach einer Seitenmitte und nach dem Höhenfuſspunkte auf letzterer Seite;

k) zwischen den Geraden von der Mitte eines oberen Höhenabschnittes nach den Fuſspunkten der beiden anderen Höhen;

l) zwischen den Geraden von demselben Punkte nach einem auf einer zweiten Höhe ebenso gelegenen Punkte und nach der Mitte der Grundseite zu letzterer Höhe;

m) zwischen den nach den Ecken gehenden Radien des umgeschriebenen Kreises;

n) zwischen einem solchen Radius und einer benachbarten Seite;

o) zwischen einem solchen Radius und einer benachbarten Höhe;

p) zwischen zwei Winkelhalbierenden;

q) zwischen einer Winkelhalbierenden und einer benachbarten Höhe;

r) zwischen einer Winkelhabierenden und dem zu dem Berührungspunkt eines Schenkels dieses Winkels gezogenen Radius des eingeschriebenen Kreises. [— Man vergleiche mit *p*) und konstruiere hiernach um einen gegebenen Kreis ein Tangentendreiseit, dessen Ecken auf drei gegebenen vom Centrum ausgehenden Halbstrahlen liegen.]

s) zwischen den Halbierenden zweier Auſsenwinkel u. s. w.

14) Die Höhen eines Dreiecks halbieren die Winkel des von ihren Fuſspunkten gebildeten Dreiecks. — Andeutung: Benütze 10 und §. 34, 6.

15) Die Schwerlinie zu einer Seite und die Verbindungsgeraden der Mitten der beiden anderen Seiten halbieren einander.

16) Centrum der Ecken und Schwerpunkt eines Dreiecks sind für das aus dessen Seitenmitten gebildete Dreieck bzw. Höhenpunkt und Schwerpunkt. — Andeutung: Vgl. Beweis zu §. 36, 3.

17) Höhenpunkt, Schwerpunkt und Centrum der Ecken eines Dreiecks liegen in einer Geraden, und zwar so, daſs die Entfernung der beiden ersten das Doppelte der Entfernung der beiden letzten ist (Satz von Euler, 1765). — Andeutung: Im $\triangle\, ABC$ (Fig. 188) seien H, S, M die drei Punkte und B_1 die Mitte von AC. Verlängere HS um die Hälfte $= SM_1$, so ist zu zeigen, daſs M_1 mit M identisch ist: drehe $\triangle\, SM_1B_1$ um S im Betrag von $2R$, so wird $M_1B_1 \parallel HB$, also $\perp AC$; ebenso zeige, daſs

$$M_1C_1 \perp AB.$$

18) Jeder obere Höhenabschnitt eines Dreiecks ist doppelt so

grofs als die vom Centrum der Ecken zur entsprechenden Seite gezogene Normale. — Andeutung: Beweis entweder mit 17 oder in folgender Weise: Ziehe den Durchmesser AMD, so ist $DC \parallel BH$, $DB \parallel CH$, woraus folgt $CD \# BH$, während

$$CD = 2MB_1.$$

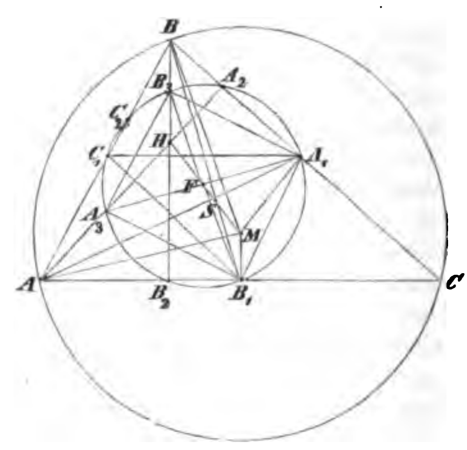


Fig. 188.

19) In jedem Dreieck ist die Verbindungsstrecke der Mitte eines oberen Höhenabschnittes mit der Mitte der zugehörigen Seite gleich dem Radius des umgeschriebenen Kreises. — Andeutung: Nach 18 sind B_3B und B_1M gleiche Parallelstrecken.

20) In einem Dreieck bestimmen zwei Seitenmitten und die Mitten der oberen Abschnitte der zugehörigen Höhen ein Rechteck. Die Diagonalen der drei so erhaltenen Rechtecke schneiden einander in einem Punkte.

21) Die drei Seitenmitten, die drei Fufspunkte der Höhen und die drei Mitten der oberen Höhenabschnitte liegen auf einem Kreise (Feuerbachscher Kreis), dessen Mittelpunkt im Schnittpunkte der Verbindungsgeraden je einer Seitenmitte mit der Mitte des oberen Abschnitts der zugehörigen Höhe liegt. (Siehe vorherg. Aufgabe.)

22) Der Radius des Feuerbachschen Kreises ist halb so grofs als der des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises. (Vgl. 19.)

23) Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises liegt in der Mitte der Verbindungsstrecke von Höhenpunkt und Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises. — Andeutung: M, S, F sind für $\triangle A_1B_1C_1$ das, was H, S, M für $\triangle ABC$ sind.

24) Werden bei einem in einen Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck die Mitten zweier Bögen verbunden, so wird die entstehende Sehne durch die zwei Dreiecksseiten in drei gleiche Teile geteilt.

25) Wird ein beliebiger Punkt X auf dem einem gleichseitigen Dreieck ABC umgeschriebenen Kreise mit den Ecken verbunden, so ist die innere Verbindungsgerade (etwa XA) gleich der Summe der beiden äufseren. — Andeutung: $\triangle CBX$ kommt durch eine Drehung um C im Betrag von $\frac{2}{3}R$ nach CAY, wobei AY auf AX fällt, dafs noch nachzuweisen, dafs $YX = CX$ ist.

Zusatz. Läfst sich Ähnliches von dem aus der Kreismitte auf die drei Verbindungsstrecken gefällten Normalen sagen? (Vgl. Aufgabe §. 9, 9.)

26) Legt man durch je zwei Ecken eines Dreiecks und den Höhenpunkt einen Kreis, so sind

a) die Kreise dem um das Dreieck beschriebenen gleich;

b) ihre Mittelpunkte liegen in Bezug auf die Seiten als Axen symmetrisch zum Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises und bilden ein dem ursprünglichen kongruentes Dreieck, dessen Höhenpunkt mit dem Centrum der Ecken des ursprünglichen Dreiecks zusammenfällt.

27) Zu einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c (speciell 3, 4, 5) sollen die Radien des eingeschriebenen Kreises (ϱ) und der angeschriebenen Kreise (ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3) berechnet werden. — Andeutung: Vgl. §. 37, 3 und beachte die Dreiecke mit dem Winkel $\frac{1}{2}R$.

Zusatz. 1) Wie viel ist $\varrho + \varrho_1 + \varrho_2$?
2) Wie viel ist $\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$?

§. 16. Konstruktionen.

1) Ein Dreieck mit den Seiten a, b ist zu konstruieren, so dafs $a = 2b$ und $\sphericalangle\gamma = 30^0$ (oder 40^0, 60^0, 90^0) ist; ist dann $\sphericalangle\alpha = 2\cdot\beta$? (Mit dem Wm. zu messen.) — Ist für $\alpha = 2\beta$ auch $a = 2b$?

2) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind:

a) die Fufspunkte der drei Höhen;

b) der Fufspunkt einer Höhe und die Mitten der beiden nicht zugehörigen Seiten;

c) die drei äufseren Centren der Seiten;

d) zwei äufsere Centren und das innere Centrum der Seiten.

3) Wenn $h_1 h_2 h_3$ die Höhen, $m_1 m_2 m_3$ die Winkelhalbierenden und $t_1 t_2 t_3$ die seitenhalbierenden Ecktransversalen (Schwerlinien) eines Dreiecks sind, so ist dasselbe zu zeichnen aus:

a) a, α, h_1; b) a, α, t_1; c) t_1, t_2, c; d) t_1, t_2, α.

4) Das einem gegebenen Kreise, dessen Radius $= r$ ist, eingeschriebene Dreieck zu zeichnen, von dem noch bekannt sind:

a) a, b; b) a, β; c) a, h_1; d) a, h_2; e) α, h_2; f) α, β; g) α, h_1; h) α, m_1.

5) In einen gegebenen Kreis soll man ein Dreieck einschreiben dessen:

a) Winkel denen eines gegebenen Dreiecks gleich sind;

b) Seiten drei gegebenen Geraden parallel sind;

c) zwei Seiten zwei gegebenen Geraden parallel sind und dessen dritte Seite durch einen gegebenen Punkt geht. — Andeutung: Trage den Winkel beider Geraden als Peripheriewinkel ein und zeichne den koncentrischen Kreis, der die Sehne dieses Winkels berührt.

6) Zu einem Strahlenbüschel ist ein gleichwendig kongruenter Büschel zu zeichnen, von welchem der Scheitel und ein Strahl gegeben ist, der einem bestimmten Strahl des ersteren entspricht (mit Benutzung eines Kreises und von §. 34, 8).

7) Ein Dreieck ist zu konstruieren aus dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises und aus:

a) α, β; b) a, β; c) a, h_2, d) α, h_2; e) α, a.

8) Es ist ein Winkel und ein Punkt P gegeben; man soll durch P eine Gerade ziehen, so dafs sie mit den Schenkeln des Winkels ein Dreieck von gegebenem Umfang bildet. — Andeutung: §. 37, Zusatz 1.

9) In einem Dreieck ist ein Punkt zu finden, so dafs die von ihm ausgehenden drei Ecktransversalen gleiche Winkel mit einander bilden.

10) Aus den Ecken eines Dreiecks als Mittelpunkten sind Kreise zu beschreiben, welche paarweise einander berühren. — Andeutung: Ihre Berührungspunkte sind die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises bzw. der angeschriebenen Kreise.

Aufgaben zum zwölften Kapitel.

§. 17. Lehrsätze.

1) Welche verschiedenen Arten der Lage können vier Gerade der Ebene haben, geordnet nach ihrer Parallelität? In wie viele Felder wird in jedem Falle die Ebene zerlegt? In welchen Fällen entstehen ringsum begrenzte Felder? Wie viele Schnittpunkte?

2) Halbiert man die Innenwinkel eines Trapezes und verlängert die Halbierenden bis zum Durchschnitt, so gilt:

a) die zwei von den Grenzpunkten einer Parallelseite auslaufenden Halbierenden schneiden einander unter einem Winkel, der gleich der halben Summe der an der andern parallelen Seite liegenden Winkel ist (wo liegt der Schnittpunkt?);

b) die von den Grenzpunkten einer der nicht parallelen Seiten auslaufenden Halbierenden schneiden einander normal auf der Mittelparallelen;

c) ein Winkel, welchen zwei von Gegenecken ausgehende Hal-

bierende mit einander bilden, ist gleich der halben Differenz der halbierten Winkel;

d) in dem durch die vier Halbierenden gebildeten Viereck ist die zu den Seiten parallele Diagonale gleich der halben Differenz zwischen der Summe der nicht parallelen Seiten.

Zusatz. Analoge Beziehungen gelten für die Halbierenden der Aufsenwinkel.

3) Welche Änderungen ergeben sich für obige Sätze in 2 für den Fall, dafs das Trapez ein Antiparallelogramm ist?

4) Sind drei Seiten eines Antiparallelogramms gleich grofs, so halbieren die Diagonalen die Winkel an der vierten Seite.

5) Ein Parallelogramm ist durch zwei anstofsende Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmt. Warum? Welche Arten von Parallelogrammen entstehen nun, je nachdem die anstofsenden Seiten

a) gleich oder

b) ungleich sind

und der eingeschlossene Winkel ein

α) rechter oder

β) schiefer ist?

6) Ist ein Viereck ein Parallelogramm, wenn in demselben zwei Gegenseiten gleich und nur eine Diagonale von der andern halbiert wird?

7) Verbindet man die Mitten zweier Gegenseiten eines Parallelogramms mit den gegenüberliegenden Ecken, so entsteht ein zweites Parallelogramm und die Diagonale des ersten wird in drei gleiche Teile geteilt.

8) In einem beliebigen Viereck bestimmen die Mitten der Seiten ein Parallelogramm, ebenso die Mitten zweier Gegenseiten samt den Mittelpunkten der Diagonalen.

Zusatz. Was wird aus dem erstgenannten Parallelogramm, wenn das Viereck ein Antiparallelogramm, Deltoid, Rechteck, Raute, Quadrat ist?

9) Die Verbindungsgeraden der Mitten der Gegenseiten eines Vierecks und die Verbindungsgerade der Mitten der Diagonalen gehen durch einen Punkt.

10) a) Ein Sehnenviereck, in welchem zwei Seiten parallel sind, ist ein Antiparallelogramm.

b)* Ein Tangentenvierseit, in welchem zwei Gegenecken auf den Verlängerungen eines Durchmessers liegen, ist ein Deltoid.

11) a) Ein Sehnenviereck, in welchem zwei Gegenseiten gleich sind, ist ein Antiparallelogramm.

b) Ein Tangentenvierseit, in welchem zwei Gegenwinkel gleich sind, ist ein Deltoid.

12) a) Liegen die Ecken eines Sehnenvierecks auf zwei Durchmessern, so ist dasselbe ein Rechteck.

b) Liegen die Berührungspunkte eines Tangentenvierseits auf zwei Durchmessern, so ist dasselbe eine Raute.

13) Zu einem Sehnenrechteck bilden die Tangenten der Eckpunkte eine Tangentenraute, deren Diagonalen parallel zu den Seiten des Rechtecks durch den Mittelpunkt gehen. — Umkehrung!

14) a) Ein Kreis und ein Parallelogramm, dessen Diagonalendurchschnitt in die Kreismitte fällt, sind koncentrisch*). — Zwei Gegenseiten dieses Parallelogramms bestimmen durch ihre Schnittpunkte mit dem Kreise ein koncentrisches Rechteck.

b) Ein Kreis und ein Antiparallelogramm, von welchem die Mitten der parallelen Gegenseiten auf einen Durchmesser fallen, bilden zusammen eine axige Figur zu diesem Durchmesser. — Die nicht parallelen Seiten oder Diagonalen dieses Antiparallelogramms bestimmen durch ihre Schnittpunkte mit dem Kreise ein Antiparallelogramm, dessen Axe der Durchmesser ist.

15) Zwei parallele Tangenten und zwei Durchmesser eines Kreises bestimmen durch ihre Schnittpunkte ein mit dem Kreise koncentrisches Parallelogramm.

16) Zwei Tangenten und zwei Parallele zu ihren Berührungssehnen bestimmen durch ihre Schnittpunkte ein Antiparallelogramm, welches den Durchmesser nach dem Tangentenschnittpunkte als Symmetrieaxe hat.

17) a) Von einem Sehnenrechteck bestimmen zwei Gegenseiten mit irgend zwei parallelen Tangenten ein koncentrisches Parallelogramm.

b) Von einem Sehnenantiparallelogramm bestimmen die Schnittpunkte zweier Gegenseiten oder Diagonalen mit den zu seinen Parallelseiten normalen Tangenten ein Rechteck, das mit der ersteren Figur dieselbe Symmetrieaxe hat.

18) Die Halbierenden der Innenwinkel eines Vierecks bilden ein Sehnenviereck.

Zusatz. a) Desgleichen die Halbierenden der Aufsenwinkel. — Welche Beziehungen haben beide Sehnenvierecke bezüglich ihrer Winkel?

b) Was wird aus dem Sehnenviereck, wenn das Viereck ein Antiparallelogramm oder Parallelogramm oder Rechteck ist?

19) Beschreibt man um die vier Dreiecke, in welche ein Viereck durch die Abschnitte seiner Diagonalen zerteilt wird, Kreise, so bilden deren Mittelpunkte ein Parallelogramm.

Wann wird dies Parallelogramm ein Rechteck oder Raute oder Quadrat?

*) Zwei centrische Figuren mit gemeinsamem Centrum heifsen koncentrisch.

20) Beschreibt man um die vier Dreiecke, in welche ein Viereck durch seine ganzen Diagonalen zerteilt wird, Kreise, wie liegen dann deren Mittelpunkte zu einander? und wie zu den vier Mittelpunkten der Kreise in 19?

§. 18. Konstruktionen.

Bemerkung. Um die folgenden Aufgaben kurz angeben zu können, bezeichnen wir in einem beliebigen Viereck $ABCD$ die Winkel bei A, B, C, D bezw. durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die Seiten AB, BC, CD, DE bzw. durch a, b, c, d, die Diagonalen AC und BD bezüglich durch e und f. — Ist das Viereck ein Trapez, so sei $a \parallel c$, und h bezeichne den Abstand von a und c; ist das Viereck ein Antiparallelogramm, so werde $b = d$, also $e = f$; ist es ein Deltoid, so sei $a = d$ und $b = c$; ist es ein Parallelogramm, so sei $a \parallel c$ und $b \parallel d$, und der Abstand von a und c sei durch h_1, der von b und d sei durch h_2 bezeichnet; ist das Viereck ein Sehnenviereck oder Tangentenvierseit, so seien r und ϱ der Radius des umgeschriebenen bezw. eingeschriebenen Kreises.

Es sei ein Antiparallelogramm zu konstruieren aus:

1) a, c, h; 2) a, b, α; 3) a, b, γ; 4) a, c, α;
5) $a, c, \sphericalangle ef$; 6) a, e, γ; 7) $a, e, \sphericalangle be$; 8) a, b, c.

Ein Deltoid ist zu konstruieren aus:

9) e, α, β; 10) e, b, γ; 11) a, b, β; 12) a, b, α; 13) e, f, α;
14) e, f, β; 15) a, b, f.

Ein Trapez ist zu zeichnen, wenn gegeben sind:

16) a, b, c, β; 17) a, c, α, β; 18) a, c, α, f;
19) a, b, c, f; 20) a, e, f, α; 21) $a, e, f, \sphericalangle ac$.
22) a, b, c, h; 23) a, b, d, h; 24) a, b, f, h;
25) a, b, α, h; 26) b, d, e, h; 27) a, e, f, h.
28) a, b, c, d; 29) a, b, c, β; 30) a, c, α, β.
31) $b, c, \sphericalangle de, \sphericalangle bf$; 32) $a, c, \sphericalangle ce, \sphericalangle bf$;
33) $a, b, c, \sphericalangle de$.

Ein Parallelogramm ist zu konstruieren aus folgenden gegebenen Stücken:

34) a, b, h_1; 35) a, e, h_1; 36) α, e, h_1;
37) a, e, f; 38) h_1, e, f; 39) a, h_1, h_2;
40) a, e, h_2; 41) u, α, f; 42) u, α, e;
43) $e, f, \sphericalangle ef$.
44) f, h_2, α; 45) $a, h_1, \sphericalangle ef$; 46) $a, h_2, \sphericalangle ef$;
47) $e, \alpha, \sphericalangle ef$.

Ein Rechteck ist zu zeichnen aus:

48) a, b; 49) a, e; 50) $a, \sphericalangle ef$;
51) $c, \sphericalangle ef$; 52) $a, \sphericalangle ae$; 53) u, e.

Eine **Raute** ist zu zeichnen aus:

54) a, α; 55) a, e; 56) e, α; 57) e, f;
58) h, α; 59) a, h; 60) e, h; 61) $a, e + f$;
62) $a, e - f$; 63) $\alpha, e + f$; 64) $\alpha, e - f$; 65) $\alpha, a + h$;
66) $\alpha, a - h$; 67) $\alpha, e - h$.

Ein **Quadrat** ist zu konstruieren aus:

68) a; 69) u; 70) e; 71) $e + a$; 72) $e - a$.

Ein **Sehnenviereck** ist zu konstruieren aus:

73) r, a, b, c; 74) r, a, b, α; 75) r, a, c, e;
76) r, a, b, f; 77) $r, a, e, \sphericalangle ef$; 78) $r, e, f, \sphericalangle ef$;
79) $r, e, \alpha, \sphericalangle ef$.
80) a, b, c, β; 81) a, b, c, e; 82) a, b, α, f;
83) a, b, γ, f; 84) a, b, c, α.

Ein **Tangentenvierseit** ist zu konstruieren aus:

85) ϱ, a, b, α; 86) ϱ, a, b, β; 87) $\varrho, a, \alpha, \gamma$;
88) $\varrho, a, \beta, \gamma$; 89) $\varrho, e, \alpha, \gamma$.
90) a, b, c, e; 91) a, b, c, β; 92) a, b, e, α;
93) a, α, β, γ; 94) a, b, c, α; 95) a, b, β, γ.

96) Auf einer Dreieckseite ist ein Punkt so zu bestimmen, dafs die von ihm aus parallel zu den anderen Seiten gezogenen und durch diese begrenzten Strecken gleich sind.

97) In einen gegebenen Kreis ist ein Rechteck mit gegebener Seite zu konstruieren.

98) In ein beliebiges Viereck ist ein Parallelogramm einzuschreiben, dessen eine Seite nach Gröfse und Richtung $= s$ gegeben. (Vgl. Aufgabe §. 6, 10.)

99) a) Ein gleichseitiges Dreieck ist gegeben; man soll ein Quadrat konstruieren, welches mit jenem das Eck A gemeinsam hat und dessen andere Seiten durch die zwei übrigen Ecken des Dreiecks gehen. — **Andeutung**: Die Figur ist axig zu der von A ausgehenden Höhe und Diagonale; die Differenz der letzteren ist leicht zu bestimmen.

b) Ein Quadrat ist gegeben; man soll ein gleichseitiges Dreieck konstruieren, welches mit jenem das Eck A gemeinsam hat und dessen zwei übrigen Ecken auf Quadratseiten fallen. — **Andeutung**:

α) Trage an die Diagonale in A Winkel von je $\frac{1}{3} R$ an. — Oder:

β) Ziehe die Diagonale aus A, bilde darauf $AX = XY$, ziehe

über XY ein gleichseitiges Dreieck und verbinde dessen Spitze mit A. — Oder:

γ) Zeichne über der Diagonale aus A ein gleichseitiges Dreieck und trage den Winkel zwischen der in A anstofsenden Quadratseite und äufseren Dreieckseite an ersterer nach innen an. — Oder:

δ) Zeichne über einer (nicht von A ausgehenden) Seite nach aufsen oder innen ein gleichseitiges Dreieck und verbinde dessen Spitze mit A. — Oder:

ε) Verdoppele die eine von A ausgehende Seite, bis X, schneide aus X mit XA ein auf der dritten Seite $= XY$, so ist AY die gesuchte Seite.

100) Ein Parallelogramm sei gegeben. Allein mit Lineal ist demselben ein anderes Parallelogramm

a) einzuschreiben, von welchem die Lage einer Seite gegeben ist;

b) umzuschreiben, von welchem ein Eck gegeben ist.

101) Ein Rechteck (Raute) mit seinen Symmetrieaxen sei gegeben. Man soll mit dem Lineal allein eine Raute (bzw. Rechteck) demselben umschreiben (bzw. einschreiben), von welcher eine Seite (Eck) gegeben ist.

102) Von einem Fünfeck seien die Seitenmitten A, B, C, D, E gegeben; das Fünfeck selbst ist zu zeichnen. — Andeutung: Zeichne das Parallelogramm $AEDX$, ziehe $YZ \parallel BC$ durch X und mache

$$YX = XZ = BC.$$

103) In ein Quadrat soll ein anderes von gegebener Seite s eingeschrieben werden. — Andeutung: Zeichne das Centrum des gegebenen und trage von hier aus die halbe Diagonale des gesuchten Quadrates ein.

Aufgaben zum dreizehnten Kapitel.

§. 19. Lehrsätze.

1) Ein regelmäfsiges Dreieck bestimmt mit seiner diametral entsprechenden Figur in Bezug auf seinen Mittelpunkt als Centrum ein regelmäfsiges Sechseck (trigonalen Sechsstern).

2) Ein Quadrat bestimmt mit einem kongruenten Quadrat, dessen Diagonalen auf die Mittelparallelen des ersteren fallen, ein regelmäfsiges Achteck (tetragonalen Achtstern).

3) Es ist nachzuweisen, dafs die zwei von den Ecken ausgehenden Abschnitte, welche auf jeder Seite des Quadrates in 2 entstehen, gleich der halben Diagonale desselben sind.

4) Die Grenzpunkte einer Sehne, welche Mittelnormale zu einem Radius ist, bestimmen mit dem Endpunkt des gegengerichteten Radius ein regelmäfsiges Dreieck.

5) Ein Aufsenwinkel eines regelmäfsigen Vielecks ist gleich dem zu einer Seite gehörigen Centriwinkel.

6) Der Aufsenwinkel eines regelmäfsigen Vielecks von doppelter, drei-, vier-,... facher Seitenzahl ist bzw. gleich dem zweiten, dritten, vierten,... Teil des Aufsenwinkels beim regelmäfsigen Vieleck von einfacher Seitenzahl.

§. 20. Konstruktionen.

1) Welcherlei Figuren entstehen, wenn man einen Kreis (nach §. 44, 5) in sechs gleiche Teile teilt und von den sechs Teilpunkten jeden

a) mit dem nächstfolgenden,
b) mit dem zweitfolgenden,
c) mit dem drittfolgenden verbindet?

2) Dasselbe für den in 8, 12, 16 gleiche Teile geteilten Kreis.

3) Es soll mit Benützung der Winkelscheite I und II*) (ohne Zirkel) ein regelmäfsiger a) Zweistrahl, b) Dreistrahl, c) Vierstrahl, d) Sechsstrahl, e) Zwölfstrahl gezeichnet werden. — Andeutung zu

a) vgl. Aufgabe §. 8, 11.

b) Lege an ein Lineal die längere Kathete von Wsch. II, ziehe die Gerade längs der Hypotenuse, wende das Wsch. um und lege die längere Kathete wieder an das Lineal u. s. w.

c) Verfahre nach a), verschiebe dann das Wsch. am L. und lege nun das L. an dessen Hypotenuse u. s. w.

d) Verbinde zweimal b) mit a).

e) Verbinde wiederholt c) mit d).

4) Zu einem regelmäfsigen Sechseck ist ein kongruentes koncentrisches zu zeichnen, so dafs die Ecken beider ein regelmäfsiges Zwölfeck (hexagonalen Zwölfstern) bestimmen.

5) Zu einem Quadrat sind zwei kongruente koncentrische Quadrate zu zeichnen, so dafs ihre Ecken vereint ein regelmäfsiges Zwölfeck (tetragonalen Zwölfstern) bestimmen.

6) Man konstruiere ein regelmäfsiges Vier-, Sechs-, Acht-, Zwölfeck, wenn

a) eine Seite, oder
b) eine Hauptdiagonale, oder
c) eine Nebendiagonale gegeben ist.

7) Es seien a) zwei auf einander folgende Ecken oder es sei b) eine Seitenstrecke eines regelmäfsigen Sechssterns gegeben; derselbe ist zu zeichnen.

Zusatz. Ebenso die verschiedenen Zwölf- und Achsterne unter denselben Bedingungen.

*) s. S. 110.

8) Über einer Strecke AB sei ein regelmäfsiges Dreieck ABC gezeichnet; man soll über derselben Strecke ein regelmäfsiges Sechseck zeichnen. — Andeutung: Ziehe $BD \parallel AC$ und $= AC$, $DE \parallel BC$ und $= BC$ u. s. w.

9) Über einer gegebenen Strecke AB sei ein regelmäfsiges Vieleck gezeichnet; man soll über derselben Strecke ein regelmäfsiges Vieleck von doppelter Seitenzahl konstruieren. — Andeutung: Wenn z. B. das Vieleck $ABCDE\ldots$ vorliegt, so ziehe

$$BH \parallel AC \text{ und } = AB,\ HI \parallel BC,\ IK \parallel BD,\ KL \parallel CD \text{ u. s. w.}$$

10) Ein regelmäfsiges Vieleck $ABCDE$ sei gegeben; man soll (ohne Benützung des umgeschriebenen Kreises) ein Vieleck mit doppelter Seitenzahl zeichnen, welches die Ecken des ersteren ebenfalls zu Ecken hat. — Andeutung: Ziehe AC und halbiere die Winkel BCA und CAB bzw. durch CX und AY, ziehe $BX \parallel AY$ und $BY \parallel CX$ u. s. w.

Aufgaben zum vierzehnten Kapitel.

§. 21. Lehrsätze.

1) Die Verbindungsgerade zweier Seitenmitten eines Dreiecks schneidet von demselben ein Dreieck ab, welches der vierte Teil des ursprünglichen ist.

2) Jede Gerade durch den Mittelpunkt eines Parallelogramms teilt dasselbe in zwei gleiche Teile.

3) Die Verbindungsgeraden eines Punktes in einem Parallelogramm mit den Ecken zerlegen dasselbe in vier Dreiecke, von welchen die Summen der nicht aneinander angrenzenden einander gleich sind.

4) Verbindet man in einem Trapez die Mitte einer der nicht parallelen Seiten mit den Ecken der Gegenseite, so ist das zwischen diesen Verbindungsgeraden liegende Dreieck gleich dem zwischen den entsprechenden Verbindungsgeraden von der Mitte der Gegenseite.

5) Das durch die Mittelpunkte der vier Seiten eines Vierecks bestimmte Parallelogramm ist halb so grofs als das Viereck selbst.

6) Zieht man durch die Mitte der Diagonalen eines Vierecks Parallele zu diesen Diagonalen und verbindet den Schnittpunkt dieser Geraden mit zwei Gegenecken des Vierecks, so wird letzteres durch diese Verbindungsgeraden halbiert.

7) Ein Trapez wird durch die Verbindungsgeraden eines Punktes der Mittelparallelen mit den Ecken in vier Dreiecke geteilt, von welchen die Summen der einander gegenüberliegenden gleich sind.

8) Die Verbindungsgeraden von einem Eck eines regelmäfsigen Sechsecks nach den übrigen Ecken und nach den Mitten der das Gegeneck bildenden Seiten teilen das Sechseck in sechs gleiche Teile.

9) Unter allen Dreiecken oder Parallelogrammen, welche in zwei Seiten übereinstimmen, hat das rechtwinkelige den gröfsten Inhalt.

10) Unter allen Dreiecken, die in einer Seite und der Summe der beiden andern übereinstimmen, hat das gleichschenkelige den gröfsten Inhalt. — Andeutung: Beweis indirekt; ein Dreieck, dessen Spitze jenseits der zur Basis Parallelen durch die Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks liegt, hat einen gröfseren Umfang (vgl. §. 31, 3).

11) Unter allen Dreiecken von gegebenem Umfange hat das gleichseitige den gröfsten Inhalt.

12) Unter allen Dreiecken von gegebener Seite und gegebenem Gegenwinkel derselben ist das gleichschenkelige das gröfste.

13) Unter allen n-Ecken von gegebenem Umfange hat das regelmäfsige n-Eck den gröfsten Inhalt.

Andeutung des Beweisganges: a) Zwei aufeinander folgende Seiten müssen gleich sein (10).

b) Eine den Umfang halbierende Gerade mufs auch die Fläche halbieren (Beweis indirekt).

c) Beim $2n$-Eck mufs die Verbindungsgerade zweier Gegenecken Durchmesser eines Kreises sein, auf welchem jedes andere Eck liegt (9 und §. 34, 7b). Zu dem n-Eck von ungerader Seitenzahl konstruiert man ein regelmäfsiges n-Eck von gleicher Seite, in denselben Kreis mit diesem das eingeschriebene regelmäfsige $2n$-Eck und setzt die Differenz beider letzteren Flächen dem ersteren n-Eck zu.

14) Von zwei regelmäfsigen Vielecken mit gegebenem Umfang hat das von gröfserer Seitenzahl den gröfseren Inhalt.

Aufgaben zum fünfzehnten Kapitel.

§. 22. Konstruktionen.

1) Ein Dreieck ist in ein anderes zu verwandeln, das in einer Seite mit dem gegebenen übereinstimmt, während noch der Gegenwinkel dieser Seite gegeben ist.

2) Ein Dreieck ist in ein anderes zu verwandeln, so dafs ein Eck beibehalten wird, während dessen Gegenseite in eine bestimmte Gerade fällt.

3) Die Summe zweier mit ihren Grundseiten aneinanderstofsenden Rechtecke soll in ein Rechteck verwandelt werden, das mit einem der gegebenen Rechtecke in einer Seite übereinstimmt.

4) Es soll ein Quadrat konstruiert werden, das gleich der (algebraischen) Summe mehrerer Quadrate ist.

5) Es soll die Hälfte, sowie das Doppelte eines Quadrats als Quadrat gezeichnet werden.

6) Ein Dreieck ist in ein gleichschenkeliges zu verwandeln, von welchem α) die Grundseite oder β) die Höhe gegeben ist.

7) Ein Dreieck ist in ein solches zu verwandeln, von welchem eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben ist.

8) Ein Parallelogramm ist in ein anderes zu verwandeln, von welchem die beiden Seiten gegeben sind, oder in eine Raute von gegebener Seite.

9) Ein Trapez ist in ein Antiparallelogramm von gleicher Höhe zu verwandeln.

10) Es ist in einen Kreis ein Sehnenrechteck zu zeichnen, dessen Inhalt gleich dem eines gegebenen Quadrates ist.

11) Ein Dreieck oder Parallelogramm ist von einem Eck oder einem Punkte einer Seite aus in drei oder fünf Teile zu teilen.

12) Ein Viereck oder Fünfeck ist von einem Eck aus durch eine Gerade zu halbieren.

13) Ebenso von einem Punkte einer Seite aus.

§. 23. Berechnungen.

1) Der Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem halben Produkte der Katheten.

2) Der Inhalt einer Raute ist gleich dem halben Produkte seiner Diagonalen.

3) Der Inhalt eines Vierecks ist gleich dem halben Produkte einer Diagonale durch zwei Ecken mit der Summe der Abstände der beiden andern Ecken von ihr.

4) Der Inhalt eines Tangentenvielecks ist gleich dem halben Produkte des Umfangs mit dem Radius des umgeschriebenen Kreises.

5) Der Inhalt eines Parallelogramms ist zu berechnen, dessen Grundseite 25,39 dm und Höhe 4,37 dm; desgleichen eines Dreiecks mit einer Grundseite von 28,5 cm und 33,7 cm Höhe; ebenso eines Trapezes, dessen Parallele 15,3 und 18,5 cm und dessen Höhe 13,2 cm.

6) Der Inhalt eines Rechtecks ist J, der Umfang u, wie grofs sind die Seiten? — $J = 180, \quad u = 34$.

7) Der Inhalt eines Dreiecks ist J, die Höhe h, wie grofs die Grundseite? — $J = 325{,}85, \quad h = 38$.

8) Der Inhalt eines Trapezes ist J, die beiden Parallelen a und b, wie grofs ist die Höhe?

$$J = 224{,}375 \text{ qm}, \quad a = 13{,}5 \text{ m}, \quad b = 6{,}4 \text{ m}.$$

9) Der Inhalt eines Trapezes ist J, die Höhe h, die Differenz der beiden Parallelen d; wie grofs sind diese?

$$J = 542{,}5, \quad h = 21{,}7, \quad d = 11{,}2.$$

10) Von demselben Trapez sollen die beiden durch die Mittelparallele gebildeten Flächenstücke berechnet werden.

11) Wie viel quadratische Plättchen von 20 cm Seite braucht man, um eine rechteckige Fläche von 15 m Länge und 75 cm Breite zu belegen?

12) Zu wieviel ℳ wurde das Ar von einem Felde berechnet, das 137 ℳ 70 ₰ kostete und 6,52 m breit, 10,56 m lang ist?

LEHRBUCH

DER

ELEMENTAR-GEOMETRIE

VON

J. HENRICI UND P. TREUTLEIN

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU HEIDELBERG

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU KARLSRUHE.

ZWEITER TEIL.

PERSPEKTIVISCHE ABBILDUNG IN DER EBENE.
BERECHNUNG DER PLANIMETRISCHEN GRÖSSEN.

PENSUM DER SECUNDA

(NEBST WEITEREN AUSFÜHRUNGEN FÜR PRIMA.)

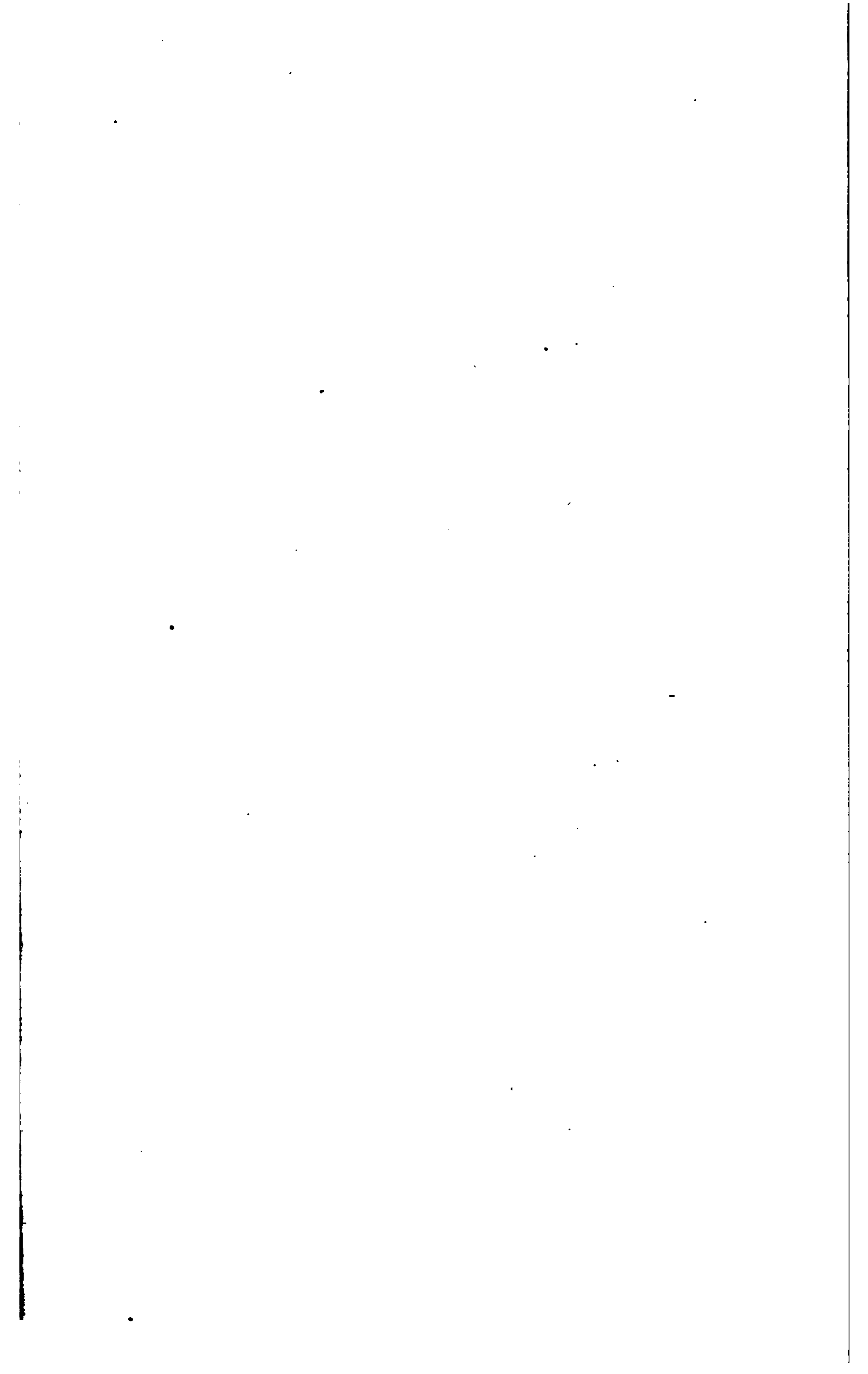


MIT 189 FIGUREN IN HOLZSCHNITT UND EINEM KÄRTCHEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.



Vorwort.

Während auf der ersten Stufe geometrischer Operationen die Formen verglichen werden, indem man sie durch irgend welche Bewegungen zur Deckung bringt, was zur Betrachtung kongruenter Gebilde in verschiedenen Lagen und zur kongruenten Abbildung führt, wird in der zweiten Stufe der Begriff der Abbildung der Art erweitert, dafs hier nicht mehr von Gebilden die Rede, die einander wirklich decken können, sondern von solchen, die von einem Punkt aus gesehen einander zu decken scheinen. Es ist das Verdienst von Poncelet, den Gedanken der perspektivischen Abbildung, welche unserem Sehen entspricht und deshalb in der angewandten Geometrie von so aufserordentlicher Bedeutung ist, auch der theoretischen Geometrie als leitendes Princip einverleibt zu haben. Von der dritten Stufe geometrischer Betrachtung, der Beziehung der Figuren auf einander nach anderen als rein perspektivischen Gesetzen, wird in diesem II. Teil unseres Lehrbuches nur die Polarisation in einer Anmerkung besprochen.

Die drei ersten Kapitel dieses Teiles behandeln das, was meist unter dem Titel „Proportionalität der Linien" in allen Lehrbüchern der Geometrie zu finden ist. Das vierte Kapitel giebt den Begriff der Ähnlichkeit genetisch, der Art unseres Sehens entsprechend. Will der Lehrer nicht sofort die perspektivische Ausführung weiter verfolgen, so genügt §. 11, 1—4, um zur zweiten Abteilung, der Berechnung der planimetrischen Gröfsen (inclusive Trigonometrie), überzugehen. Behufs der Berechnung der Kreissehnen (Kreisvielecke) werden schon hier die goniometrischen Funktionen eingeführt, da die wichtigsten goniometrischen Formeln unumgänglicher Memorierstoff sind und durch diese Anordnung die Formeln für die Kreisvielecke erspart werden; auch erscheint so π als Grenzwert eines algebraisch bestimmbaren Ausdruckes.

Für einen knappen Kursus der perspektivischen Abbildung können wir folgenden Gang vorschlagen: vom ersten Abschnitt das vierte Kapitel, vom zweiten die §§. 14, 15, 16, 18, 19 1—3, 20 1—5, 21 2—3, 23 3—8, 24. Die Sätze von Menelaos und Ceva §. 17, 1—3 werden

hierbei auch wohl nicht gerne übergangen. Die Darstellung der harmonischen Beziehungen §. 18—20 ist eine solche, dafs auch dieser Teil allein aus dem Übrigen herausgegriffen werden kann. Das Übrige des zweiten Abschnittes ist mehr oder weniger der Prima vorzubehalten, wo die perspektivische Abbildung einer Ebene auf eine zweite ein neues Licht auf die Bedeutung des Gegenstandes wirft.

In dem §. über graphisches Rechnen hoffen wir der Darlegung von Hauck in der Hoffmann'schen Zeitschrift (Jahrg. 1881, S. 333 ff.) entsprochen zu haben.

Für gröfsere Übungen im Lösen von Konstruktionsaufgaben empfehlen wir das auch von uns benutzte Werkchen „Methoden und Theorien" von Petersen. Auch Cantor's Geschichte der Mathematik und C. L. A. Kunze's Geometrie sind wir für einige Aufgaben zu Dank verpflichtet.

Um Anfragen mehrerer Kollegen entgegenzukommen, welche schon den ersten Teil ihrem Unterricht zu Grunde legten, bemerken wir noch in Betreff der Behandlung eben jenes Teiles, dafs wir in Tertia den technischen Teil des Unterrichtes in den Vordergrund gestellt denken; die Klasse führt, mit Lineal, Mafsstab, Winkelscheit und Winkelmesser, später dann auch mit dem Zirkel ausgerüstet, Figuren nach der Angabe des Lehrers aus und erfährt aus den gegebenen Bedingungen erst versuchsweise, dann deduktiv die Eigenschaften dieser Figuren. Es kann mit der Prüfung des Lineals, d. i. mit dem Axiom der Geraden §. 3, 1, 2 begonnen, daran die Streckenmessung §. 6, 1—4 angeschlossen werden, hierauf die Entstehung und Messung des Winkels §. 3, 3. 4, (§. 4, 1), §. 7, 1—6. Der zweite Abschnitt ist dann am kürzesten durch §. 4, 3 einzuleiten; in diesem Abschnitt kann beim ersten Durchnehmen manches, z. B. §. 12 A und §. 18 B (aufser 4a und b) übersprungen werden. Der abstrakte Teil des Unterrichtes, die Beweisführung besteht hier, dem Alter der Schüler entsprechend, stets nur aus einer oder zwei Folgerungen, welche der Lehrer durch Fragestellung nahe legen kann. Es wird hierbei meistens mit der Form „warum" und „weil" auszukommen sein. Selbstverständlich sind „Übungsaufgaben" nicht erst am Schlusse des Kursus zu behandeln, sondern dem Unterrichtsgang selbst einzuverleiben.

Für die wohlwollenden Recensionen des ersten Teiles von Günther in der Zeitschrift für bayerische Gymnasien, von Scherling in der Hoffmann'schen Zeitschrift und von Cantor in der Zeitschrift für Mathematik und Physik sagen wir unseren besten Dank.

I. Abteilung.

Perspektivische Abbildung in der Ebene.

I. Abschnitt.

Perspektivische Ähnlichkeit.

Erstes Kapitel: Mafs und Lage.

Zweites Kapitel: Verhältnisse von Strecken im Strahlenbüschel mit Parallelen.

Drittes Kapitel: Produkte von Strecken im Zweistrahl mit Antiparallelen und mit dem Kreis.

Viertes Kapitel: Perspektivisch ähnliche Figuren.

II. Abschnitt.

Perspektivische Kollineation.

Fünftes Kapitel: Teil- und Doppelverhältnisse je dreier Elemente von Punktreihen und Strahlenbüscheln. Tripelverhältnisse im Dreieck.

Sechstes Kapitel: Doppelverhältnisse bei je vier Elementen von Punktreihen und Strahlenbüscheln.

Siebentes Kapitel: Perspektivische Figuren der Ebene.

II. Abteilung.

Berechnung der planimetrischen Gröfsen.

III. Abschnitt.

Achtes Kapitel: Metrische Beziehungen zwischen Strecken, Flächen und Bögen.

Neuntes Kapitel: Metrische Beziehungen zwischen Strecken bei bestimmten Teilen des rechten Winkels und des Kreisumfanges. Cyclometrie.

IV. Abschnitt.

Goniometrie und Trigonometrie.

Zehntes Kapitel: Goniometrie.

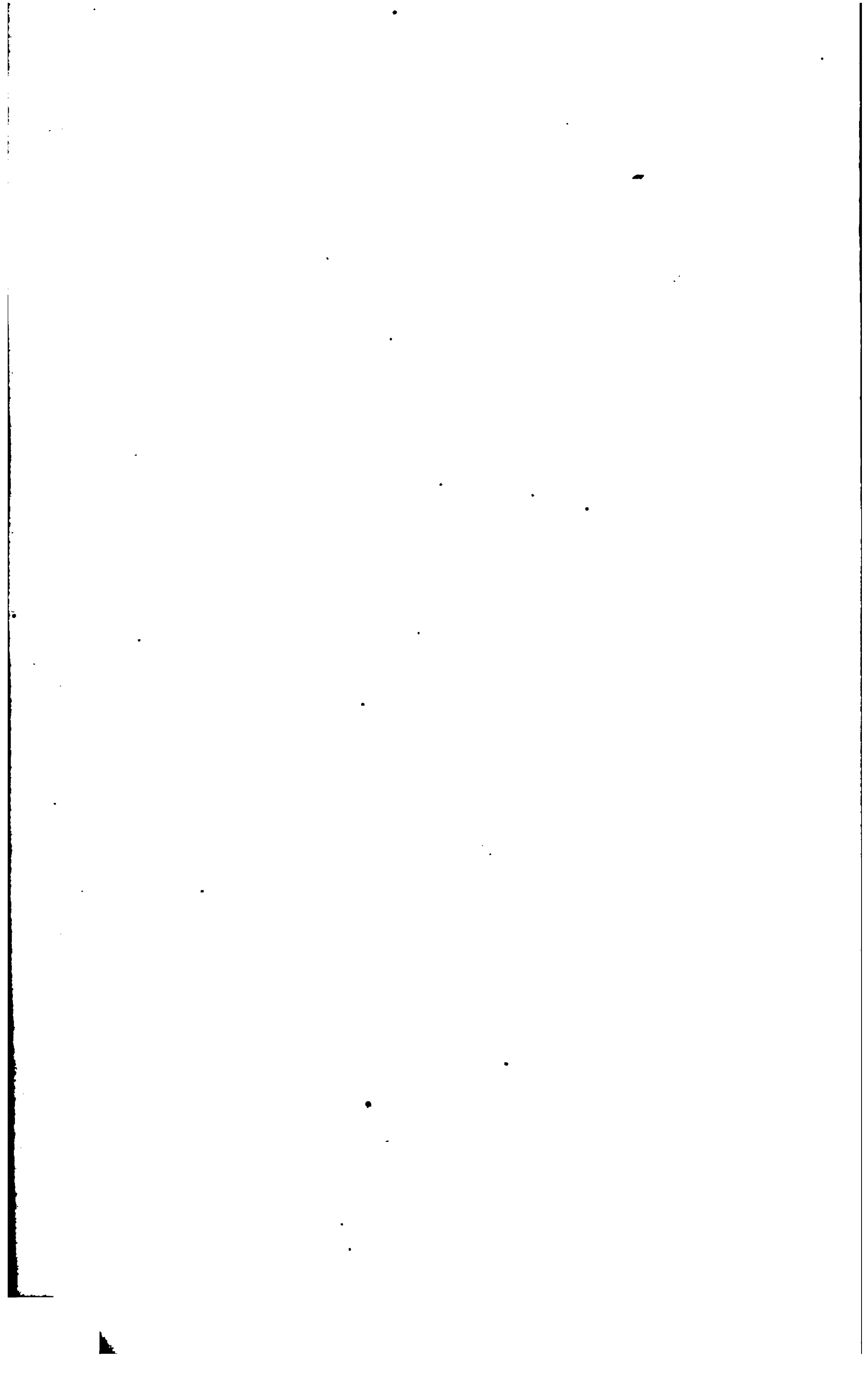
Elftes Kapitel: Ebene Trigonometrie.

Zwölftes Kapitel: Aufgaben der praktischen Geometrie.

Übungsaufgaben.

I. Abteilung.

Perspektivische Abbildung in der Ebene.



I. Abschnitt.

Perspektivische Ähnlichkeit.

Erstes Kapitel.

Mafs und Lage.

§. 1. Mafs und Verhältnis zweier Strecken.

Vorbemerkung. Während wir im I. Teil nur die Addition und Subtraktion planimetrischer Gröfsen behandelt haben, vergleichen wir letztere nun mittels der nächst höheren Rechnungsarten. Wir führen zunächst unsere Betrachtung allein an einer Art solcher Gröfsen, an Strecken, durch, werden aber die Ergebnisse, die in gleicher Weise auch für andere geometrische Gröfsen von einerlei Art gelten, wie für Bogen, Winkel, Flächen, später auch auf solche anwenden.

1. Beim Vergleichen zweier Strecken ist die erste Unterscheidung die, ob dieselben gleich oder ungleich sind. Im letzteren Falle läfst sich auf der gröfseren Strecke a die kleinere b abtragen; der hierbei bleibende Rest giebt an, um wieviel a gröfser ist als b. — Will man dagegen die Zahl bestimmen, wievielmal so grofs eine Strecke ist als eine andere, so geschieht dies durch das Messen, d. h. es wird die kleinere Strecke b so oft als möglich nebeneinander auf der gröfseren a abgetragen. Das Ergebnis einer Messung ist eine reine (unbenannte) Zahl, Verhältniszahl. Dafs eine Strecke a durch eine Strecke b gemessen und diese Zahl bestimmt werden soll, wird durch $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ d. i. das Verhältnis von a zu b ausgedrückt.

2. Der einfachste Fall beim Messen ist der, dafs kein Rest übrig bleibt; man nennt dann die Strecke b, welche in der anderen Strecke a ohne Rest aufgeht, ein Mafs dieser Strecke oder einen aliquoten Teil derselben; a ist ein Vielfaches von b. In diesem Falle ist die Verhältniszahl eine ganze Zahl. Es ist z. B. (Fig. 1)

$$\frac{QR}{XY} = 3, \quad QR = 3\,XY, \quad \text{oder } \frac{a}{b} = 3, \quad a = 3\,b.$$

Ist b ein Maſs von a, etwa $a = \alpha \cdot b$, wobei α eine ganze Zahl, so läſst sich auch ein Vielfaches von a, etwa na durch b ohne Rest messen; es ist nämlich

$$na = n\alpha \cdot b$$

oder

$$\frac{na}{b} = n\alpha, \text{ d. h.:}$$

Q X Y R a b

Fig. 1.

a) *Ein Maſs einer Strecke ist auch Maſs eines Vielfachen dieser Strecke.*

Umgekehrt ist ein Maſs c von b, wenn $b = \beta \cdot c$ ist, nun auch Maſs von a, indem $a = \alpha b = \alpha\beta \cdot c$, $\frac{a}{c} = \alpha\beta$ ist, d. h.:

b) *Der n^{te} Teil des Maſses einer Strecke ist auch Maſs dieser Strecke selbst.*

3. Wenn beim Messen einer Strecke a durch eine andere b ein Rest r_1 bleibt, indem $a > \alpha_1 \cdot b$ und $a < (\alpha_1 + 1)b$, so ist die Verhältniszahl der Messung von a durch b keine ganze Zahl, sondern sie liegt zwischen den ganzen Zahlen α_1 und $(\alpha_1 + 1)$. Um nun das Verhältnis beider Strecken zu bestimmen, sucht man eine Strecke m, welche sowohl ein Maſs von a als auch von b ist, d. i. ein gemeinsames Maſs der Strecken a und b. Ist z. B. (Fig. 2)

$$a = 5m, \quad b = 3m,$$

a b m

Fig. 2.

so ist

$$m = \frac{1}{3}b, \quad a = 5 \cdot \frac{1}{3}b = \frac{5}{3}b, \quad \frac{a}{b} = \frac{5}{3},$$

d. h. die Verhältniszahl der Messung ist dann ein Bruch. Ist $a > b$, so ist sie ein Bruch > 1; ist $a < b$, so ist sie ein echter Bruch:

$$m = \frac{1}{5}a, \quad b = 3 \cdot \frac{1}{5}a = \frac{3}{5}a, \quad \frac{b}{a} = \frac{3}{5}.$$

Ist allgemein:

$$a = \alpha m, \quad b = \beta m, \quad \text{so ist } \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Das letztere Verhältnis heiſst das umgekehrte Verhältnis in Bezug auf das erstere.

4. Wenn nun bei der Messung von a durch b der Rest r_1 bleibt, also $a = \alpha_1 b + r_1$, so ist: $r_1 = a - \alpha_1 b = \alpha m - \alpha_1 \beta m = (\alpha - \alpha_1\beta)m$, d. h. da α und $\alpha_1\beta$ ganze Zahlen sind:

a) *Ein gemeinsames Maſs zweier Strecken ist auch Maſs des Restes, der beim Messen der gröſseren durch die kleinere übrig bleibt,* — und umgekehrt, wie ebenso nachzuweisen ist:

b) *Ein Maſs der einen von zwei Strecken und des Restes der Messung der einen durch die andere ist auch Maſs der anderen Strecke.*

Dies bietet uns ein Mittel, *das gröſste gemeinsame Maſs zweier Strecken a und b zu bestimmen.* Dasselbe ist nämlich nun auch Maſs von b und r_1, d. h. die Aufgabe ist auf die gleiche, aber mit kleineren Strecken zurückgeführt. Ergiebt nun b durch r_1 gemessen den Rest r_2, ist also $b = \alpha_2 r_1 + r_2$, so muſs auch r_2 das verlangte gröſste gemeinsame Maſs als aliquoten Teil enthalten; d. h. die Messung ist nun mit r_1 und r_2 weiter zu führen: $r_1 = \alpha_3 r_2 + r_3$ u. s. w. Wenn

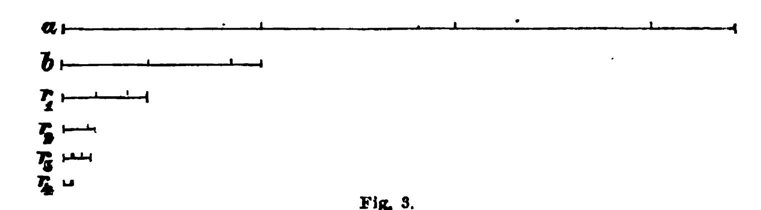


Fig. 3.

bei der Fortsetzung dieses Verfahrens einmal kein Rest mehr übrig bleibt: $r_2 = \alpha_4 r_3 + r_4$, $r_3 = \alpha_5 r_4$, indem der letzte Rest r_4 Maſs des vorletzten r_3 ist, so ist er nach b) auch Maſs von den vorhergehenden Resten r_2 u. s. w. und schlieſslich von b und a selbst; er ist das gröſste gemeinsame Maſs, da er jedes Maſs von a und b (als aliquoten Teil) enthalten muſs.

Ist z. B. (Fig. 3):

$$a = 3b + r_1,\ b = 2r_1 + r_2,\ r_1 = 2r_2 + r_3,\ r_2 = r_3 + r_4,\ r_3 = 3r_4$$

so ist:

$$r_2 = 3r_4 + r_4 = 4r_4, \qquad b = 2 \cdot 11 r_4 + 4 r_4 = 26 r_4,$$
$$r_1 = 2 \cdot 4 r_4 + 3 r_4 = 11 r_4, \quad a = 3 \cdot 26 r_4 + 11 r_4 = 89 r_4.$$

Somit

$$r_4 = \frac{1}{26} b, \qquad a = \frac{89}{26} b, \qquad \frac{a}{b} = \frac{89}{26}.$$

Ebenso folgt $$\frac{b}{a} = \frac{26}{89}.$$

5. Bei diesem Verfahren, das gemeinsame Maſs zweier Strecken zu bestimmen, ist sehr bald ein meſsbarer Rest für unsere Sinne nicht mehr wahrnehmbar; allein es läſst sich nachweisen, daſs in manchen Fällen dieses Verfahren absolut genommen immer einen Rest übrig läſst, wenn er auch bald so klein ist, daſs er von uns nicht mehr gemessen werden kann. Sollen wir z. B. die Diagonale AC eines Quadrates $ABCD$ durch dessen Seite AB messen und tragen wir

zu diesem Zweck $AX = AB$ auf AC ab und ziehen $XY \perp AC$, so ist der Rest $XC = XY$ (I. Teil §. 11, 8) auch $= BY$ (da sowohl $B \wedge X$, als $BY \wedge XY$ in Bezug auf AY als Axe) und der Rest XC läſst sich noch ein zweites Mal auf die Seite BC auftragen nach YX_1; dasselbe Verfahren läſst sich aber nun in dem $\triangle CXY$ mit dem zweiten Rest $X_1C = X_1Y_1$ auf dem ersten XC wiederholen u. s. w. ohne Ende, da sich immer wieder gleichschenkelige Dreiecke wie ABC und YXC ergeben müssen. Es läſst sich also AB auf AC einmal, der Rest XC auf AB oder BC zweimal, der Rest X_1C auf dem vorhergehenden wieder zweimal u. s. f. ohne Ende abtragen. Hiernach haben die Seite und Diagonale eines Quadrates kein irgend meſsbares gemeinsames Maſs.

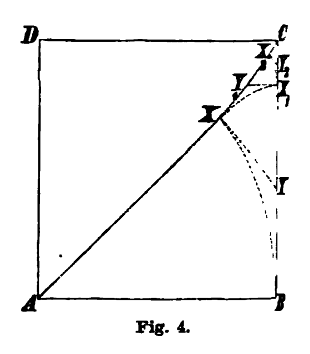


Fig. 4.

Zwei Strecken, welche ein gemeinsames Maſs haben, heiſsen **kommensurabel**, zwei Strecken ohne solches **inkommensurabel**.

Indem wir bei dieser Art des Aufsuchens des gröſsten gemeinsamen Maſses schon den 2., 3., 4. Rest vernachlässigen, gelangen wir wie in 4. zu einer Reihe von Verhältniszahlen, die mehr und mehr genau das Ergebnis der Messung darstellen, d. h. das Verhältnis zweier inkommensurabler Strecken ist **irrational**, während kommensurable Strecken rationale Verhältniszahlen ergeben.

In dem Beispiel in 4 ist:

$$\frac{a}{b} = 3 + \frac{r_1}{b}, \quad \frac{b}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2}, \quad \frac{r_2}{r_3} = 1 + \frac{r_4}{r_3}, \quad \frac{r_3}{r_4} = 3,$$

woraus folgt:

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}$$

Die Verhältniszahl wird hiernach durch einen **Kettenbruch** dargestellt.

In obigem Beispiel inkommensurabler Strecken ist:

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{XC}{BC}, \quad \frac{BC}{XC} = 2 + \frac{X_1C}{XC}, \quad \frac{XC}{X_1C} = 2 + \frac{X_2C}{X_1C} \text{ u. s. f.}$$

Daher ist das Verhältnis durch den **unendlichen periodischen Kettenbruch** bestimmt:

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

und die Reihe der Zahlen, welche annäherungsweise das Verhältnis darstellen, sind:

$$1 + \frac{1}{2} = 1{,}5;\quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1\frac{2}{5} = 1{,}4;\quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1\frac{5}{12} = 1{,}416$$

u. s. f. Setzen wir den wahren Wert der Verhältniszahl $= x$, so ist

$$x - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \ldots}}} = \frac{1}{2 + (x-1)},$$

woraus folgt: $x = \sqrt{2}$.

6. Aus dem Begriff inkommensurabler Strecken und irrationaler Zahlen folgt:

Zwei inkommensurable Strecken lassen sich durch kommensurable ersetzen bis zu jedem beliebigen Grad der Genauigkeit, ebenso ihr irrationales Verhältnis durch ein rationales.

Liegt das irrationale Verhältnis $\frac{a}{b}$ zwischen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha + 1}{\beta}$, so giebt $\frac{\alpha}{\beta}$ den Wert des Verhältnisses bis auf $\frac{1}{\beta}$ genau.

7. Indem von beliebigen Strecken a, b, c ihr Verhältnis zu einer ein für allemal gewählten Längeneinheit bestimmt wird, erhält man die Verhältniszahlen $\frac{a}{1}, \frac{b}{1}, \frac{c}{1}$ d. i. die Längenzahlen, die wir der Kürze wegen in der Folge blos durch a, b, c bezeichnen wollen, sodaſs dann mit diesen Zahlen alle Rechnungsarten durchgeführt werden können. Die Addition und Subtraktion dieser Längenzahlen entspricht der im I. Teil behandelten Addition und Subtraktion von Strecken. Das Produkt zweier solchen Längenzahlen wird der Kürze wegen einfach als Produkt der Strecken bezeichnet (es läſst sich geometrisch deuten als der Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Seiten die Längenzahlen darstellen — vgl. I. Teil §. 50, 2).

8. Wenn $a = \alpha \cdot b$, also $\frac{a}{b} = \alpha$, so ist auch

$$\mu a = \mu\alpha b = \alpha \cdot \mu b,\quad \frac{\mu a}{\mu b} = \alpha = \frac{a}{b},\text{ d. h.:}$$

Das Verhältnis zweier Strecken ist gleich dem Verhältnis gleicher Vielfache oder auch entsprechender Teile der Strecken.

§. 2. Das Teilverhältnis einer Strecke durch einen Punkt.

1. Von drei Punkten ABC einer Reihe begrenzen irgend zwei AB eine Strecke und der dritte C teilt dieselbe innen oder aufsen.

A a B A b B
C C

Fig. 5.

Wir betrachten hierbei als Teile oder Abschnitte der Strecke erstens den Abschnitt vom Anfangspunkt A der Strecke bis zum Teilpunkt C und zweitens den Abschnitt vom Teilpunkt C bis zum Endpunkt B der Strecke. Das Verhältnis des so bestimmten ersten Abschnittes zu dem zweiten $\frac{AC}{CB}$ heifst das Teilverhältnis der Strecke AB durch den Punkt C. Dasselbe ist positiv bei innerem Teilpunkt, negativ bei äufserem, da im ersten Falle beide Abschnitte gleichgerichtet, im letzteren gegengerichtet genommen sind (I. Teil §. 6, 5).

2. Der Wert des Teilverhältnisses $v = \frac{AC}{CB}$ ändert sich mit der Lage des Teilpunktes C. Wir erhalten alle möglichen Lagen und Werte, wenn wir C von A aus nach B und über B hinaus in unbeschränkt grofse Entfernung bewegt denken, um den Punkt dann andrerseits durch Fortbewegung in gleicher Richtung wieder bis A zurückgelangen zu lassen. Fällt C mit A zusammen, so ist $AC = 0$, somit $v = 0$. Wandert C von A bis B, so wird $v > 0$, d. h. positiv; im besonderen ist $v \begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{cases}$, je nachdem C auf der ersten Hälfte von AB, auf der Mitte oder auf der zweiten Hälfte liegt. Fällt C in B, so wird $CB = 0$, somit $v = \infty$ und sein Wert springt in $-\infty$ über, wenn C durch B hindurchgeht. Es bleibt dann v beim Weiterrücken von C negativ und nimmt stetig ab, da

$$v = \frac{AC}{CB} = \frac{AB + BC}{CB} = \frac{AB}{CB} - 1 = -\left(1 + \frac{AB}{BC}\right)$$

und in diesem Ausdruck nur BC wächst. Das Verhältnis nähert sich dem Grenzwert -1, während C in unbeschränkt grofse Entfernung rückt, da sich hierbei $\frac{AB}{BC}$ der Null unbeschränkt nähert. — Wenn sich dann C aus unbeschränkt grofser Entfernung stets im Richtungssinn AB gegen A bewegt, so bleibt v stets negativ und absolut kleiner als 1, nämlich

$$v = -\left(1 - \frac{AB}{CB}\right),$$

sein absoluter Wert nimmt, wie aus letzter Formel ersichtlich, stets ab, bis wieder $v = 0$ wird, wenn C mit A zusammentrifft.

3. Während also C die unbegrenzte Gerade durchläuft, nimmt das Teilverhältnis der Reihe nach alle Werte von 0 bis $\pm \infty$ an, aber jeden nur ein einziges Mal, so dafs man auch umgekehrt zu einem bestimmten Wert v des Teilverhältnisses von AB nur einen einzigen bestimmten Punkt C finden kann. Denn es sind dann die beiden fraglichen Abschnitte AC und CB nach Gröfse und Richtung bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$AC + CB = AB, \quad \frac{AC}{CB} = v.$$

a) *Jedem (nach Vorzeichen und Gröfse bestimmten) Teilverhältnis einer Strecke entspricht immer ein einziger Teilpunkt.*

Nur für den Wert $\frac{AC}{CB} = -1$ läfst sich kein Punkt in mefsbarer Entfernung von AB angeben, vielmehr wird dieser Wert um so genauer erreicht, je weiter der Teilpunkt in unbeschränkt grofse Entfernung auf dem einen oder anderen Halbstrahl von A hinausrückt. Dies drückt man durch den Satz aus:

b) *Dem Wert des Teilverhältnisses* $\frac{AC}{CB} = -1$ *entspricht der unendlich ferne Punkt als Teilpunkt der Geraden.*

Man nimmt in dieser Redeweise nur einen unendlich fernen Punkt einer Geraden an, da auch im Übrigen jedem Wert des Teilverhältnisses nur ein Punkt entspricht (vgl. die Bemerkung im I. Teil §. 3, 4).

§. 3. Die Proportion.

1. Wenn die Verhältniszahlen je zweier Paare von Strecken einander gleich sind, $a = \alpha \cdot b$ und $a_1 = \alpha \cdot b_1$, so giebt die Gleichsetzung der Verhältnisse eine Verhältnisgleichung oder Proportion:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \quad \text{oder} \quad a : b = a_1 : b_1.$$

Die einzelnen Verhältnisse heifsen die linke und rechte Seite der Proportion, die vier sie bildenden Strecken deren Glieder; diese werden als erstes a, zweites b, drittes a_1 und viertes b_1 unterschieden oder auch so, dafs das erste und vierte Glied die äufseren, das zweite und dritte die inneren Glieder der Proportion heifsen. Das erste und dritte Glied werden entsprechende oder proportionale Glieder genannt, ebenso das zweite und vierte.

Da die Verhältniszahlen reine (unbenannte) Zahlen sind, so kann auch das Verhältnis zweier Strecken dem Verhältnis zweier Flächen, Winkel oder Bogen gleich sein.

2. Verhältnisse und Proportionen lassen sich nach einigen arith-

metischen Regeln umformen, auf welche hier des häufigen Gebrauchs wegen aufmerksam gemacht werden soll. Ist

$$a = \mu b, \quad a_1 = \mu b_1, \quad \text{also } \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1},$$

so ist auch

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\mu b}{\mu b_1} = \frac{b}{b_1}, \qquad \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{\mu} = \frac{b}{a} \text{ oder } \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}$$

d. h.:

a) *Aus einer Proportion ergeben sich richtige Proportionen durch Vertauschung α) der inneren Glieder unter sich, β) der äußeren unter sich, γ) der inneren mit den äußeren.*

Ferner ergiebt sich

$$\frac{\varkappa a}{b} = \varkappa \mu = \frac{\varkappa a_1}{b_1}, \qquad \frac{a}{\varkappa b} = \frac{\mu}{\varkappa} = \frac{a_1}{\mu b_1}$$

d. h.:

b) *Aus einer Proportion ergiebt sich eine richtige Proportion durch Multiplikation je eines inneren und eines äußeren Gliedes mit einer Zahl.*

Weiter folgt, daß:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{\mu b \pm b}{b} = \frac{(\mu \pm 1) b}{b} = \mu \pm 1 = \frac{(\mu \pm 1) b_1}{b_1} = \frac{\mu b_1 \pm b_1}{b_1} = \frac{a_1 \pm b_1}{b_1}.$$

Ebenso

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{a_1 \pm b_1}{a_1}, \qquad \frac{a + b}{a - b} = \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1}$$

d. h.:

c) *In einer Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zu einem derselben, oder auch die Summe zur Differenz, wie die entsprechenden Ausdrücke des dritten und vierten Gliedes.*

Wenn mehrere Verhältnisse einander gleich sind,

$$\mu = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

so ist auch

$$\frac{a + a_1 + a_2}{b + b_1 + b_2} = \frac{\mu b + \mu b_1 + \mu b_2}{b + b_1 + b_2} = \frac{\mu (b + b_1 + b_2)}{b + b_1 + b_2} = \mu = \frac{a}{b}$$

d. h.:

d) *Von mehreren gleichen Verhältnissen verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweiten, wie irgend ein erstes zum zugehörigen zweiten.*

Denken wir uns für die Strecken die Längenzahlen gesetzt, so folgt aus $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ durch Multiplikation mit $b b_1$

$$a b_1 = a_1 b.$$

e) *In einer Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem der innern.*

Umgekehrt kann aus einer solchen Produktengleichung eine Proportion hergestellt werden, indem aus dem einen Produkt die äufsern, aus dem andern die innern Glieder entnommen werden.

3. Sind drei Strecken a, b, c gegeben und es soll zu derselben die vierte Proportionale gefunden werden, welche also der Proportion $a : b = c : x$ entspricht, so ist das Verhältnis $\frac{b}{a}$ und damit auch $x = \frac{b}{a} \cdot c$ bestimmt, d. h.:

Durch drei Glieder einer Proportion ist das vierte eindeutig bestimmt.

4. Wenn in einer Proportion die beiden mittleren Glieder einander gleich sind:

$$a : x = x : b,$$

so heifst das mittlere Glied die mittlere (geometrische) Proportionale oder das geometrische Mittel der äufseren a und b. Es ist dann:

$$x^2 = a \cdot b, \quad x = \sqrt{ab},$$

woraus folgt:

Die mittlere Proportionale zu zwei Gliedern ist (absolut genommen) eindeutig bestimmt.

5. Unter dem harmonischen Mittel zu zwei Strecken a und b versteht man eine Strecke x, welche der Proportion entspricht:

$$\frac{a - x}{x - b} = \frac{a}{b}, \quad x = \frac{2ab}{a + b}, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Das harmonische Mittel zweier Strecken ist eindeutig bestimmt.

Die Pythagoreer nannten die Proportion

$$(a - x) : (x - b) = a : b$$

eine harmonische, weil sich harmonisch klingende Töne ergeben, wenn von einer gespannten Saite solche Teile a, x, b genommen werden, welche dieser Proportion entsprechen, wie z. B. 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ (Prim, Quinte, Oktave), oder 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ (Prim, Terz, Quinte).

Anmerkung. Wird das arithmetische Mittel von a und b durch A, das geometrische durch G, das harmonische durch H bezeichnet, so ist: $A : G = G : H$ und es ist leicht zu zeigen, dafs $A > G > H$ sein mufs.

§. 4. Perspektivische Lage.

1. Wenn von einem Punkt aus Strahlen nach allen Punkten einer Figur gehen und auf jedem dieser Strahlen ein weiterer Punkt angenommen wird, so wird durch letztere Punkte eine zweite Figur bestimmt, welche man eine perspektivische Projektion der ersteren nennt im allgemeinsten Sinne dieses Wortes.

Zwei Figuren heifsen also perspektivisch, wenn jedem Punkte der einen Figur ein solcher der zweiten Figur je auf einem

Strahl durch einen bestimmten Punkt entspricht. Den letzteren Punkt nennt man das Projektionscentrum, die Strahlen desselben Projektionsstrahlen. Als besonderer Fall ist derjenige aufzufassen, da die Projektionsstrahlen unter einander parallel sind (vgl. I. Teil §. 3, 4).

Das Sehen entspricht einer solchen perspektivischen Projektion. — Beispiel: Projektion der Gegenstände vor dem Fenster durch das Auge auf das Fenster; das perspektivische Zeichnen. Schatten.

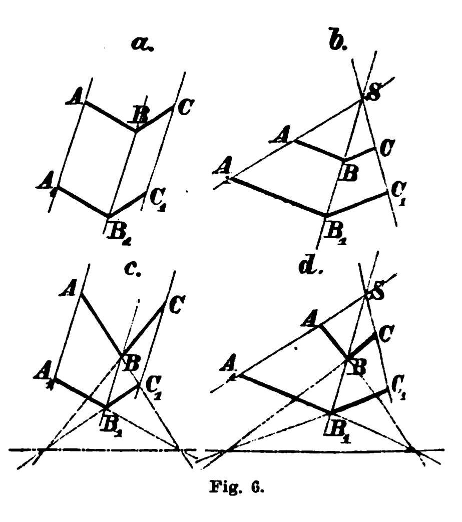


Fig. 6.

2. Im folgenden betrachten wir die perspektivischen Figuren einer Ebene, wobei wir als weitere Bedingung annehmen, daſs jeder Geraden der einen Figur eine Gerade der anderen entspricht.

Wir können hiernach folgende Fälle der perspektivischen Lage unterscheiden (Fig. 6):

Die entsprechenden Punkte werden verbunden durch Projektionsstrahlen, welche

		1) parallel sind:	2) durch einen Punkt gehen:
Die entsprechenden Geraden	α) sind parallel:	Kongruenz	Ähnlichkeit
	β) schneiden einander auf einer Geraden:	Affinität	Kollineation.

Letztere Gerade heiſst Projektionsaxe.

Über die perspektivische Kongruenz siehe I. Teil, Sechstes Kapitel. Die symmetrische Lage zweier Figuren ist ein besonderer Fall der Affinität, die diametrale Lage ein besonderer Fall der perspektivischen Ähnlichkeit. — Es lassen sich auch perspektivische Kongruenz und Affinität als besondere Fälle der Ähnlichkeit, bzw. Kollineation auffassen; denn letztere gehen in erstere über, wenn das Projektionscentrum in unbeschränkt groſse Entfernung hinausrückt (I. Teil §. 3, 4). Wir werden daher im folgenden nur die perspektivische Ähnlichkeit und Kollineation betrachten.

Ja auch die perspektivisch ähnliche Lage entsteht aus der kollinearen, wenn die Projektionsaxe in unbeschränkt groſse Entfernung rückt. Jedoch sind die Gröſsenverhältnisse perspektivisch ähnlicher

Figuren weit einfacher, als die kollinearer Figuren; wir müssen also jene vor diesen kennen lernen.

Die Abbildung erfolgt unter den angegebenen Bedingungen ebenso wie die Abbildung der Figuren einer Ebene auf eine zweite Ebene; es sind hierbei gleichsam beide Ebenen in eine zusammengefallen, und die Unterscheidung der Teile beider Figuren kann in der Weise geschehen, dafs man von Punkten und Linien der ersten und der zweiten Ebene spricht. Die Übereinstimmung mit der Projektion einer Ebene auf eine zweite wird im dritten Teil nachgewiesen werden.

3. Zwei Figuren heifsen ähnlich (∽), wenn sie in perspektivisch ähnliche Lage, projektivisch (⊼), wenn sie in perspektivische Lage gebracht werden können.

Zweites Kapitel.

Verhältnisse von Strecken im Strahlenbüschel mit Parallelen.

§. 5. Der Zweistrahl mit Parallelen.

1. Zwei parallele Strecken liegen stets perspektivisch ähnlich (p. ä.) in Bezug auf die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden ihrer Grenzpunkte als Centren. Zwei Strecken lassen sich daher stets perspektivisch legen (zwei Winkel dagegen nur, wenn sie einander gleich sind). In einem Zweistrahl ab mit zwei Parallelen AB und A_1B_1 entsprechen einander nicht blos die parallelen Strecken AB und A_1B_1 als p. ä., sondern es entsprechen einander auch als perspektivisch affine Gebilde die Strecken des Zweistrahls, welche je vom Scheitel und einer Parallele oder von beiden Parallelen begrenzt sind, wie SB und SA, SB_1 und SA_1, BB_1 und AA_1. Es entsprechen also hierbei einander diejenigen Strecken zweier Geraden, welche von denselben Geraden begrenzt sind.

Ist das Verhältnis eines Abschnittes auf einer Geraden zu dem entsprechenden Abschnitt einer zweiten Geraden gleich dem Verhältnis zweier weiteren ebenso gewählten Abschnitte beider Geraden, so heifsen diese Abschnitte proportional.

2. *Auf einem Zweistrahl werden von zwei Parallelen und dem Scheitel proportionale Abschnitte begrenzt.*

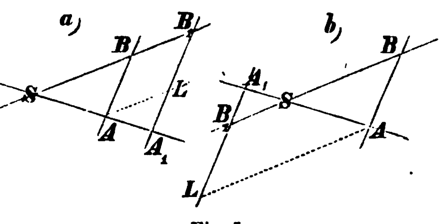


Fig. 7.

Wenn also $AB \parallel A_1B_1$, so wird behauptet, dafs:

$$SA : SB = AA_1 : BB_1 = SA_1 : SB_1.$$

Zum Beweise hat man zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Sind SA und AA_1 kommensurabel und läfst sich ihr gemeinsames Mafs $x$mal auf SA und $y$mal auf AA_1 abtragen, so kann man durch die erhaltenen Teilpunkte Parallele zu AB ziehen: dann wird auch SB_1 in gleiche Teile geteilt (I. Teil §. 16, 8c), wovon x auf SB und y auf BB_1 kommen, so dafs

$$SA:AA_1 = x:y = SB:BB_1, \quad SA:SA_1 = x:(x+y) = SB:SB_1,$$

woraus sich bei Vertauschung der inneren Glieder obige Behauptung ergiebt.

b) Sind aber SA und AA_1 inkommensurabel und wird AA_1 in y gleiche Teile geteilt, von welchen einer zwar mehr als $x$mal, aber weniger als $(x+1)$mal auf SA enthalten sei, so kann man wieder durch die Teilpunkte Parallele zu AB ziehen; dann wird auch BB_1 in y, SB in $(x+1)$ Teile geteilt, welche — mit Ausnahme des letzten kleineren — von gleicher Gröfse sind. Nun liegt der Wert des Teilverhältnisses $SA:AA_1$ zwischen $x:y$ und $(x+1):y$ und der Wert von $SB:BB_1$ liegt zwischen denselben Gröfsen; demnach mufs $\frac{SA}{AA_1} - \frac{SB}{BB_1}$ kleiner sein als $\frac{x+1}{y} - \frac{x}{y} = \frac{1}{y}$. Je gröfser nun die Anzahl y der Teile genommen wird, um so kleiner wird der Unterschied $\frac{1}{y}$ beider Verhältnisse und um so kleiner auch das zuletzt übrig bleibende Teilchen, so dafs die Werte beider Verhältnisse um so mehr übereinstimmen, je genauer sie bestimmt werden; dies entspricht aber dem Begriff der Gleichheit irrationaler Zahlen. Somit ist auch für diesen Fall obige Behauptung erwiesen.

3. Der eben bewiesene Satz läfst sich nun auch auf das Verhältnis der parallelen Strecken, die vom Zweistrahl begrenzt sind, anwenden, wenn man durch den Punkt A die Gerade $AL \parallel BB_1$ zieht. Es ist alsdann $LB_1 = AB$ (I. Teil §. 16, 7a), während aus 2 folgt:

$$LB_1 : A_1B_1 = AS : A_1S,$$

somit:

$$AB : A_1B_1 = AS : A_1S = BS : B_1S;$$

d. h.:

Im Zweistrahl mit zwei Parallelen ist das Verhältnis der Parallelstrecken gleich dem Verhältnis der entsprechenden Strecken eines Strahles.

4. Diese beiden Sätze lassen auch je eine Umkehrung zu. Nehmen wir zunächst an, es seien die Strahlen SA und SB eines Zweistrahls durch zwei Gerade so geteilt, dafs (auch dem Richtungssinne und Zeichen nach) $SA:SB = SA_1:SB_1$; wenn dann A_1B_1 nicht $\parallel AB$ wäre, so könnte man durch A_1 eine Gerade $A_1X \parallel AB$ ziehen, so dafs (nach 2) $SA:SB = SA_1:SX$; aus §. 2, 3 folgt aber nun, dafs X mit B_1 zusammenfallen mufs, also $A_1B_1 \parallel AB$; d. h.:

Zwei Gerade, welche auf den Strahlen eines Zweistrahls mit dem Scheitel proportionale Abschnitte begrenzen, sind parallel.

5. Nehmen wir dagegen an, es sei $AB \parallel A_1B_1$ und ein Punkt S auf AA_1 so gewählt, dafs

$$SA : SA_1 = AB : A_1B_1,$$

— wobei S äufserer Teilpunkt von AB sei, falls die Parallelstrecken von der Geraden AA_1 aus gleichgerichtet parallel sind, dagegen innerer Teilpunkt, falls letztere von AA_1 aus gegengerichtet sind, — und würde BB_1 die Gerade AA_1 in X schneiden, so wäre nach 3

Fig. 8.

$$XA : XA_1 = AB : A_1B_1;$$

dies kann aber nur stattfinden, wenn X mit S zusammenfällt (§. 2, 3a), d. h.:

Legt man durch die Grenzpunkte einer Strecke zwei $\left\{\begin{matrix}\textit{gleich-}\\ \textit{gegen-}\end{matrix}\right\}$ *gerichtete parallele Strecken, so liegen deren Endpunkte auf einer Geraden mit dem Punkt, welcher die erstere Strecke* $\left\{\begin{matrix}\textit{aufsen}\\ \textit{innen}\end{matrix}\right\}$ *im Verhältnis der Parallelstrecken teilt.*

§. 6. Der Strahlenbüschel mit Parallelen und der Parallelstrahlenbüschel.

1. Läfst man einen Strahlenbüschel S durch zwei Parallele durchschneiden, so entstehen perspektivisch ähnliche Punktreihen (§. 4, 2) und es ist für beliebige entsprechende Strecken derselben:

$$AB : A_1B_1 = SB : SB_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1.$$

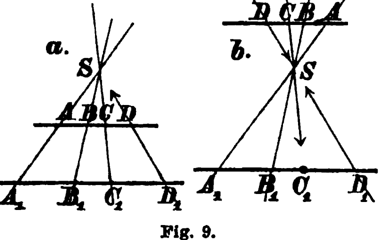


Fig. 9.

In perspektivisch ähnlichen Punktreihen sind die entsprechenden Abschnitte unter einander proportional und ebenso mit den Strahlstrecken nach entsprechenden Punkten.

2. Aus der Möglichkeit von nur einer vierten Proportionalen zu drei Strecken ergiebt sich, dafs, wenn auf zwei Parallelen $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$ ist, eine Gerade, welche von dem Schnittpunkt von AA_1 und BB_1 aus nach einem der beiden Punkte C oder C_1 gezogen wird, auch den andern trifft; d. h.:

Von zwei parallelen und in gleichem Verhältnis geteilten Strecken liegen die Grenz-, bzw. Teilpunkte perspektivisch auf drei Strahlen eines Punktes.

Der Scheitel des perspektivischen Dreistrahls teilt die Verbindungsstrecke entsprechender Punkte im Verhältnis der entsprechenden Strecken und zwar $\left\{\begin{matrix}\text{aufsen}\\ \text{innen}\end{matrix}\right\}$ bei $\left\{\begin{matrix}\text{gleich-}\\ \text{gegen-}\end{matrix}\right\}$gerichtet paralleler Lage der entsprechenden Strecken.

3. a) Aus 2 folgt weiter:

Von zwei in gleichem Verhältnis geteilten Strecken bilden die Grenz- und Teilpunkte drei Punktpaare ähnlicher Reihen.

Legt man sie nämlich parallel, so sind sie perspektivisch ähnlich.

b) Wenn nun zwei Punktreihen $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ einer dritten ABC ähnlich sind,

$$A_1B_1C_1 \backsim ABC, \quad A_2B_2C_2 \backsim ABC,$$

so stimmen auch die Verhältnisse der Strecken der beiden ersten Punktreihen mit einander überein und es ergiebt sich

$$A_1B_1C_1 \backsim A_2B_2C_2.$$

Wenn zwei Punktreihen einer dritten ähnlich (oder perspektivisch ähnlich) sind, so sind sie es auch unter einander.

4. Solche ähnliche Punktreihen entstehen nun auch durch einen Parallelstrahlenbüschel $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ auf zwei Transversalen $SABC$ und $SA_1B_1C_1$. Denn aus §. 5, 2 geht hervor, dafs

$$AB:A_1B_1 = SB:SB_1 = BC:B_1C_1, \; AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$$

somit nach 3 $\quad ABC \backsim A_1B_1C_1$; d. h.:

a) *Ein Parallelstrahlenbüschel bildet auf zwei Transversalen ähnliche Punktreihen (proportionale Abschnitte).*

Die Umkehrung läfst sich wie in 2 erweisen:

b) *Wenn von drei Geraden, welche auf zwei Transversalen proportionale Abschnitte begrenzen, zwei parallel sind, so ist auch die dritte parallel zu ihnen.*

Fig. 10.

In den ähnlichen Punktreihen $SABC \backsim SA_1B_1C_1$ ist S ein sich selbst entsprechender Punkt. Als Erweiterung von §. 5, 4 folgt:

c) *Wenn der Schnittpunkt zweier ähnlichen Punktreihen ein sich selbst entsprechender Punkt ist, so sind die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte unter einander parallel.*

(Die Punktreihen sind perspektivisch affin.)

§. 7. Anwendung zur Konstruktion von proportionalen Strecken und von Parallelen.

1. Aufgabe. *Es soll zu drei gegebenen Strecken a, b, c die vierte Proportionale konstruiert werden,* d. h. man soll eine Strecke x suchen, so dafs

$$a : b = c : x$$

ist.

a) Nach §. 5, 2: In einem Zweistrahl trägt man vom Scheitel aus auf den einen Strahl das erste Glied, auf den andern das zweite und verbindet deren Endpunkte. Von irgend einem Grenzpunkt des ersten Gliedes trägt man dann das dritte nach der einen oder andern Richtung des ersten Strahles ab und zieht durch den Endpunkt des dritten Gliedes die Parallele zu jener Verbindungsgeraden. Alsdann liegt das vierte fragliche Glied dem dritten entsprechend gegenüber.

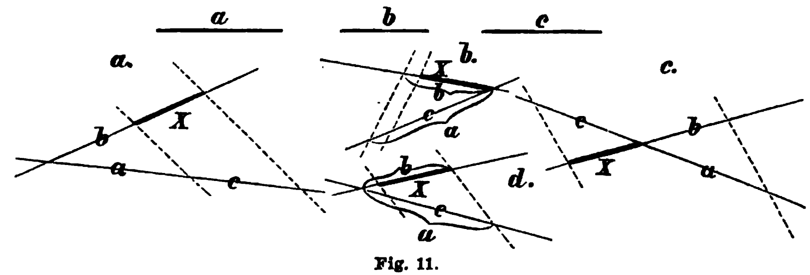


Fig. 11.

b) Nach §. 5, 3: Auf einem Strahl eines Zweistrahls trägt man vom Scheitel aus das erste und zweite Glied an; das dritte Glied trägt man vom Endpunkt des ersten Gliedes so in den Zweistrahl ein, daſs sein Endpunkt auf dem zweiten Strahle liegt. Zu der so erhaltenen Geraden zieht man durch den Endpunkt des zweiten Gliedes die Parallele; dann stellt deren ebenfalls vom Zweistrahl begrenztes Stück das vierte Glied dar.

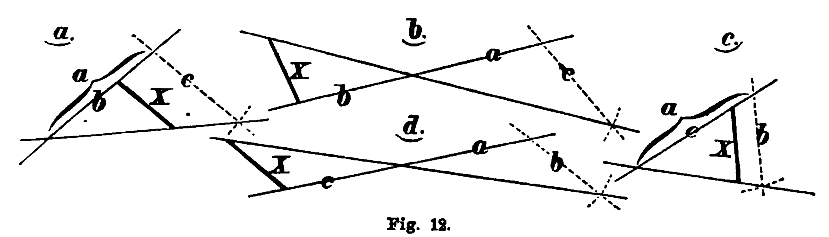


Fig. 12.

c) Nach §. 6, 1: Man trägt auf einer von zwei Parallelen von einem Punkt aus das erste und zweite Glied an, auf der anderen

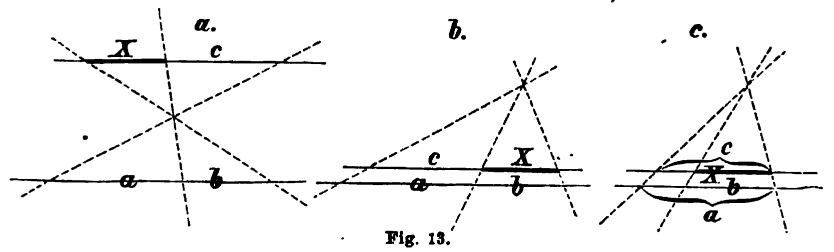


Fig. 13.

Parallele das dritte Glied, verbindet die Endpunkte des ersten und dritten Gliedes und zieht durch den Schnittpunkt dieser Verbindungs-

geraden den Strahl nach dem Endpunkt des zweiten Gliedes. Das vierte Glied entspricht dann perspektivisch dem zweiten Glied.

d) Nach §. 6, 4: Auf einer Geraden trägt man von einem Punkt aus das erste und zweite Glied ab und zieht durch deren Endpunkte drei Parallele. Das dritte Glied trägt man in letztere so ein, dafs es von denselben Parallelen wie das erste Glied begrenzt wird. Auf gleicher Geraden mit diesem dritten Gliede wird das vierte Glied von den Parallelen des zweiten Gliedes begrenzt.

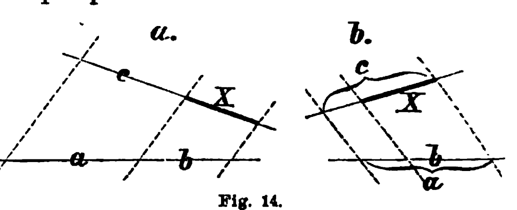


Fig. 14.

In allen diesen Konstruktionen kann die Lage des zweiten und dritten Gliedes vertauscht werden.

2. Wie die Aufgabe: *Durch einen Punkt zu einer Geraden die Parallele zu ziehen*, mit Hilfe von Lineal und Mafsstab durch Abmessen von vier eine Proportion bildenden Abschnitten gelöst wird, ergiebt sich aus 1a.

3. Aufgabe. *Es soll eine Strecke AB im Verhältnis zweier gegebenen Strecken $p:q$* (z. B. $7:3$) *geteilt werden*, d. h. es soll ein Punkt C so bestimmt werden, dafs $AC:CB = p:q$ ist (vgl. §. 2).

a) Nach §. 5, 2: Man trägt auf einem Strahl durch A $AX = p$, $XY = q$ ab, zieht YB und hierzu die Parallele durch X, so giebt

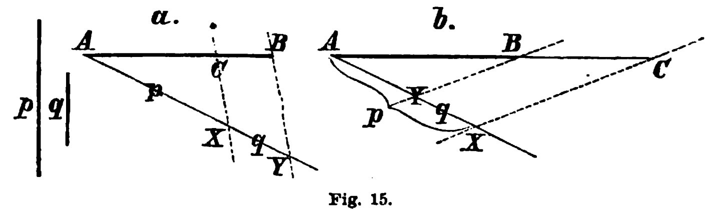


Fig. 15.

diese den Teilpunkt C. Man erhält den inneren Teilpunkt, wenn AX und XY im gleichen Sinn, den äufseren, sobald diese Strecken im entgegengesetzten Sinn aufgetragen werden.

b) Nach §. 5, 5: Man trägt auf zwei beliebigen Parallelen durch

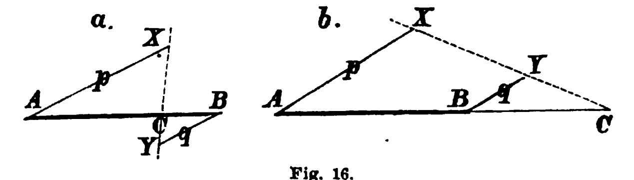


Fig. 16.

A und B die Strecken $AX = p$ und $BY = q$ ab, zieht XY, so giebt

diese Verbindungsgerade den Teilpunkt C, und zwar den inneren, wenn AX und BY gegengerichtet, den äuſseren, wenn sie gleichgerichtet.

c) Nach §. 6, 1: Man trägt auf eine Parallele zu AB $XY = p$, $YZ = q$ ab, verbindet A mit X, B mit Z und zieht vom Schnittpunkt S dieser Verbindungsgeraden den Strahl nach Y, so bestimmt dieser den Teilpunkt C.

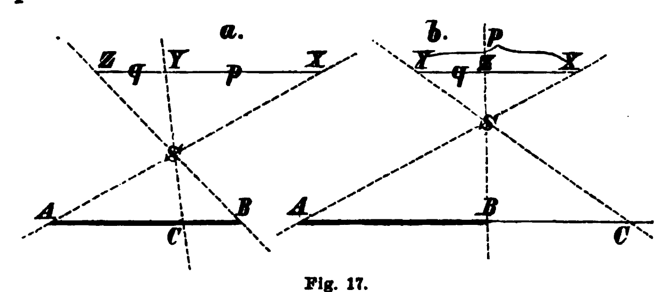


Fig. 17.

Zusatz. *Soll eine Strecke im Verhältnis gegebener Zahlen geteilt werden,* so konstruiert man zunächst mit einer beliebigen Strecke als Maſs die den Zahlen entsprechenden Strecken und verfährt dann wie eben gezeigt.

Drittes Kapitel.

Produkte von Strecken im Zweistrahl mit Antiparallelen und mit dem Kreis.

§. 8. Der Zweistrahl mit Antiparallelen.

1. Wenn wir im Zweistrahl S mit zwei Parallelen $AB \parallel XY$ die Figur SXY durch eine Umwendung um die Winkelhalbierende

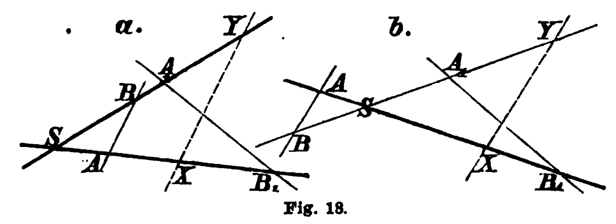


Fig. 18.

von ASB in die Lage SA_1B_1 bringen, so ist $\sphericalangle SA_1B_1 = SXY = SAB$, und die Geraden AB und A_1B_1 heiſsen unter dieser Bedingung antiparallel zu SA und SB (I. Teil §. 41, 1, Anm.). Da umgekehrt zwei Antiparallele AB und A_1B_1 stets durch eine Umwendung in parallele Lage gebracht werden können, so folgt aus §. 5:

$$SA : SB = SA_1 : SB_1 \text{ oder } AS \cdot SB_1 = A_1S \cdot SB, \text{ d. h.:}$$

a) *Zwei Antiparallele begrenzen auf einem Zweistrahl zwei Strecken, welche der Scheitel des letzteren so teilt, dafs das Produkt der Abschnitte der einen Strecke gleich dem der anderen ist* (Über die Ausdrucksweise vgl. §. 1, 7.) —

und $AB : A_1B_1 = SA : SA_1 = SB : SB_1$, d. h.:

b) *Die eine von zwei antiparallelen Strecken verhält sich zur anderen, wie ein von ersterer begrenzter Scheitelabschnitt des einen Strahls zu dem von der zweiten Strecke begrenzten des zweiten Strahles* —

und entsprechend §. 5, 4:

c) *Wird auf den Strahlen eines Zweistrahls je eine Strecke durch den Scheitel* $\left\{\begin{matrix}\textit{innen}\\ \textit{außen}\end{matrix}\right\}$ *so geteilt, dafs das Produkt der Abschnitte der einen Strecke gleich dem der anderen ist, so sind die Verbindungsgeraden der Strecken antiparallel.*

2. Gehen im besonderen die beiden Antiparallelen durch denselben Punkt des einen Strahles, etwa durch B, so ist:

$SA : SB = SB : SA_1$, $\overline{SB}^2 = SA \cdot SA_1$.

Fig. 19.

Schneiden im Zweistrahl zwei Antiparallele einander auf einem der Strahlen, so ist der Abschnitt dieses Strahles die mittlere Proportionale zu den vom Scheitel einerseits begrenzten Abschnitten des andern.

3. Dieser Fall liegt vor, wenn in einem rechtwinkligen Dreieck ACB die Hypotenusenhöhe CC_1 gezogen wird, da dann $\sphericalangle ACB = AC_1C = BC_1C$, und zwar kann sowohl A wie B als Scheitel eines Zweistrahls mit Antiparallelen aufgefafst werden.

Hier gilt nun **erstens** (nach 2):

$AC_1 : AC = AC : AB$, $\overline{AC}^2 = AC_1 \cdot AB$

$C_1B : BC = BC : AB$, $\overline{BC}^2 = C_1B \cdot AB$, d. h.:

Fig. 20.

a) *Eine Kathete ist die mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf sie* (vgl. I Teil §. 46, 8).

Zweitens aber ist (nach 1, b)

im Zweistrahl von A: $BC : CC_1 = AC : AC_1$ und

im Zweistrahl von B: $C_1B : BC = CC_1 : AC$,

woraus folgt (durch Multiplikation):

$$C_1B : CC_1 = CC_1 : AC_1, \quad \overline{CC_1}^2 = AC_1 \cdot C_1B, \quad \text{d. h.:}$$

b) *Die Hypotenusenhöhe ist die mittlere Proportionale zu den beiden durch sie gebildeten Hypotenusen-Abschnitten* (vgl. I. Teil §. 46, 6).

Aus a) folgt noch weiter:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (AC_1 + C_1B) \cdot AB = \overline{AB}^2.$$

Dies ist der arithmetische Ausdruck für den pythagoreischen Lehrsatz (I. Teil §. 47, 3):

c) *Die zweite Potenz der Hypotenuse ist gleich der Summe der zweiten Potenzen der Katheten.*

Es wird diese Gleichung benutzt, um aus zwei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks die dritte zu berechnen, z. B.

$$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{(AB + BC)(AB - BC)}.$$

Die weitere Ausführung der sich hieraus ergebenden metrischen Beziehungen folgt in der zweiten Abteilung.

§. 9. Der Strahlenbüschel mit dem Kreis.

1. Nach I. Teil §. 41, 1 und 2 sind im Sehnenviereck die gegenüberliegenden Seiten antiparallel; daher gilt nun weiter nach §. 8, 1:

$$SA : SA_1 = SB_1 : SB$$

oder

$$AS \cdot SB = A_1S \cdot SB_1, \text{ d. h.:}$$

a) *Zwei Sehnen werden durch den Schnittpunkt ihrer Geraden so geteilt, dafs das Produkt der Abschnitte der einen gleich dem der andern ist.*

Fig. 21.

Da einerseits durch drei Punkte ein Kreis, andrerseits zu drei Gliedern einer Proportion das vierte eindeutig bestimmt ist, so folgt nun umgekehrt:

b) *Wird durch den Scheitel eines Zweistrahls je eine Strecke auf jedem Strahl aufsen oder wird jede innen so geteilt, dafs das Produkt der Abschnitte der einen Strecke gleich dem der andern ist, so liegen die vier Grenzpunkte dieser Strecken auf einem Kreis.*

2. Läfst man hierbei die eine Sehne unbeschränkt kleiner werden, so ergiebt sich schliefslich eine Tangente, wobei $\sphericalangle SA_1A = SBA_1$ ist. Daher folgt aus §. 8, 2:

$$SA : SA_1 = SA_1 : SB, \quad \overline{SA_1}^2 = SA \cdot SB.$$

a) *Die Tangente von einem Punkt an einen Kreis ist die mittlere Proportionale zu den Abschnitten, in welche der Punkt die Sehnen der durch ihn gezogenen Sekanten teilt.*

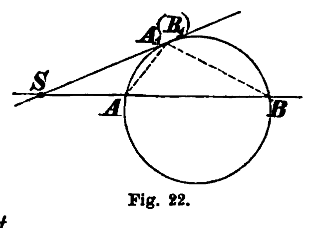


Fig. 22.

Aus der Eindeutigkeit der mittleren Proportionalen zu zwei Strecken folgt umgekehrt:

b) *Trägt man von dem Scheitel eines Zweistrahls auf dem einen Strahl zwei Strecken nach einerlei Richtung ab und auf dem andern deren mittlere Proportionale, so berührt der Kreis durch die Endpunkte dieser drei Strecken den zweiten Strahl.*

3. Da in einem Kreis jeder Peripheriewinkel ein Rechter ist, dessen Sehne ein Durchmesser, so lassen sich die in §. 8, 3 angegebenen Sätze sofort auf Figuren im Kreis übertragen:

$AC_1 : AC = AC : AB, \quad \overline{AC}^2 = AC_1 \cdot AB,$ d. h.:

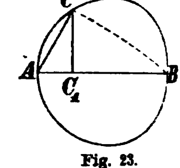


Fig. 23.

a) *Jede Kreissehne ist die mittlere Proportionale zwischen ihrer Projektion auf den durch einen ihrer Grenzpunkte gezogenen Durchmesser und dem Durchmesser selbst* — ferner:

$AC_1 : CC_1 = CC_1 : C_1B, \quad \overline{CC_1}^2 = AC_1 \cdot C_1B,$ d. h.:

b) *Jede zu einem Durchmesser normale Halbsehne (Ordinate) eines Kreises ist die mittlere Proportionale zu den durch sie gebildeten Abschnitten (Abscissen) des Durchmessers;*

und umgekehrt:

c) *Errichtet man in einem innern Teilpunkt einer Strecke eine normale Strecke, welche die mittlere Proportionale der Abschnitte ist, so liegt deren Endpunkt auf dem um die Strecke als Durchmesser beschriebenen Kreis.*

4. Die Sätze 1a, 2a und 3b geben Beziehungen, welche durch die Gröſse des Kreises und die Lage des Punktes bzw. dessen Abstand vom Mittelpunkt bestimmt sind. Ist nämlich r der Radius des Kreises, a der Abstand des Punktes vom Mittelpunkt, so folgt aus 3b für die Ordinate (Halbsehne) h eines Punktes innerhalb der Kreisfläche:

$$r^2 - a^2 = h^2 = (r + a)(r - a)$$

und für die Tangente eines auſserhalb des Kreises liegenden Punktes

$$a^2 - r^2 = t^2 = (a + r)(a - r).$$

Man nennt nun die Differenz der Quadrate der Abstände r und a eines Punktes der Peripherie und eines beliebigen Punktes vom Kreis-Mittelpunkt die Potenz des ersteren Punktes in Bezug auf den Kreis: $r^2 - a^2$.

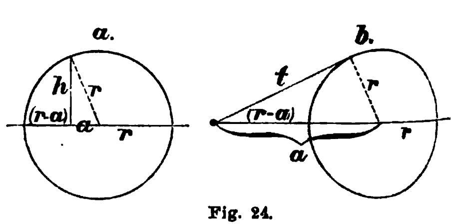


Fig. 24.

a) *Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist, falls er auſserhalb der Kreisfläche liegt, gleich dem negativen Quadrat der von dem Punkt an den Kreis gehenden Tangente, dagegen gleich dem Quadrat seiner Ordinate, sobald er innerhalb der Kreisfläche liegt.*

Die Potenz eines Punktes nimmt hiernach bei der Annäherung desselben von aufsen absolut ab, wird auf der Peripherie zu Null, im Innern positiv, wachsend bis zum Werte r^2 im Kreismittelpunkt.

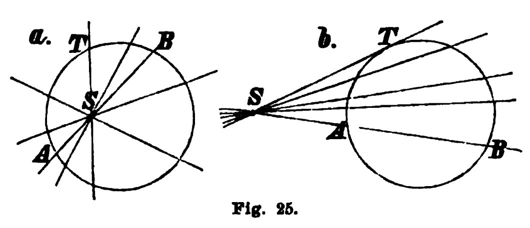


Fig. 25.

b) *Für jede Sehne auf einem Strahl eines Büschels im Kreis ist das Produkt der vom Scheitel gebildeten Abschnitte das gleiche, und zwar gleich der Potenz des Scheitels in Bezug auf den Kreis.*

$$AS \cdot SB = \overline{ST}^2 = r^2 - a^2.$$

§. 10. Anwendung zur Konstruktion der mittleren Proportionale und zur Konstruktion von Kreisen zu Geraden und Punkten.

1. Aufgabe. *Es soll zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere Proportionale konstruiert werden* $a : x = x : b$ (vgl. I. Teil §. 48, 6).

Man konstruiert nach §. 9, 3a die mittlere Proportionale, indem man um die gröfsere von beiden Strecken als Durchmesser einen Halbkreis beschreibt, von einem Grenzpunkt des Durchmessers die kleinere Strecke auf letzterem abträgt; die mittlere Proportionale ist dann die Sehne, von welcher dieser Abschnitt die Projektion ist.

Nach §. 9, 3b trägt man die beiden Strecken aneinander auf einer Geraden ab, beschreibt um ihre Summe als Durchmesser einen Kreis und zieht die Ordinate in dem gemeinschaftlichen Grenzpunkt beider Strecken.

Auch gemäfs §. 9, 2 läfst sich die Aufgabe lösen.

2. Aufgabe. *Es soll eine Strecke $AB = a$ so geteilt werden, dafs der gröfsere Abschnitt AC die mittlere Proportionale ist zu dem kleineren Abschnitt und der Strecke selbst,* also:

$$AB : AC = AC : CB.$$

Man nennt diese Art der Teilung den goldenen Schnitt, den gröfseren Abschnitt den goldenen Abschnitt der Strecke.

Analysis. Da der kleinere Abschnitt $(a - x)$ ist, so ist die vorgelegte Proportion $a : x = x : (a - x)$, woraus folgt (§. 3, 2c): $(a + x) : a = a : x$. Hiernach kann (§. 9, 2a) a als Tangente eines Kreises, x und $(a + x)$ als Abschnitte einer Sehne a angenommen werden, a selbst als Durchmesser.

Konstruktion. Man bildet aus a und $\frac{a}{2}$ als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck und trägt $\frac{a}{2}$ auf die Hypotenuse von einem Grenzpunkt derselben ab; der andere Abschnitt der Hypotenuse ist dann x.

Der Beweis wird durch die Umkehrung der Folge der Sätze, wie sie die Analyse enthält, geführt.

Zusatz. a) Da

$(a + x) : a = a : x = a : (a + x - a)$,

oder $AZ : YZ = YZ : AY$,

so ist auch a der goldene Abschnitt zu $(a + x)$ und hiernach leicht die Aufgabe zu lösen: *Zu dem gegebenen goldenen Abschnitt $AB = a$ einer Strecke ist die Strecke $AZ = (a + x)$ selbst zu konstruieren.*

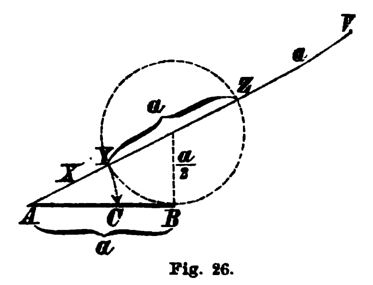


Fig. 26.

b) Ferner folgt, dafs $(2a + x) : (a + x) = (a + x) : a$, wonach man zu dem kleineren Abschnitt a den gröfseren $(a + x)$ und die ganze Strecke $(2a + x)$ findet, bzw. die Aufgabe löst: *eine Strecke ZV ist durch einen äufsern Teilpunkt A so zu teilen, dafs der eine Abschnitt die mittlere Proportionale ist zu dem andern Abschnitt und der Strecke selbst* — also:

$$VA : ZA = ZA : VZ.$$

3. Aufgabe. *Es sind Kreise zu konstruieren, welche*

a) *durch zwei gegebene Punkte A und B gehen und eine gegebene Gerade c berühren;*

b) *durch einen gegebenen Punkt C gehen und zwei gegebene Gerade a und b berühren.*

Analysis. Zu a): Wenn die Verbindungsgerade AB die Gerade c in S schneidet, so ist der Berührungspunkt X auf dieser Geraden so gelegen, dafs SX die mittlere Proportionale zu AS und SB ist.

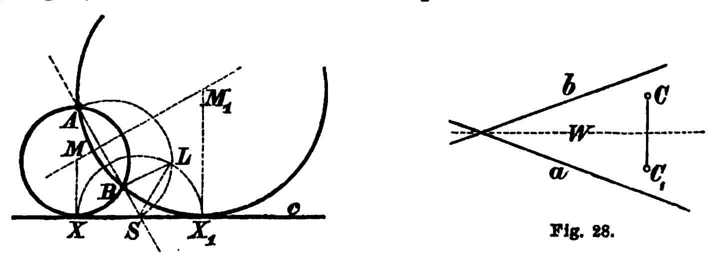


Fig. 27. Fig. 28.

Zu b): Da die Winkelhalbierende w zu ab Symmetrieaxe für den fraglichen Kreis ist, so geht derselbe auch durch $C_1 \wedge C$, wonach die Aufgabe auf a) zurückkommt.

Weitere Aufgaben, auch zu Kreisen berührende Kreise zu konstruieren, sollen erst nach der Betrachtung der perspektivischen Beziehungen zweier Kreise (§. 24) behandelt werden.

Viertes Kapitel.

Perspektivisch ähnliche Figuren.

§. 11. Perspektivische Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

1. Von perspektivisch ähnlichen (p. ä.) Figuren (§. 4, 2) haben wir bisher nur Punktreihen betrachtet. Perspektivisch ähnliche Strahlenbüschel müssen, da ihre Seiten paarweise parallel sind, kongruent sein, bieten also keine neuen Beziehungen dar. Wir gehen nun zur Untersuchung perspektivisch ähnlicher Dreiecke und Dreiseite über.

In p. ä. Figuren heifst das Projektionscentrum **Ähnlichkeitspunkt** (Ä.-Punkt) und jeder Strahl desselben **Ähnlichkeitsstrahl** (Ä.-Strahl). Der Ä.-Punkt heifst ein **äufserer**, wenn er die Verbindungsgerade zweier entsprechenden Punkte aufsen teilt, ein **innerer**, wenn er zwischen letzteren liegt. Von einem Ä.-Strahl aus entsprechen einander gleichgerichtete Halbstrahlen bei einem äufseren Ä. Punkt, gegengerichtete bei einem inneren.

2. Werden drei Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1 auf drei Strahlen eines Büschels so angenommen, dafs $SAA_1 \backsim SBB_1 \backsim SCC_1$, so bestimmen diese Punkte zwei p. ä. Dreiecke. Denn aus §. 6, 4c folgt dann:

$$AB \parallel A_1B_1,\quad BC \parallel B_1C_1,\quad CA \parallel C_1A_1.$$

2'. Werden drei Paare paralleler Geraden angenommen: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$, so bestimmen diese Geraden zwei p. ä. Dreiseite. Denn: ist S der Schnittpunkt von AA_1 und BB_1 und würde SC die Gerade A_1C_1 in C_2 treffen, so wäre $SCC_2 \backsim SAA_1 \backsim SBB_1$; daher $B_1C_2 \parallel BC$, woraus folgt, dafs B_1C_2 mit B_1C_1, C_2 mit C_1 zusammenfällt.

Fig. 29.

Zwei Dreiecke sind perspektivisch ähnlich, wenn deren Ecken paarweise auf drei Strahlen eines Büschels so liegen, dafs die Abstände entsprechender Punkte vom Scheitel proportional sind. | *deren Seiten paarweise parallel sind.*

3. Aus der Entstehung dieser Figuren läfst sich folgern:
In ähnlichen Dreiecken (Figuren) sind die entsprechenden Winkel einander gleich und die entsprechenden Seiten proportional.

Ersteres folgt aus dem Parallelismus der Seiten, letzteres daraus, dafs die Strecken bei p. ä. Lage den entsprechenden Ä.-Strahlen proportional sind.

4. Nun ergeben sich auch leicht die Bedingungen, welche für zwei Dreiecke ausreichen, damit dieselben ähnlich sind (§. 4, 3). Den vier Kongruenzsätzen entsprechend (I. Teil §. 21) folgt:

Zwei Dreiecke sind ähnlich: $\triangle ABC \backsim A_1B_1C_1$, *wenn sie:*

a) *in je einem Winkel und dem Verhältnis der ihn bildenden Seiten übereinstimmen:*

$$\measuredangle A = A_1, \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

b) *in zwei Winkeln übereinstimmen:*

$$\measuredangle A = A_1, \quad \measuredangle B = B_1.$$

c) *in den Verhältnissen ihrer Seiten übereinstimmen:*

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}.$$

d) *in dem Verhältnis je eines Seitenpaares übereinstimmen, während die Gegenwinkel eines Paares entsprechender Seiten einander gleich, die Gegenwinkel des anderen Paares beide spitz oder beide stumpf sind.*

Legt man nämlich die beiden Dreiecke so, dafs sie gleichwendig und die zwei entsprechenden Seiten AB und A_1B_1 parallel sind und ist dann S der Schnittpunkt von AA_1 und BB_1, so ist

im Fall a) auch $AC \parallel A_1C_1$ (I. Teil §. 16, 6b) und

$$AC : A_1C_1 = AB : A_1B_1 = SA : SA_1,$$

woraus folgt (§. 5, 5), dafs SCC_1 eine Gerade; ferner ist $SCC_1 \backsim SAA_1 \backsim SBB_1$ und somit (2) $\triangle ABC$ p. ä. $A_1B_1C_1$.

Im Fall b) ist auch $AC \parallel A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$, somit nach 2' $\triangle ABC$ p. ä. $A_1B_1C_1$.

Im Fall c) konstruiere man $\triangle ABC_2$ p. ä. $A_1B_1C_1$; dann ist

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C} = \frac{C_2A}{C_1A_1},$$

woraus sich durch Vergleichung mit der Annahme ergiebt, dafs $AC_2 = AC$, $BC_2 = BC$, d. h. $\triangle ABC_2$ fällt mit ABC zusammen und letzteres ist p. ä. zu $A_1B_1C_1$.

In ähnlicher Weise ist der Fall d) mittels I. Teil §. 21, 5 zu beweisen.

5. An p. ä. Punkte, Gerade, Dreiecke lassen sich nun weitere entsprechende Gebilde anreihen.

Trifft ein Ä.-Strahl ein p. ä. Geradenpaar AB, A_1B_1 in X und X_1, ein zweiter Ä.-Strahl ein zweites	Zieht man durch ein p. ä. Punktpaar A und A_1 ein paar Parallelen $AX \parallel A_1X_1$ und ebenso durch

Geradenpaar AC, A_1C_1 in Y und Y_1, so ist $SXX_1 \backsim SAA_1 \backsim SYY_1$ daher nach 2: XY p. ä. X_1Y_1 d. h. auch $XY \parallel X_1Y_1$.

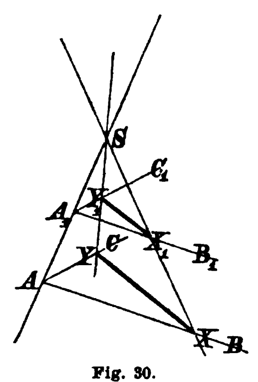


Fig. 30.

ein zweites Punktpaar B und B_1 die $BX \parallel B_1X_1$, so ist nach 2' auch $\triangle ABX$ p. ä. $A_1B_1X_1$ d. h. auch SXX_1 eine Gerade.

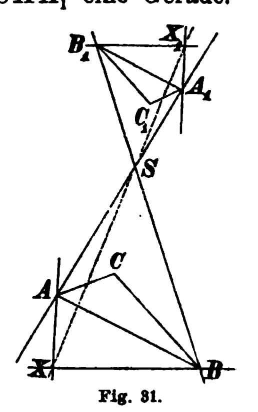


Fig. 31.

In p. ä. *Figuren ergeben sich als weitere entsprechende Gebilde:*

a) *die Schnittpunkte entsprechender Geraden mit einem Ä.-Strahl;*

a') *parallele Gerade durch entsprechende Punkte und zwar gleichgerichtet parallele Halbstrahlen bei äufserem, gegengerichtete bei innerem Ä.-Punkt;*

b) *die Verbindungsgerade zweier Punkte der einen Figur und die der entsprechenden Punkte der zweiten (sie sind parallel).*

b') *der Schnittpunkt zweier Geraden der einen Figur und der der entsprechenden Geraden der zweiten (sie liegen auf einem Ä.-Strahl).*

Diese Sätze können dazu dienen, zu p. ä. Figuren noch weitere entsprechende Punkte und Gerade zu finden. Es kann hierbei jeder Punkt und jede Gerade der Ebene als irgend einer der beiden Figuren zugeordnet betrachtet und dann der entsprechende Punkt der anderen Figur bestimmt werden (vgl. Bemerkung §. 4, 2).

c) *Der Ä.-Punkt und die Ä.-Strahlen entsprechen sich selbst in* p. ä. *Figuren.*

Es ergeben sich ferner noch *entsprechende Elemente durch das Antragen von*

d) *Strecken auf entsprechenden Halbstrahlen, deren Verhältnis mit dem der übrigen entsprechenden Streckenpaare übereinstimmt, insbesondere*

e) *vom Ä.-Punkt aus auf einem Ä.-Strahl.*

d') *gleichwendig gleichen Winkeln an entsprechenden Halbstrahlen, insbesondere*

e') *von entsprechenden Punkten an einem Ä.-Strahl.*

Zusatz. Hiernach entsprechen einander paarweise in ähnlichen Figuren die Diagonalen, alle unter gleichwendig gleichen Winkeln zu den Seiten durch entsprechende Ecken gezogenen Geraden z. B. die Winkelhalbirenden, die Höhen; ebenso alle die Seiten in gleichem Verhältnis teilenden Geraden, die Mittellinien in den Dreiecken.

6. Als Umkehrung von 3 gilt:

a) *Zwei Figuren sind ähnlich, wenn in ihnen gleiche Winkel in übereinstimmender Ordnung auf einander folgen und ebenso proportionale Strecken zwischen den entsprechenden Winkeln.*

b) *Zwei ähnliche Figuren sind perspektivisch, wenn zwei entsprechende Gerade parallel sind und ein entsprechendes Winkelpaar an denselben gleichwendig ist.*

Denn an die parallel, d. h. p. ä. gelegten Strecken schliefsen sich die übrigen Strecken wegen der Übereinstimmung in den Winkeln und in den Seitenverhältnissen nach 5d und d′ in p. ä. Lage an.

7. Da die Übereinstimmung in den Winkeln und den Seitenverhältnissen zur Ähnlichkeit der Figuren genügt, so folgt:

a) *Wenn zwei Figuren einer dritten ähnlich sind, so sind sie es auch unter sich.*

In Bezug auf die Lage zweier zu einer dritten p. ä. Figuren ist noeh auszusagen:

b) *Wenn zwei Figuren p. ä. einer dritten sind, so sind sie es auch unter sich. Dabei liegen die drei Ä.-Punkte auf einer Geraden, einer* **Ähnlichkeitsaxe**, *und zwar entweder drei äufsere Ä.-Punkte, oder zwei innere und ein äufserer.*

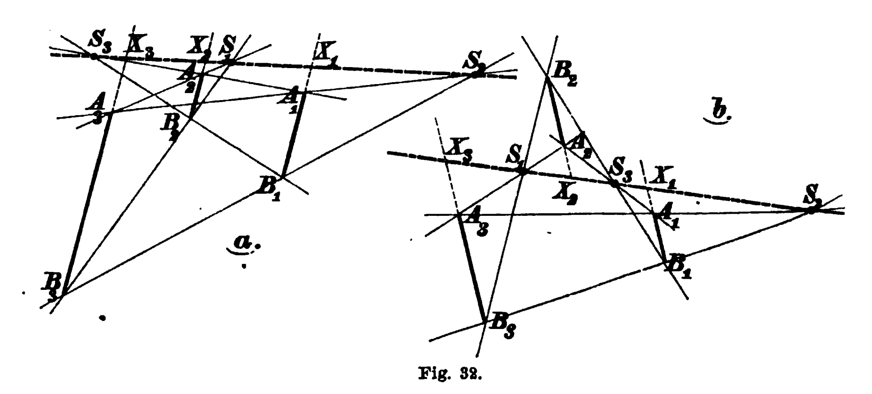


Fig. 32.

Ist nämlich A_1B_1 p. ä. A_3B_3 zu S_2 als A.-Punkt, A_2B_2 p. ä. A_3B_3 zu S_1 als Ä.-Punkt, so ist auch $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ und somit A_1B_1 p. ä. A_2B_2 zu S_3 als Ä.-Punkt. Wird S_1S_2 von A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 bezw. in X_1, X_2 und X_3 geschnitten, so ist $A_1B_1X_1$ p. ä. $A_3B_3X_3$ zu S_2 als Ä.-Punkt und $A_2B_2X_2$ p. ä. $A_3B_3P_3$ zu S_1 als

Ä.-Punkt. Daher ist (§. 6, 2) $A_1B_1X_1$ p. ä. $A_2B_2X_2$ zu S_3 d. h. S_3 liegt auf einer Geraden mit X_1X_2 und S_1S_2.

8. Als ein spezieller Fall der p. ä. Lage ist die diametrale Lage hervorzuheben. Das Centrum ist innerer Ä.-Punkt und die p. ä. Gebilde sind kongruent; das Streckenverhältnis ist gleich 1.

a) *In centrischen Figuren sind die diametralen Teile* p. ä. *zu dem Centrum als Ä.-Punkt.*

In Bezug auf die perspektivische Ähnlichkeit zweier centrischen Figuren ist noch zu bemerken:

b) *Zwei centrische Figuren, welche* p. ä. *sind, haben zugleich einen inneren und äufseren Ä.-Punkt, welche die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte innen und aufsen im Verhältnis der entsprechenden Strecken teilen.*

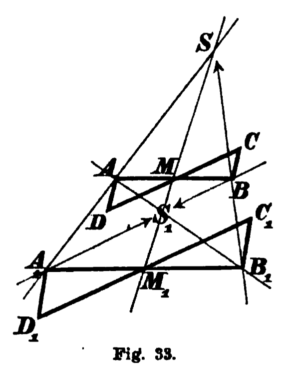


Fig. 33.

Denn einer Centralen AB der einen Figur entspricht eine solche A_1B_1 der zweiten Figur; somit entsprechen auch die Mittelpunkte der Centralen M und M_1 einander, d. h. der Ä.-Punkt liegt auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte. Trifft nämlich AA_1 diese Gerade in S, so ist

$$MS : M_1S = AS : A_1S$$
$$= AM : A_1M_1 = AB : A_1B_1$$

und durch denselben Teilpunkt von MM_1 geht auch BB_1 (§. 5, 5) u. s. w. In gleicher Weise treffen BA_1 und AB_1 die Gerade MM_1 in einem Punkt S_1, welcher MM_1 teilt in dem Verhältnis

$$\frac{MS_1}{S_1M_1} = \frac{MA}{M_1B_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Die Strahlen durch den äufseren Ä.-Punkt nennen wir äufsere Ä.-Strahlen, die des inneren Ä.-Punktes innere.

§. 12. Perspektivische Ähnlichkeit von Kreisen.

1. Da ein Kreis eine centrische Figur ist, so sind diametrale Teile desselben p. ä. zu dem Mittelpunkt als Ä.-Punkt (§. 11, 8a); jeder Sehne AB entspricht eine diametrale Sehne A_1B_1, jeder Tangente t eine diametrale t_1.

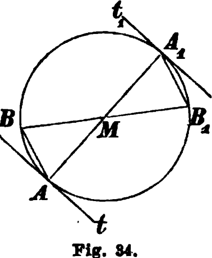


Fig. 34.

Aber auch zwei Kreise lassen sich stets als p. ä. Figuren auffassen. Teilt man nämlich die Centrale derselben im Verhältnis der Radien, am einfachsten indem man die Endpunkte paralleler Radien $MA \parallel M_1A_1$ verbindet, so trifft jede durch den Teilpunkt S gezogene Sekante des einen Kreises auch den andern, da für die normalen

MF und M_1F_1 nach §. 5, 3 $MF : M_1F_1 = MS : M_1S = r : r_1$ oder $MF : r = M_1F_1 : r_1$, sodafs, wenn $MF \lesseqgtr r$, auch $M_1F_1 \lesseqgtr r_1$ ist, woraus dann folgt, dafs der Strahl durch S beide Kreise entweder in zwei Punkten schneidet oder in einem Punkt berührt oder gar nicht

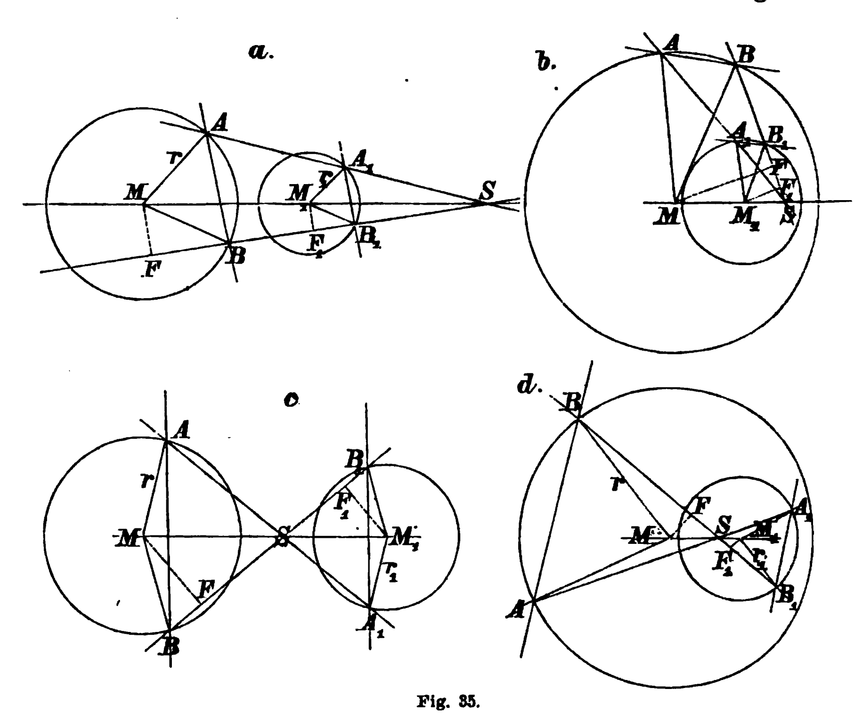


Fig. 35.

trifft. — Sind die Schnittpunkte B und B_1 so gelegen, dafs die Winkel MBS und M_1B_1S beide spitz oder beide stumpf sind, so folgt aus §. 11, 4 d, da $MB : M_1B_1 = MS : M_1S$ und $\sphericalangle MSB = M_1SB_1$ ist, dafs $\triangle MBS \backsim M_1B_1S$, $MB \parallel M_1B_1$ ist. — Alsdann ist aber auch $\sphericalangle AMB$ p. ä. $A_1M_1B_1$ zu S als Ä.-Punkt und nach §. 11, 5 b AB p. ä. A_1B_1, d. h. irgend welche Strahlen begrenzen p. ä. Sehnen in beiden Kreisen. Ebenso sind die Tangenten in den entsprechenden Schnittpunkten der Strahlen p. ä. — Dies fassen wir in den Ausspruch zusammen:

a) *Zwei Kreise sind p. ä. in Bezug auf einen äufseren und inneren Ä.-Punkt, welche die Centrale im Verhältnis der Radien teilen.*

Hiermit ist zugleich ausgesagt:

b) *Die Endpunkte gleichgerichtet paralleler Radien liegen auf einem äufseren Ä.-Strahl, die gegengerichteter Radien auf einem inneren, und umgekehrt: solche Strahlen treffen die Kreise in den Endpunkten paralleler Radien.*

c) *Die Sehnen entsprechender Punktpaare sind parallel, ebenso die Tangenten.*

2. Für den Fall, dafs die Kreise nicht einander einschliefsen, folgt hieraus:

a) *Die gemeinsamen äufseren Tangenten zweier Kreise sind äufsere Ä.-Strahlen, die gemeinsamen inneren Tangenten innere Ä.-Strahlen.*

Berühren einander die Kreise, so teilt der Berührungspunkt die Centrale im Verhältnis der Radien (I. Teil §. 25, 6), d. h.:

b) *In zwei einander berührenden Kreisen ist der Berührungspunkt Ä.-Punkt und zwar äufserer bei einschliefsender Berührung, innerer bei ausschliefsender.*

Ist daher *ein Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis M in einem gegebenen Punkt S berührt und durch einen zweiten Punkt B_1 geht,* so zieht man SB_1 bis zum Schnitt B mit dem Kreise M; alsdann ist der fragliche Radius durch B_1 parallel zu MB.

Zusatz. Für den Fall, dafs die Kreise einander gleich sind, sind sie perspektivisch kongruent; die äufseren Ä.-Strahlen sind parallel (der Ä.-Punkt ist in unbeschränkt grofse Entfernung gerückt), der innere Ä.-Punkt liegt in der Mitte der Centrale; beide Kreise sind diametral zu ihm.

Sind beide Kreise koncentrisch, so fallen beide Ä.-Punkte im Mittelpunkt zusammen.

3. Von drei Kreisen einer Ebene können je zwei als p. ä. zu dem dritten betrachtet werden. Daher folgt aus §. 11, 7b (indem in Figur 32 A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 drei parallele Radien darstellen mögen):

Bei drei Kreisen liegen die drei äufseren Ä.-Punkte auf einer Geraden, der äufseren Ä.-Axe, ebenso auch je ein äufserer Ä.-Punkt mit den zwei nicht zugehörigen innern je auf einer Geraden, den drei inneren Ä.-Axen (Satz von Monge).

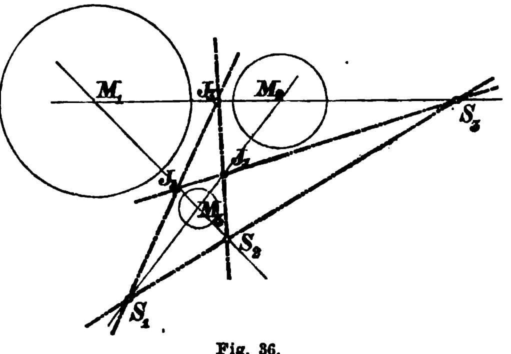


Fig. 36.

4. Wenn insbesondere zwei Kreise von einem dritten berührt werden, so folgt hieraus in Verbindung mit 2b:

Bei gleichartiger Berührung zweier Kreise durch einen dritten liegen die Berührungspunkte auf einem äufseren Ä.-Strahl der beiden ersteren Kreise, bei ungleichartiger Berührung auf einem inneren, jedoch nicht entsprechend.

Sollen daher *zwei Kreise M und M_1 und zwar ersterer in einem Punkt A berührt werden*, so zieht man den Radius $M_1A_1 \parallel MA$ (gleich-, bezw. gegengerichtet); alsdann schneidet die Gerade AA_1 den Kreis M_1 in dessen Berührungspunkt (vgl. I. Teil §. 29, 5b).

§. 13. Anwendung der perspektivischen Ähnlichkeit zur Lösung von Aufgaben.

1. Wenn in einer geometrischen Aufgabe die gegebenen Stücke Winkel und Verhältnisse von Strecken sind und aufserdem nur eine Strecke der zu zeichnenden Figur bestimmt ist, so kann die Aufgabe dadurch gelöst werden, dafs man zunächst diese letztere Strecke aufser Betracht läfst und eine Figur zeichnet, welche den übrigen Stücken entspricht, wobei irgend eine Strecke der Figur willkürlich gewählt werden kann. Die fragliche Figur ist dann dieser ähnlich und durch das Seitenverhältnis der gegebenen Strecke zu der ihr entsprechenden bestimmt.

Aufgaben. a) Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von welchem zwei Winkel gegeben sind und irgend eine Strecke wie eine Höhe, eine Winkelhalbirende, die Projektion einer Seite auf eine andere, der Umfang u. s. w. Man konstruiert zuerst ein Dreieck mit den gegebenen Winkeln und einer beliebigen Seite und dann ein (diesem Dreieck ähnliches oder perspektivisch ähnliches) Dreieck, dessen eine Seite sich zu der ihr entsprechenden verhält, wie die gegebene Strecke zu der ihr entsprechenden.

b) Es ist von einem Dreieck das Verhältnis $p:q$ zweier Seiten, der eingeschlossene Winkel γ und die Gegenseite c gegeben. — Man konstruiert das Dreieck aus γ, p, q und dann das ihm ähnliche (oder perspektivisch ähnliche) mit der Seite c.

c) Es ist in einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist. (Von einem Dreieck ist der Radius des umbeschriebenen Kreises und die Winkel, bezw. Seitenverhältnisse gegeben).

Man beschreibt um das Dreieck einen Kreis und projiziert von dem Ähnlichkeitspunkt beider Kreise aus die Ecken des gegebenen Dreiecks auf den Umfang des gegebenen Kreises. (Eine andere Lösung giebt die Überlegung, dafs der Centriwinkel das Doppelte des zugehörigen Peripheriewinkels ist.)

2. Ist eine Figur ihrer Lage nach gegeben und soll in dieselbe eine Strecke oder irgend eine Figur so eingezeichnet werden, dafs gewisse Punkte der letzteren auf bestimmte Linien der ersteren fallen, so kann die Aufgabe häufig dadurch gelöst werden, dafs man

zunächst eine Figur zeichnet, welche der fraglichen Figur perspektivisch ähnlich ist in Bezug auf den Schnittpunkt zweier Strahlen, auf welchen zwei bestimmte Punkte liegen sollen, als Ähnlichkeitspunkt, worauf man dann aus diesem Ähnlichkeitspunkt die Hilfsfigur so projiziert, dafs auch den weiteren Bedingungen der Aufgabe genügt wird.

a) Es ist in ein Dreieck ABC ein Quadrat zu zeichnen, so dafs die Ecken desselben auf den Seiten des Dreiecks liegen.

Zeichnet man ein Hilfsquadrat $L_1M_1I_1K_1$, so dafs L_1 auf AB, K_1 und I_1 auf AC fällt, so ist A der Ähnlichkeitspunkt für dieses und das gesuchte Quadrat. Der Strahl AM_1 ergiebt das Eck M auf BC. — Für dieselbe Lage von $LMIK$ könnte auch B als Ähnlichkeitspunkt gewählt und das Hilfsquadrat etwa unter AC gezeichnet werden.

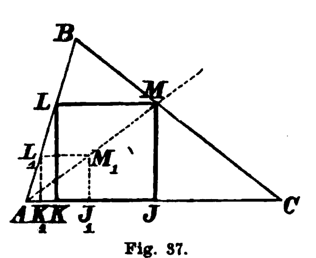


Fig. 37.

b) Es ist ein Kreis zu zeichnen, welcher durch einen Punkt P geht und zwei gegebene Gerade a und b berührt.

Man zeichne einen Kreis M, welcher a und b berührt. Ein Strahl vom Schnittpunkt S der beiden Geraden nach dem Punkt P treffe diesen Kreis in P_1 und P_2; jeder dieser Punkte kann als p. ä. Punkt zu P aufgefafst werden. Man ziehe die Radien zu diesen Punkten und durch P Parallele zu letzteren; diese Parallelen schneiden die Winkelhalbierende zu ab in den Mittelpunkten der fraglichen Kreise.

c) Auf dieselbe Lösung führt die Aufgabe: Auf einer Geraden SM ist ein Punkt zu bestimmen, der von einem gegebenen Punkt P und einer Geraden a den gleichen Abstand hat. — Sollen die Abstände des fraglichen Punktes von Punkt und Gerade in dem gegebenen Verhältnis $p:q$ stehen, so trägt man die Strecke $QM = q$ normal zu a in den Winkel zwischen a und SM und beschreibt von M den Kreis mit dem Radius $MP_1 = p$ u. s. f.

Auf diese Weise werden die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt bestimmt.

3. Manchmal verlangt die Lösung einer Aufgabe, dafs man durch einen Punkt S in eine gegebene Figur eine Gerade eintrage, von welcher die Figur eine Strecke begrenzt, deren Teilverhältnis durch jenen Punkt ein bestimmtes $\pm \frac{p}{q}$ ist. Man zeichnet nun zu dem Punkt S als Ähnlichkeitspunkt $\left(\text{und zwar als inneren für } \frac{p}{q}, \text{ als äufseren für } -\frac{p}{q}\right)$ eine Figur, welche mit demjenigen Teil der Figur, auf welchem der

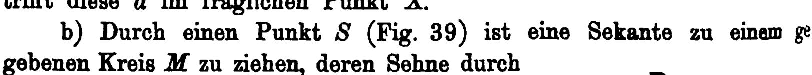
Endpunkt der Strecke liegen soll, perspektivisch ähnlich ist und deren Ähnlichkeitsstrahlen zu denen der letzteren im Verhältnis $\frac{p}{q}$ stehen; alsdann schneidet diese Hilfsfigur den Teil der gegebenen Figur, auf welchem der Anfangspunkt der Strecke liegen soll, eben in diesem fraglichen Punkte.

Für den Fall, dafs der gegebene Punkt Mittelpunkt der Strecke sein soll, wird die Hilfsfigur diametral zu der gegebenen gezeichnet.

a) Durch einen Punkt S (Fig. 38) ist eine Gerade zu ziehen, welche von zwei gegebenen Geraden a und b so begrenzt werden soll, dafs diese Strecke durch den Punkt S in einem gegebenen Verhältnis $\pm \frac{q}{r}$ geteilt wird.

Man trage $SL = q$ (oder nq) nach b ab und auf dieser Geraden SL_1 oder $SL_2 = r$ (bezw. nr) und ziehe durch den Endpunkt $L_1(L_2)$ dieser Strecke die Parallele zu b, so trifft diese a im fraglichen Punkt X.

Fig. 38.



b) Durch einen Punkt S (Fig. 39) ist eine Sekante zu einem gegebenen Kreis M zu ziehen, deren Sehne durch S im Verhältnis $\pm \frac{p}{q}$ geteilt wird. Man bestimme auf MS den Punkt M_1 so, dafs $M_1S : SM = p : q$ und zeichne zu dem Kreis M den perspektivisch ähnlichen zu S als Ähnlichkeitspunkt und M_1 als Mittelpunkt. Dieser Kreis schneidet den gegebenen in den fraglichen Punkten X und X_1.

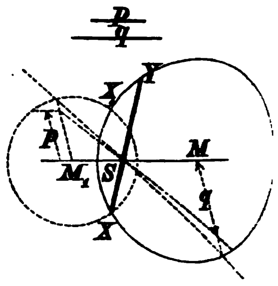


Fig. 39.

c) Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von welchem eine Seite a, deren Gegenwinkel α

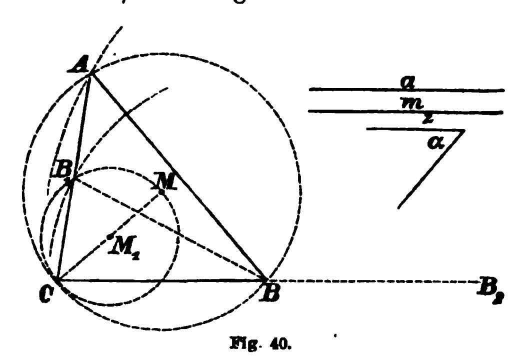


Fig. 40.

und die Schwerlinie m_2 einer zweiten Seite gegeben ist.

Man beschreibe um $BC = a$ (Fig. 40) einen Kreisbogen M, welcher den Winkel α als Peripheriewinkel faſst. Um B beschreibe man einen Kreis mit m_2 als Radius. Alsdann muſs die Strecke B_1A der fraglichen Seite CA zwischen beiden Kreisen durch C im Verhältnis $-\frac{1}{2}$ geteilt werden. Man konstruiert daher zu C als äuſserem Ähnlichkeitspunkt entweder zu dem ersteren Kreis M einen perspektivisch ähnlichen M_1, so daſs

$$CM_1 : CM = 1 : 2$$

oder zu dem zweiten Kreis B einen Kreis B_2, so daſs

$$CB : CB_2 = 1 : 2.$$

Der Schnitt des ersteren mit M_1 giebt B_1, der des zweiten mit M giebt A.

II. Abschnitt.

Perspektivische Kollineation.

Fünftes Kapitel.

Teil- und Doppelverhältnisse je dreier perspektivischen Elemente von Punktreihen und Strahlenbüscheln. Tripelverhältnisse in Dreiecken.

§. 14. Perspektivische Strecken und Winkel mit je einem Teilpunkt bzw. Teilstrahl.

1. Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel heifsen perspektivisch (𝔭.), wenn jeder Punkt der ersteren je auf einem Strahl des letzteren liegt.

Zwei Punktreihen heifsen 𝔭., wenn ihre Punkte einander paarweise auf den Strahlen eines Büschels entsprechen. Der Scheitel des Büschels heifst Projektionscentrum oder kurz Centrum.

Der Schnittpunkt beider Punktreihen ist hierbei ein sich selbst entsprechender Punkt.

Zwei Strahlenbüschel heifsen 𝔭., wenn ihre Strahlen einander paarweise in den Punkten einer Punktreihe schneiden. Die Punktreihe heifst Projektionsaxe oder kurz Axe.

Die Verbindungsgerade der Scheitel, Scheitelstrahl, ist hierbei ein sich selbst entsprechender Strahl.

Punktreihen und Strahlenbüschel heifsen projektivisch ($\overline{\wedge}$), wenn sie perspektivisch gelegt werden können.

2. Ein Zweistrahl und die Strecke, welche er auf einer Transversalen begrenzt, sind in perspektivischer Lage, und umgekehrt:

Eine Strecke und ein Zweistrahl sind stets projektivisch;

sie können auf verschiedene Weise perspektivisch gelegt werden (s. I. Teil, Übungen, §. 14, 5).

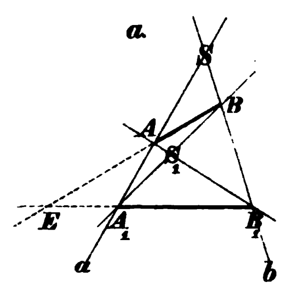
3. Wird ein Zweistrahl ab von zwei Transversalen durchschnitten, so entstehen zwei perspektivische Strecken wie AB und A_1B_1.

3'. Wird eine Strecke AB von zwei Punkten aus projiziert, so entstehen zwei perspektivische Zweistrahlen wie (ab) und (a_1b_1).

Umgekehrt folgt:

Zwei Strecken sind stets perspektivisch zu dem Schnittpunkt der Verbindungsgeraden ihrer Grenzpunkte als Centrum.

Zwei Zweistrahlen sind stets perspektivisch zu der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte ihrer Strahlen als Axe.



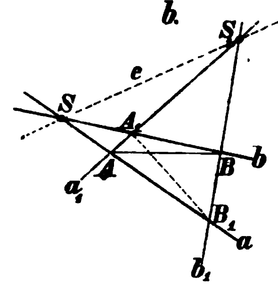


Fig. 41.

Dabei können einander die Grenzpunkte auf zweierlei Weise entsprechen, AA_1 und BB_1 oder AB_1 und A_1B, so dafs zwei Centren S und S_1 sich ergeben.

Dabei können einander die Strahlen auf zweierlei Weise entsprechen, aa_1 und bb_1 oder ab_1 und a_1b, so dafs zwei Axen AB und A_1B_1 sich ergeben.

4. Ein dritter Strahl durch S läfst einen Dreistrahl und drei Punkte einer Reihe entstehen und beide Gebilde sind perspektivisch. Aber auch umgekehrt gilt:

Drei Punkte einer Reihe und drei Strahlen eines Büschels sind stets projektivisch.

Um nämlich ABC und abc in perspektivische Lage zu bringen, kann man entweder die geteilte Strecke in den geteilten Winkel eintragen oder letzteren über erstere.

Im ersten Fall bestimmt man zunächst die Richtung der Strecke,

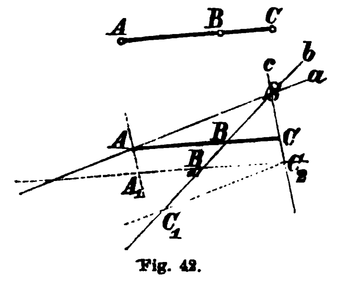


Fig. 42.

indem man etwa auf dem Teilstrahl b die geteilte Strecke vom Scheitel nach SB_1C_1 abträgt und durch C_1

Im zweiten Fall beschreibt man über AB sowohl als über BC als

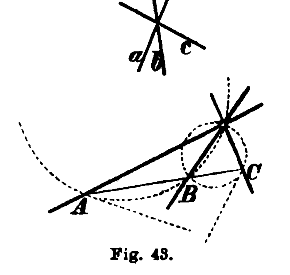


Fig. 43.

Sehnen je einen Kreisbogen, welcher den Winkel ab, bzw. bc fafst (I. Teil, Aufgaben, §. 14, 5); der

die $C_1C_2 \parallel a$ zieht; parallel zu B_1C_2 ist dann die Strecke AC in den Winkel ac einzutragen.

5. Auf zwei Geraden können je drei Punkte als paarweise projektivisch entsprechend beliebig gewählt werden. Denn bringen wir zwei als entsprechend bezeichnete Punkte zur Deckung in E (Fig. 41), so ist dies gemeinsamer Punkt, und der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der andern entsprechenden Punktpaare ist Centrum; d. h.:

Drei Punkte einer Reihe sind projektivisch mit irgend drei Punkten einer zweiten Reihe; sie sind perspektivisch, wenn ein Punkt mit dem entsprechenden zusammenfällt.

Schnitt der Bögen ist dann Centrum.

5'. In zwei Scheitelpunkten können je drei Strahlen als paarweise projektivisch entsprechend beliebig gewählt werden. Denn bringen wir zwei als entsprechend bezeichnete Strahlen zur Deckung in e (Fig. 41), so ist dies Scheitelstrahl, und die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der andern entsprechenden Strahlenpaare ist Axe; d. h.:

Drei Strahlen eines Büschels sind projektivisch mit irgend drei Strahlen eines zweiten Büschels; sie sind perspektivisch, wenn ein Strahl mit dem entsprechenden zusammenfällt.

§. 15. Das Teilverhältnis eines Winkels durch einen Strahl.

1. In gleicher Weise wie nach §. 2. ein Punkt eine Strecke teilt, teilt auch ein Strahl durch den Scheitel eines Winkels diesen innen oder aufsen. Wir verstehen nun unter dem Teilverhältnis $\left(\frac{ac}{cb}\right)$ eines Winkels ab durch einen Strahl c das Verhältnis der Abstände eines Punktes des Teilstrahls von den Schenkeln des Winkels (Fig. 44)

$$\left(\frac{ac}{cb}\right) = \frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1},$$

wenn CA und $C_1A_1 \perp a$, CB und $C_1B_1 \perp b$. Das Verhältnis ist das gleiche, wo auch der Punkt C oder C_1 auf dem Teilstrahl angenommen wird, da

$$AC : A_1C_1 = SC : SC_1 = CB : C_1B_1 \text{ oder } AC : CB = A_1C_1 : C_1B_1.$$

Fig. 44.

Dieses Verhältnis läfst sich jedoch auch durch die Parallelen CA_1 und CB_1 (Fig. 45) darstellen, welche von einem Punkt C des Teilstrahls zu den Schenkeln des Winkels gezogen werden: $\left(\frac{ac}{cb}\right) = \frac{A_1C}{CB_1}$. Es ist nämlich $\frac{A_1C}{CB_1} = \frac{AC}{CB}$, da die Dreiecke ACA_1 und BCB_1 in den Winkeln übereinstimmen. Wir folgern:

Das Teilverhältnis eines Winkels durch einen Strahl ist gleich dem Verhältnis zweier durch einen Punkt des Teilstrahls gezogenen und von den Schenkeln begrenzten Parallelen zu diesen.

Anmerkung. a) Ganz allgemein gilt: Das Teilverhältnis des Winkels ist das Verhältnis irgend zweier von einem Punkt des Teilstrahls nach den Schenkeln unter gegenwendig gleichen Winkeln mit diesen gezogenen Strecken.

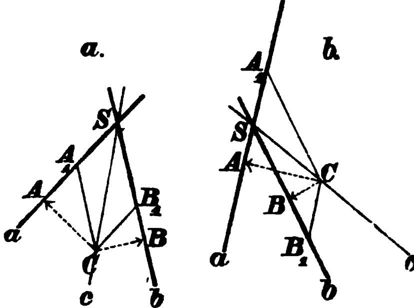


Fig. 45.

b) Der Begriff des Teilverhältnisses ist auch übertragbar auf die Teilung eines Parallelstreifens durch eine Parallele.

c) Das Teilverhältnis eines Winkels ist nicht zu verwechseln mit dem Verhältnis der Teile des Winkels; ersteres ist ein Strecken-Verhältnis, letzteres das Verhältnis der Winkelteile selbst.

2. Das Teilverhältnis wird positiv genommen, wenn $\sphericalangle\, ac$ und cb gleichwendig sind, negativ bei entgegengesetztem Drehungssinn dieser Winkel. Mit der Änderung der Lage des Teilstrahls c gegen ab durchläuft das Teilverhältnis die Werte von 0 bis $\pm\infty$, gerade wie dies bei der Teilung einer Strecke der Fall ist.

a) *Es entspricht einem bestimmten Wert des Teilverhältnisses eines Winkels nur ein einziger Teilstrahl; das Teilverhältnis ist* $+1$, *wenn der Winkel halbiert,* -1, *wenn sein Nebenwinkel halbiert ist.*

Da der Abstand CA (Fig. 46) eines Punktes auf c von a der gleiche bleibt, ob nun a oder dessen Gegenstrahl a_1 Schenkel des geteilten Winkels ist, so folgt:

b) *Das Teilverhältnis bleibt das gleiche, wenn statt des Winkels sein Scheitelwinkel gesetzt wird, bezw. statt des ursprünglichen Teilstrahls dessen Gegenstrahl; es ändert nur sein Zeichen, wenn sein Nebenwinkel genommen wird.*

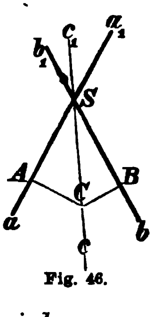


Fig. 46.

3. *Um den Teilstrahl eines Winkels zu konstruieren, wenn das Teilverhältnis durch die Strecken* $p:q$ *gegeben ist,* zieht man zu den Schenkeln Parallelen im Abstande p bzw. q; der Teilstrahl geht dann durch den Schnittpunkt dieser Parallelen.

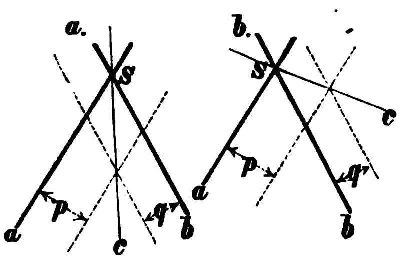


Fig. 47.

4. Nehmen wir als Strecken,

welche das Teilverhältnis bestimmen, die Abstände der Schenkel a und b von demjenigen Punkt des Teilstrahls, welche um die Strecke $SC = 1$ (die ein für allemal gewählte Längeneinheit) vom Scheitel entfernt ist und bezeichnen wir dieselben mit (ac) oder $\sin ac$ (lies sinus ac), bzw. $(cb) = \sin cb$, so ist die Gröfse dieser Strecken für gleiche Winkel oder solche, die sich zu $2R$ ergänzen, die gleiche; wenn $\sphericalangle ac = a_1 c_1$ und $SC = S_1 C_1$ ist, so ist $\triangle SAC \backsim S_1 A_1 C_1$, $AC = A_1 C_1$.

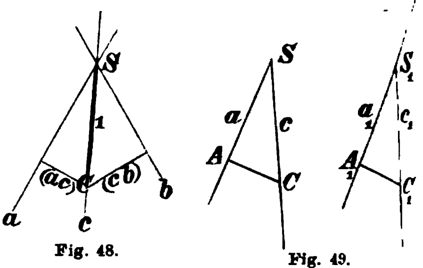


Fig. 48. Fig. 49.

Zu gleichen Winkeln oder zu Winkeln, die einander zu $2R$ ergänzen, gehören gleiche Sinus und umgekehrt.

Es kann hiernach mit (ac) oder $\sin ac$ wie mit beliebigen Gröfsen gerechnet werden.

5. Sind AB und ab ein perspektivisch entsprechendes Punkt- und Strahlenpaar und ziehen wir noch den Strahl $s_1 \parallel s$ durch S und die Strecken $BS_1 \parallel a$, $SA_1 \parallel b$, so ist:

$$\frac{AS}{BS} = \frac{BS_1}{S_1 A_1} = \left(\frac{bs_1}{s_1 a_1}\right).$$

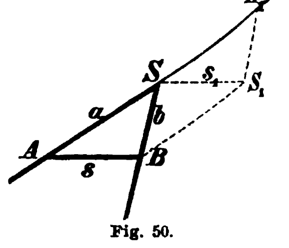


Fig. 50.

Wegen der Gleichheit der Winkel ist $(bs_1) = (bs)$ und $(s_1 a_1) = (sa)$.

Daher ist $\frac{AS}{BS} = \frac{(bs)}{(as)}$ (wobei jede Gröfse absolut zu nehmen ist).

Das Verhältnis der Strahlstrecken von einem Punkt nach den Grenzpunkten einer Strecke ist reciprok dem Sinusverhältnis der Winkel zwischen den Strahlen und der Strecke.

Vgl. Sinussatz §. 42, 1.

§. 16. Doppelverhältnisse bei je drei perspektivischen Elementen von Punktreihen und Strahlenbüscheln.

1. Wenn (Fig. 51) ABC drei Punkte einer Reihe r, abc drei perspektivisch entsprechende Strahlen eines Büschels S sind, so ergiebt sich, indem man durch C die Strecken $CA_1 \parallel BS$ und $CB_1 \parallel AS$ zieht:

$$\frac{AC}{A_1 C} = \frac{AB}{BS}, \quad \frac{CB}{CB_1} = \frac{AB}{AS},$$

woraus durch Division folgt:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{A_1 C}{CB_1} = \frac{AS}{BS}$$

oder

$$\frac{AC}{CB} : \left(\frac{ac}{cb}\right) = \frac{AS}{BS}.$$

Aus §. 15, 5 folgt weiter:

$$\left(\frac{ac}{cb}\right) : \frac{AC}{CB} = \frac{(ar)}{(br)}.$$

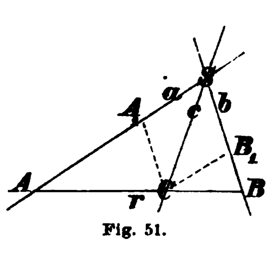


Fig. 51.

Nennen wir nun das Verhältnis zweier Teilverhältnisse **Doppelverhältnis**, so lassen sich diese Gleichungen folgendermaſsen aussprechen:

a) *Das Doppelverhältnis einer geteilten Strecke und des perspektivischen geteilten Winkels ist gleich dem Verhältnis der Strecken vom Scheitel nach den Grenzpunkten der Strecke.*

a′) *Das Doppelverhältnis eines geteilten Winkels und der perspektivischen geteilten Strecke ist gleich dem Sinusverhältnis der Winkel zwischen den Schenkeln und der Strecke.*

Das Doppelverhältnis ist jedoch negativ, wenn nur einer der beiden Grenzpunkte der Strecke auf dem Gegenstrahl des betreffenden Schenkels liegt (nach §. 15, 2b).

Folgerungen hieraus für die Schwerlinie oder Winkelhalbierende SC des Dreiecks ASB siehe §. 17, 3a und a′.

Umgekehrt gilt:

b) *Wenn zu perspektivischer Strecke und Winkel Teilpunkt und Teilstrahl durch das angegebene Verhältnis bestimmt sind, so sind letztere perspektivisch.*

Die Umkehrung ergiebt sich daraus, daſs mit dem gegebenen Teilstrahl auch das Teilverhältnis der Strecke $\frac{AC}{CB} = \left(\frac{ac}{cb}\right) \cdot \frac{AS}{SB}$, bzw. mit dem gegebenen Teilpunkt auch das Teilverhältnis des Winkels $\left(\frac{ac}{cb}\right) = \frac{AC}{CB} : \frac{AS}{SB}$ bestimmt ist und zwar ebenso bestimmt, wie durch das perspektivisch entsprechende Gebilde (§. 2, 3, bzw. §. 15, 2a).

2. Nehmen wir zu denselben drei Strahlen abc noch drei weitere perspektivische Punkte $A_1 B_1 C_1$ einer Reihe r_1, so ist nach 1a:

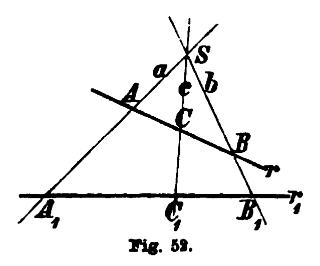


Fig. 52.

2′. Nehmen wir zu denselben drei Punkten ABC noch drei weitere perspektivische Strahlen $a_1 b_1 c_1$ eines Büschels S_1, so ist nach 1a′:

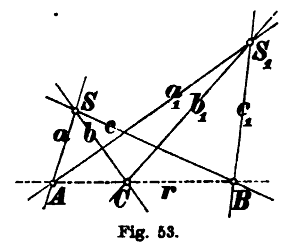


Fig. 53.

$$\frac{AC}{CB} : \left(\frac{ac}{cb}\right) = \frac{AS}{BS},$$

$$\frac{A_1 C_1}{C_1 B_1} : \left(\frac{ac}{cb}\right) = \frac{A_1 S}{B_1 S},$$

somit: $$\frac{AC}{CB} : \frac{A_1 C_1}{C_1 B_1} = \frac{AS}{BS} : \frac{A_1 S}{B_1 S} = \frac{AS}{SA_1} : \frac{BS}{SB_1}.$$

Die rechte Seite der Gleichung bleibt unverändert, wo auch der Strahl c die Strecken schneiden mag; daraus folgt:

a) *Das Doppelverhältnis zweier perspektivischen Strecken ist für alle perspektivischen Teilpunkte konstant; es ist gleich dem Doppelverhältnis der durch den Scheitel geteilten Strecken zwischen den entsprechenden Grenzpunkten.*

Vergleiche hiermit §. 6, 1. —

b) *Teilpunkte, welche die Strecken in diesem Verhältnis teilen, sind perspektivisch.*

3. Wenn insbesondere die Strecken AB und A_1B_1 bis zum gemeinsamen Punkt BB_1 beider Punktreihen gemessen werden, so

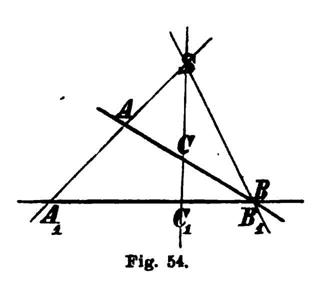


Fig. 54.

wird $\frac{BS}{SB_1} = -1$ und es ergiebt sich:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{A_1 C_1}{C_1 B_1} = -\frac{AS}{SA_1}.$$

$$\left(\frac{ac}{cb}\right) : \frac{AC}{CB} = \frac{(ar)}{(br)},$$

$$\left(\frac{a_1 c_1}{c_1 b_1}\right) : \frac{AC}{CB} = \frac{(a_1 r)}{(b_1 r)};$$

somit: $$\left(\frac{ac}{cb}\right) : \left(\frac{a_1 c_1}{c_1 b_1}\right) = \frac{(ar)}{(br)} : \frac{(a_1 r)}{(b_1 r)} = \left(\frac{ar}{ra_1}\right) : \left(\frac{br}{rb_1}\right).$$

Die rechte Seite der Gleichung bleibt unverändert, wo auch der Punkt C auf AB liegen mag; daraus folgt:

a') *Das Doppelverhältnis zweier perspektivischen Winkel ist für alle perspektivische Teilstrahlen konstant; es ist gleich dem Doppelverhältnis der durch die Axe geteilten Winkel zwischen den entsprechenden Schenkeln.*

Umgekehrt:

b') *Teilstrahlen, welche die Winkel in diesem Verhältnis teilen, sind perspektivisch.*

3'. Wenn insbesondere die Winkel ab und a_1b_1 bis zu dem Scheitelstrahl gemessen werden, dessen Gegenrichtungen SS_1 und S_1S mit

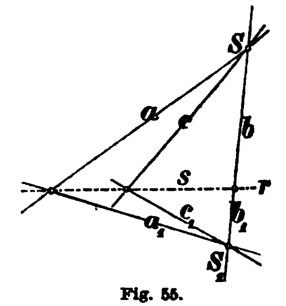


Fig. 55.

b und b_1 bezeichnet seien, so wird $\left(\frac{br}{rb_1}\right) = +1$ und es ergiebt sich:

$$\left(\frac{ac}{cb}\right) : \left(\frac{a_1 c_1}{c_1 b_1}\right) = \left(\frac{ar}{ra_1}\right).$$

Diese Beziehungen sollen in §. 17, 1 ihren Ausdruck finden.

§. 17. Anwendung auf Dreiecke mit Transversalen und mit dem Kreis. Tripelverhältnisse.

1. Werden die Seiten eines Dreiecks ABC durch eine Transversale $A_1B_1C_1$ durchschnitten, so

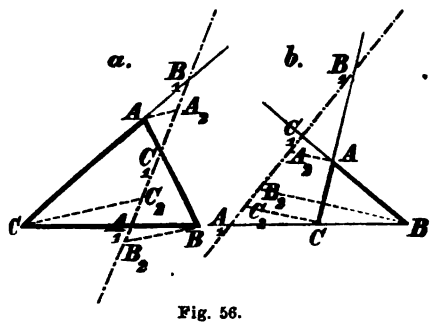


Fig. 56.

ist AC_1B p. CA_1B zu B_1 als Centrum; daher ist nach §. 16, 3:

$$\frac{AC_1}{C_1B} : \frac{CA_1}{A_1B} = -\frac{AB_1}{B_1C}$$

oder

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1.$$

1'. Werden die Winkel eines Dreiseits abc durch drei Teilstrahlen $a_1b_1c_1$, die durch einen

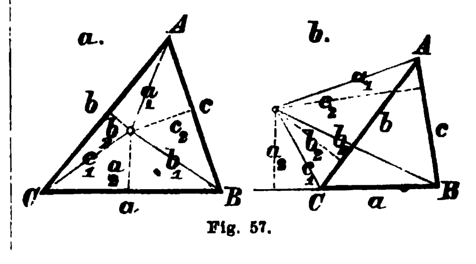


Fig. 57.

Punkt gehen, geteilt, so ist ac_1b p. ca_1b zu b_1 als Axe; daher ist nach §. 16, 3':

$$\left(\frac{ac_1}{c_1b}\right) : \left(\frac{ca_1}{a_1b}\right) = \left(\frac{ab_1}{b_1c}\right)$$

oder

$$\left(\frac{ac_1}{c_1b}\right)\left(\frac{ba_1}{a_1c}\right)\left(\frac{cb_1}{b_1a}\right) = +1.$$

Ein solches Produkt der drei Teilverhältnisse, in welchem die Glieder in derselben Ordnung aufeinander folgen, wie sie beim Umlaufen des Dreiecks sich ergeben, nennt man Tripelverhältnis der geteilten Seiten bzw. Winkel. Hiernach ergeben diese Gleichungen die Sätze:

a) *Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Seiten eines Dreiecks teilen die Seitenstrecken so, daſs das Tripelverhältnis* -1 *ist.*
(Satz des Menelaus, 100 n. Chr.)

Der Beweis hierfür ergiebt sich auch leicht, wenn man von den Ecken des Dreiecks Parallele zieht bis zur Transversale und die Teilverhältnisse nach §. 5, 3 durch die Verhältnisse dieser Parallelen ersetzt.

Dieser Satz läſst sich auch auf die Teile der Winkel des Dreiecks

a') *Die Verbindungsgeraden eines Punktes mit den Ecken eines Dreiseits (Ecktransversalen) teilen dessen Winkel so, daſs das Tripelverhältnis* $+1$ *ist.*

Der Beweis hierfür ergiebt sich auch leicht, wenn man die Teilverhältnisse durch die Normalen vom Schnittpunkt der Ecktransversalen auf die Seiten darstellt.

Dieser Satz läſst sich auch auf die Abschnitte der Seiten des Drei-

übertragen, welche die Verbindungsgeraden von $A_1 B_1 C_1$ mit den Ecken des Dreiecks bilden. Aus §. 16 1a' folgt nämlich für die drei zu $A_1 B_1 C_1$ perspektivischen Büschel B, A, C:

$$\left(\frac{ab_1}{b_1 c}\right) = +\frac{A_1 B_1}{B_1 C_1}\frac{(ar)}{(cr)}$$
$$\left(\frac{ca_1}{a_1 b}\right) = \mp\frac{C_1 A_1}{A_1 B_1}\frac{(cr)}{(br)}$$
$$\left(\frac{bc_1}{c_1 a}\right) = \pm\frac{B_1 C_1}{C_1 A_1}\frac{(br)}{(cr)}$$

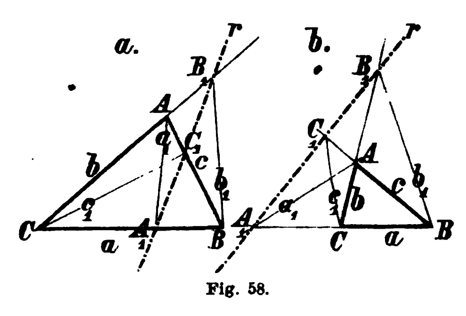


Fig. 58.

wobei die oberen oder unteren Vorzeichen bezw. zu Fig. 58a oder b gehören.

Durch Multiplikation ergiebt sich:

$$\left(\frac{ab_1}{b_1 c}\right)\left(\frac{ca_1}{a_1 b}\right)\left(\frac{bc_1}{c_1 a}\right) = -1,$$

d. h.:

b) *In einem Dreieck teilen die Ecktransversalen der Schnittpunkte einer Geraden mit den Dreiecksseiten die Winkel so, dafs das Tripelverhältnis* — 1 *ist.*

ecks übertragen, welche die Schnittpunkte von $a_1 b_1 c_1$ mit den Seiten des Dreiecks bilden. Aus §. 16, 1a folgt nämlich für die drei zu $a_1 b_1 c_1$ perspektivischen Geraden b, a, c:

$$\frac{AB_1}{B_1 C} = \frac{(a_1 b_1)}{(b_1 c_1)}\cdot\frac{AS}{CS}$$
$$\frac{CA_1}{A_1 B} = \frac{(c_1 a_1)}{(a_1 b_1)}\cdot\frac{CS}{BS}$$
$$\frac{BC_1}{C_1 A} = \frac{(b_1 c_1)}{(c_1 a_1)}\cdot\frac{BS}{AS}.$$

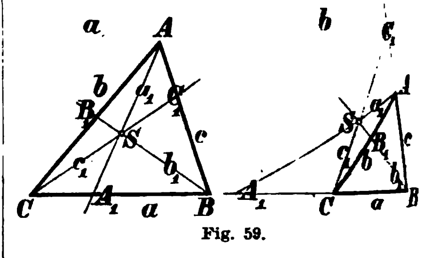


Fig. 59.

Durch Multiplikation ergiebt sich:

$$\frac{AB_1}{B_1 C}\cdot\frac{CA_1}{A_1 B}\cdot\frac{BC_1}{C_1 A} = +1,$$

d. h.:

b') *In einem Dreieck teilen die Ecktransversalen durch einen Punkt die Dreiecksseiten so, dafs das Tripelverhältnis* + 1 *ist.*

(Satz des Ceva, 1678.)

2. Von besonderer Bedeutung sind die Umkehrungen dieser Sätze:

W*enn für drei Punkte auf den Seiten eines Dreiecks das Tripelverhältnis* a) *der durch sie geteilten Seiten* [*oder* b) *der durch ihre Ecktransversalen geteilten Winkel*] — 1 *ist, so liegen die drei Punkte auf einer Geraden.*

Denn wenn die drei Punkte $A_1 B_1 C_1$ so liegen, dafs

Wenn für drei Ecktransversalen eines Dreiecks das Tripelverhältnis a') *der durch sie geteilten Winkel oder* b') *der durch sie geteilten Seiten* + 1 *ist, so gehen die drei Ecktransversalen durch einen Punkt.*

Denn wenn die drei Strahlen $a_1 b_1 c_1$ so liegen, dafs

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1$$

ist, so geht zunächst aus dem Vorzeichen des Tripelverhältnisses hervor, dafs entweder nur einer oder jeder auf der Verlängerung der betreffenden Seite liegt. Würde dann aber die Verbindungsgerade A_1B_1 die Seite AB nicht in C_1, sondern in X schneiden, so wäre nach 1a:

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1;$$

$$\left(\frac{ac_1}{c_1b}\right)\cdot\left(\frac{ba_1}{a_1c}\right)\cdot\left(\frac{cb_1}{b_1a}\right)=+1$$

ist, so geht zunächst aus dem Vorzeichen des Tripelverhältnisses hervor, dafs entweder nur einer oder jeder je in dem betreffenden Winkel liegt. Würde dann aber der Schnittpunkt von a_1b_1 nicht durch c_1, sondern durch x mit dem Eck ab verbunden sein, so wäre nach 1a′:

$$\left(\frac{ax}{xb}\right)\cdot\left(\frac{ba_1}{a_1c}\right)\cdot\left(\frac{cb_1}{b_1a}\right)=+1;$$

die Vergleichung mit der Voraussetzung ergiebt aber

$$\frac{AX}{XB}=\frac{AC_1}{C_1B} \qquad\Big|\qquad \left(\frac{ax}{xb}\right)=\left(\frac{ac_1}{c_1b}\right)$$

was (nach §. 2, 3 bezw. §. 15, 2a) nur möglich ist, wenn

X und C_1 in einen Punkt | x und c_1 in eine Gerade

zusammenfallen.

3. Diese Sätze von den Ecktransversalen eines Dreiecks finden ihre Anwendung auf die Seiten- und Winkelhalbierenden und Höhen desselben.

a) Ist zunächst $AC_1=C_1B$, so folgt gemäfs §. 16, 1a:

$$\left(\frac{ac_1}{c_1b}\right)=\frac{BC_1}{C_1A}:\frac{BC}{CA}$$

oder

$$\left(\frac{ac_1}{c_1b}\right)=\frac{AC}{CB}.$$

Eine Schwerlinie im Dreieck teilt den Winkel so, dafs das Teilverhältnis reciprok dem Verhältnis der anliegenden Seiten ist.

Den entgegengesetzten Wert hat das Teilverhältnis bei einem zur Seite parallelen Teilstrahl (nach dem unendlich fernen Punkt der Seite).

a′) Ist zunächst $ac_1=c_1b$, so folgt gemäfs §. 16, 1a′:

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\left(\frac{bc_1}{c_1a}\right)\cdot\frac{AC}{BC}$$

oder

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{CB}.$$

Eine Winkelhalbierende im Dreieck teilt die Gegenseite des Winkels im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Den entgegengesetzten Wert hat das Teilverhältnis des Innenwinkels mit der Halbierenden des Aufsenwinkels als Teilstrahl.

Anmerkung. Nimmt man je zwei der inneren Teillinien und eine äufsere (bezw. alle drei äufseren), so läfst sich auf deren Schnittpunkte mit den Seiten 2a anwenden.

b) Für die drei Schwerlinien ergiebt sich unmittelbar aus 2b′:

b′) Für drei Winkelhalbierende ergiebt sich unmittelbar aus 2a′:

Die Schwerlinien eines Dreiecks gehen durch einen Punkt, den Schwerpunkt.

Die Halbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks gehen durch einen Punkt, ebenso die Halbierenden der Aufsenwinkel zweier Ecken und des Innenwinkels des dritten Ecks.

c) Da die Abschnitte, welche die Berührungspunkte des einem Dreieck ein- oder angeschriebenen Kreises auf den Seiten bilden, paarweise einander gleich sind (I. §. 24, 8), so folgt aus 2 b′:

Die Ecktransversalen der Punkte, in welchen ein Kreis die drei Seiten eines Dreiecks berührt, schneiden einander in einem Punkt.

c′) Da die Winkel, welche die Höhen eines Dreiecks mit den Seiten bilden, paarweise einander gleich sind, indem sie je einen Winkel des Dreiecks zu einem R ergänzen, so folgt aus 2 a′:

Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

4. Werden die Seiten eines Dreiecks ABC von einem Kreis in drei Punktpaaren geschnitten, so ist nach §. 9, 1:

$$AC_1 \cdot AC_2 = B_1A \cdot B_2A$$
$$BA_1 \cdot BA_2 = C_1B \cdot C_2B$$
$$CB_1 \cdot CB_2 = A_1C \cdot A_2C$$

woraus durch Multiplikation folgt:

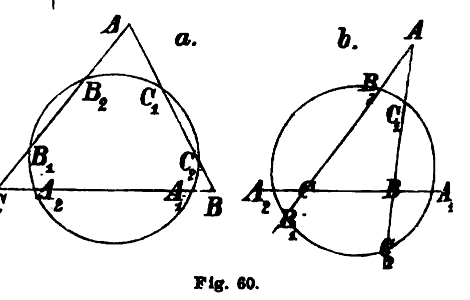


Fig. 60.

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1, \quad \text{d. h.:}$$

a) *Die sechs Schnittpunkte eines Kreises mit den Seiten eines Dreiecks teilen diese so, dafs das Produkt der beiden von dem gleichen Eck und der gleichen Seite an gebildeten Tripelverhältnisse gleich 1 ist* (Satz von Carnot).

Diesem Satz entspricht folgender:

a′) *Die sechs Tangenten an einen Kreis von den Ecken eines Dreiecks aus teilen die Winkel des letzteren so, dafs das Produkt der beiden von der gleichen Seite und dem gleichen Winkel an gebildeten Tripelverhältnisse gleich 1 ist* (Satz von Chasles).

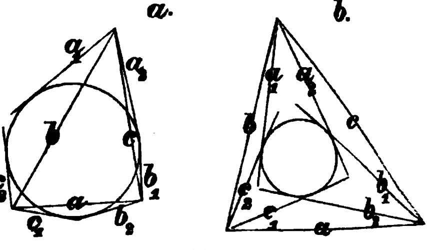


Fig. 61.

$$\left(\frac{ac_1}{c_1b}\right) \cdot \left(\frac{ba_1}{a_1c}\right) \left(\frac{cb_1}{b_1a}\right) \cdot \left(\frac{ac_2}{c_2b}\right) \left(\frac{ba_2}{a_2c}\right) \left(\frac{cb_2}{b_2a}\right) = 1.$$

Um dies nachzuweisen, müssen wir erst eine Beziehung zwischen

den Teilverhältnissen von Winkeln zwischen Geraden und Tangenten auffinden, welche dem Satz §. 9, 1a entspricht.

Es seien a' und a'' die Abstände der Berührungspunkte C_1 und C_2 der Tangenten c_1 und c_2 aus C von der durch C gehenden Geraden a, wobei wir die Abstände, welche auf derselben Seite von a wie der Kreismittelpunkt liegen, als positiv, die der Gegenseite als negativ bezeichnen.

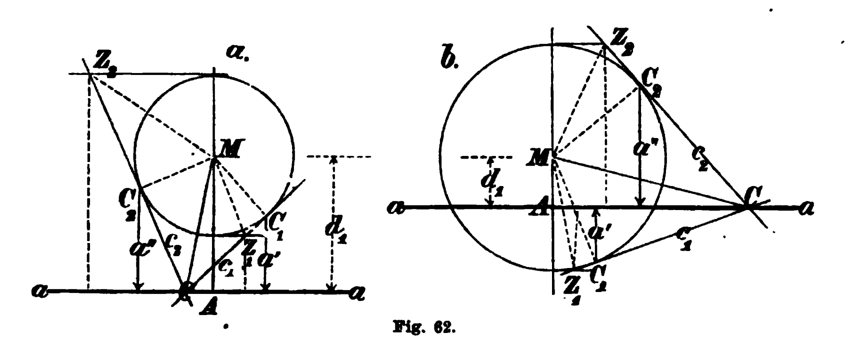


Fig. 62.

Ferner sei der Abstand des Mittelpunktes M von a

$$MA = d_1$$

und die zu a parallelen Tangenten mögen c_1 und c_2 in Z_1 und Z_2 treffen. Alsdann ist

$$\frac{a'}{c_1} = \frac{d_1 - r}{CZ_1}, \qquad \frac{a''}{c_2} = \frac{d_1 + r}{CZ_2},$$

somit

$$\frac{a'}{c_1} \cdot \frac{a''}{c_2} = \frac{d_1^2 - r^2}{CZ_1 \cdot CZ_2}.$$

Nun ist aber $\triangle MCZ_1 \backsim Z_2CM$; denn es ist $\sphericalangle MCZ_1 = Z_2CM$ und weil Z_1M den Winkel AMC_1 halbiert, so ist auch:

$$\sphericalangle Z_1MC = \tfrac{1}{2}(CMC_1 + CMA) = \tfrac{1}{2}(CMC_2 + AMC)$$
$$= \tfrac{1}{2} AMC_2 = MZ_2C \text{ (I. Teil §. 18, 4b).}$$

Daher ist

$$CZ_1 : CM = CM : CZ_2, \qquad CZ_1 \cdot CZ_2 = CM^2,$$

also

$$\frac{a'}{c_1} \cdot \frac{a''}{c_2} = \frac{d_1^2 - r^2}{CM^2}.$$

Für eine zweite Gerade b durch den Punkt C ergiebt sich ebenso:

$$\frac{b'}{c_1} \cdot \frac{b''}{c_2} = \frac{d_2^2 - r^2}{CM^2}$$

somit:

$$\frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''} = \frac{d_1^2 - r^2}{d_2^2 - r^2}$$

oder

$$\left(\frac{a c_1}{c_1 b}\right) \cdot \left(\frac{a c_2}{c_2 b}\right) = \frac{d_1^2 - r^2}{d_2^2 - r^2}.$$

Ebenso (Fig. 61):

$$\left(\frac{b a_1}{a_1 c}\right) \cdot \left(\frac{b a_2}{a_2 c}\right) = \frac{d_2^2 - r^2}{d_3^2 - r^2}$$

$$\left(\frac{c b_1}{b_1 a}\right) \cdot \left(\frac{c b_2}{b_2 a}\right) = \frac{d_3^2 - r^2}{d_1^2 - r^2}$$

woraus durch Multiplikation die Richtigkeit des obigen Satzes a′ folgt.

5. Wir nennen im folgenden jeden geschlossenen Geradenzug (I. Teil §. 17, 4) von n Ecken, bezw. n Seiten ein n-eck oder n-seit ohne Rücksicht darauf, ob einander die Seiten durchschneiden oder nicht.

Werden die Gegenseiten eines Sehnensechsecks 123456 bis zu ihren Durchschnittspunkten $A\,B\,C$ verlängert und wird aus drei nicht aufeinander folgenden Seiten 61, 23, 45 ein Dreiseit QSR gebildet, so läſst sich auf dieses der Satz des Menelaus anwenden und zwar bezüglich der drei übrigen Seiten:

Werden die Gegenecken eines Tangentensechsseits 123456 miteinander verbunden durch abc und wird aus drei nicht aufeinander folgenden Ecken 61, 23, 45, ein Dreiseit qsr gebildet, so läſst sich auf dieses der Satz des Ceva anwenden und zwar bezüglich der drei übrigen Ecken:

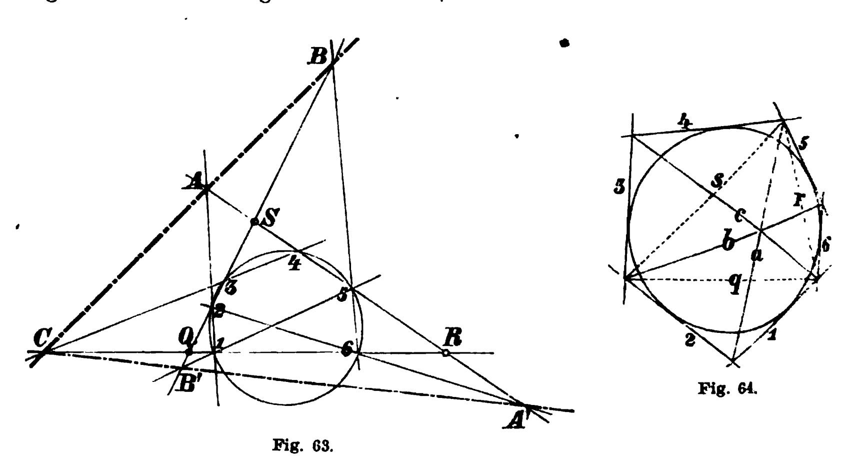


Fig. 63. Fig. 64.

$$\frac{QC}{CR} \cdot \frac{R4}{4S} \cdot \frac{S3}{3Q} = -1$$

$$\frac{RA}{AS} \cdot \frac{S2}{2Q} \cdot \frac{Q1}{1R} = -1$$

$$\frac{SB}{BQ} \cdot \frac{Q6}{6R} \cdot \frac{R5}{5S} = -1.$$

$$\left(\frac{qc}{cr}\right) \cdot \left(\frac{r4}{4s}\right) \cdot \left(\frac{s3}{3q}\right) = +1$$

$$\left(\frac{ra}{as}\right) \cdot \left(\frac{s2}{2q}\right) \cdot \left(\frac{q1}{1r}\right) = +1$$

$$\left(\frac{sb}{bq}\right) \cdot \left(\frac{q6}{6r}\right) \cdot \left(\frac{r5}{5s}\right) = +1.$$

Die Multiplikation dieser Gleichungen ergiebt mit Rücksicht auf 4:

$$\frac{QC}{CR} \cdot \frac{RA}{AS} \cdot \frac{SB}{BQ} = -1$$

woraus nach 2a folgt, dafs C, A, B in einer Geraden liegen. Dies ist der Satz von Pascal (1640):

Bei jedem Sehnensechseck liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Geraden (der Pascal'schen Geraden).

$$\left(\frac{qc}{cr}\right) \cdot \left(\frac{ra}{as}\right) \cdot \left(\frac{sb}{bq}\right) = +1$$

woraus nach 2a' folgt, dafs c, a, b einander in einem Punkt schneiden. Dies ist der Satz von Brianchon (1806):

Bei jedem Tangentensechsseit gehen die Verbindungsgeraden der Gegenecken durch einen Punkt (den Brianchon'schen Punkt).

Zusatz. In gleicher Weise läfst sich dies zeigen

für ein Sechseck, dessen Ecken abwechselnd auf zwei bestimmten Geraden liegen.

für ein Sechsseit, dessen Seiten abwechselnd einander in zwei bestimmten Punkten schneiden.

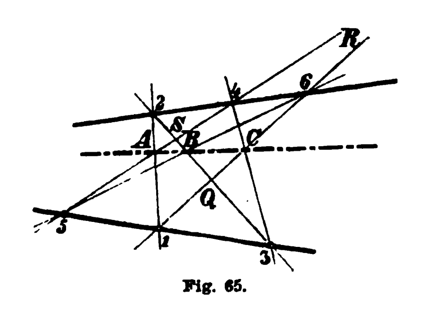


Fig. 65.

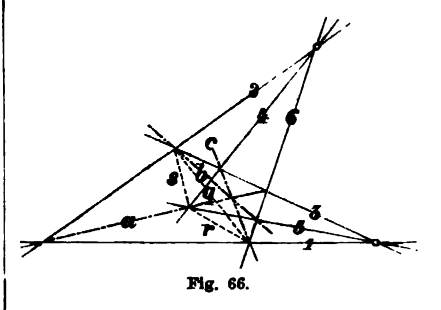


Fig. 66.

6. Jedes Sechseck, in welchem die drei Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen, heifst ein Pascal'sches Sechseck.

6'. Jedes Sechsseit, in welchem die drei Verbindungsgeraden der Gegenecken einander in einem Punkt schneiden, heifst ein Brianchon'sches Sechsseit.

Aus jedem solchen ergiebt sich ein neues, indem man die Ordnung irgend zweier auf einander folgenden Elemente vertauscht. So entsteht z. B. aus dem Pascal'schen Sechseck (Fig. 63) 123456 durch Vertauschung von 1 und 6 das neue Pascal'sche Sechseck 623451; denn dafs

$$\frac{QC}{CR} \cdot \frac{RA'}{A'S} \cdot \frac{SB'}{B'Q} = -1$$

ist, was wir kurz mit $(QRSCA'B') = -1$ bezeichnen wollen, folgt aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(QRSCAB) = -1 \\ (QRS6A'2) = -1 \\ (QRS15B') = -1\end{array}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{l}(QRS1A2) = -1 \\ (QRS65B) = -1.\end{array}\right.$$

Indem wir aber nach und nach je zwei Elemente der Gruppe 1 bis 6 mit einander vertauschen, ergeben sich alle möglichen Anordnungen dieser Elemente (im Ganzen 60 Figuren). Somit gilt:

Jeder geschlossene Geradenzug

durch die sechs Ecken eines Pascal'schen Sechsecks ist ebenfalls ein solches.	*von den sechs Seiten eines Brianchon'schen Sechsseits ist ebenfalls ein solches.*

Zusatz. Wie hierbei die Pascal'sche Gerade $CB'A'$ durch C geht, so ist dies auch der Fall mit der Pascal'schen Geraden, welche bei der Vertauschung von 3 und 4 entsteht. Es schneiden einander also je drei der entstehenden Pascal'schen Geraden in einem (Steiner'schen) Punkt, bzw. drei Brianchon'sche Punkte liegen auf einer Geraden.

7. Die Sätze in 5 führen zu einer Reihe von weiteren Sätzen, wenn man ein Paar aufeinander folgender Ecken des Sehnensechsecks, bzw. aufeinander folgender Seiten des Tangentensechsseits zusammenfallen läfst, wobei die Sekante in eine Tangente, bzw. der Tangentendurchschnitt in den Berührungspunkt übergeht (s. I. Teil §. 23, 7 und §. 34, 2 Zusatz). Es kann dies geschehen a) an einem Paar, b) an zwei gegenüberliegenden Paaren, c) an zwei aufeinanderfolgenden Paaren, d) an allen drei Paaren. So z. B. ergiebt a) die Sätze:

a) *In einem Sehnenfünfeck liegt der Schnittpunkt einer Seite und der im Gegeneck derselben gezogenen Tangente auf einer Geraden mit den Schnittpunkten der beiden anderen gegenüberliegenden Seitenpaare.*	a') *In einem Tangentenfünfseit geht die Verbindungsgerade eines Ecks mit dem Berührungspunkt der Gegenseite desselben durch den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der beiden andern gegenüberliegenden Eckenpaare.*

Dieser Satz bietet ein Mittel, die Aufgabe:

Zu einem Punkt der Peripherie eines Kreises die Tangente zu bestimmen,	*Zu einer Tangente eines Kreises den Berührungspunkt zu bestimmen,*

mit dem Lineal allein zu lösen. Beistehende Figuren geben die Lösung durch die Reihenfolge der Zahlen an, wobei mit 3,4 das gegebene Element bezeichnet ist.

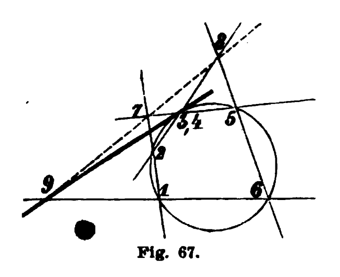


Fig. 67.

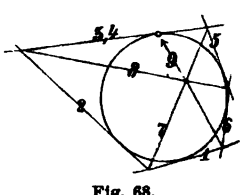


Fig. 68.

Sechstes Kapitel.

Doppelverhältnisse bei je vier Elementen von Punktreihen und Strahlenbüscheln.

§. 18. Harmonische Punkte und Strahlen.

1. Wird eine Strecke AB durch einen Punkt Q innen und einen Punkt R aufsen so geteilt, dafs die Teilverhältnisse absolut genommen von gleicher Gröfse sind, so heifst die Strecke harmonisch geteilt. Die Teilpunkte Q und R heifsen harmonisch zugeordnet (konjugiert).

$$\frac{AQ}{QB} = -\frac{AR}{RB}$$

Fig. 69.

Anmerkung. Es ist nämlich

$$\frac{AR - QR}{QR - BR} = \frac{AR}{BR},$$

also QR das harmonische Mittel zu AR und BR (§. 3, 5).

Die Grenzpunkte der Strecke und ihre so bestimmten Teilpunkte heifsen vier harmonische Punkte.

1′. Wird ein Winkel ab durch einen Strahl q innen und einen Strahl r aufsen so geteilt, dafs die Teilverhältnisse absolut genommen einander gleich sind, so heifst der Winkel harmonisch geteilt. Die Teilstrahlen q und r heifsen harmonisch zugeordnet.

$$\left(\frac{aq}{qb}\right) = -\left(\frac{ar}{rb}\right).$$

Fig. 70.

Die Schenkel des Winkels und seine so bestimmten Teilstrahlen heifsen vier harmonische Strahlen.

Über die Teilung einer Strecke bezw. eines Winkels in dieser Weise siehe §. 7, 3, bezw. §. 15, 3.

Aus der Annahme folgt, dafs

$$\frac{QA}{AR} = -\frac{QB}{BR}, \text{ d. h.:}$$

a) *Die Strecke zwischen zwei harmonisch zugeordneten Teilpunkten einer Strecke wird durch die Grenzpunkte der letzteren selbst harmonisch geteilt.*

Es sind deshalb auch A und B harmonisch zugeordnete Punkte der Strecke QR.

$$\left(\frac{qa}{ar}\right) = -\left(\frac{qb}{br}\right), \text{ d. h.:}$$

a′) *Der Winkel zwischen zwei harmonisch zugeordneten Teilstrahlen eines Winkels wird durch die Schenkel des letzteren selbst harmonisch geteilt.*

Es sind deshalb auch a und b harmonisch zugeordnete Strahlen des Winkels qr.

Aus der obigen Annahme folgt ferner:

$\frac{AQ}{QB} : \frac{AR}{RB} = -1$, d. h.:

$\left(\frac{aq}{qb}\right) : \left(\frac{ar}{rb}\right) = -1$, d. h.:

b) *Das Doppelverhältnis der beiden Teilverhältnisse einer harmonisch geteilten Strecke oder Winkels ist* — 1. — Umgekehrt:

c) *Wenn das Doppelverhältnis der beiden Teilungen einer Strecke oder eines Winkels* — 1 *ist, so ist die Teilung eine harmonische.*

2. Wenn durch einen Teilpunkt bezw. Teilstrahl das Teilverhältnis bestimmt ist, so ist dadurch auch nach §. 2, 2a, bezw. §. 15, 2a der zugeordnete Punkt oder Strahl bestimmt.

Zu einem Teilpunkt einer Strecke giebt es immer nur einen harmonisch zugeordneten Punkt.

Zu einem Teilstrahl eines Winkels giebt es immer nur einen harmonisch zugeordneten Strahl.

Jedoch ist hierbei zu bemerken, dafs für einen äufseren Strahl von vier harmonischen Strahlen jeder der beiden Halbstrahlen der betreffenden Geraden genommen werden kann, da für beide das Teilverhältnis absolut das gleiche ist (§. 15, 2b).

Die gegenseitige Abhängigkeit der Lage zweier harmonisch zugeordneten Elemente ergiebt sich aus der in 1 gegebenen Gleichung, wie dies in §. 3 bezw. §. 15 für ein Element ausgeführt wurde:

a) Liegt Q in A, so fällt auch R mit A zusammen; rückt Q von A gegen die Mitte zwischen A und B, so entfernt sich R von A in der Gegenrichtung.

a′) Fällt q nach a, so gilt dies auch von r; dreht sich q von a gegen die Mitte zwischen a und b, so dreht sich ein Halbstrahl von r von a hinweg im entgegengesetzten Sinn.

b) Fällt Q in die Mitte von AB, so rückt R in unendliche Entfernung.

b′) Erreicht q die Halbierende von ab, so halbiert jeder Halbstrahl von r einen Nebenwinkel zu ab.

c) Bewegt sich Q in gleicher Richtung weiter gegen B, so rückt R aus unendlicher Entfernung von der entgegengesetzten Richtung gegen B und fällt mit B zusammen, wenn Q in B fällt.

c′) Dreht sich q im selben Sinn weiter gegen b, so dreht sich der zweite Halbstrahl von r im entgegengesetzten Drehungssinn gegen b und fällt zugleich mit q in diesen Strahl b.

3. Die in 2 b und b′ angegebenen Fälle kennzeichnen wir durch die Sätze:

a) *In einer Strecke sind der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt der betreffenden Geraden harmonisch zugeordnet.*

a') *In einem Winkel zweier Geraden sind die beiden Winkelhalbierenden dieser Geraden harmonisch zugeordnet.*

Aufser diesen Winkelhalbierenden können nicht zwei zugeordnete Strahlen normal zu einander sein, da von diesen ab der Drehung des einen Strahls eine Drehung des anderen Strahls in entgegengesetztem Sinne entspricht; d. h.:

b) *Wenn zwei harmonisch zugeordnete Strahlen normal zu einander sind, so halbiert jeder derselben einen Winkel der beiden anderen Strahlen.*

4. Zieht man von einem Punkt S Strahlen $(abqr)$ nach den Grenzpunkten einer Strecke AB, nach deren Mittelpunkt Q und parallel zu der Strecke (nach dem unendlich fernen Punkt I. Teil §. 3, 4 Anmerkung),

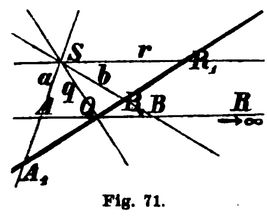


Fig. 71.

Fig. 72.

so erhält man auf jeder Transversalen vier harmonische Punkte. Denn für die beliebige durch Q gehende Transversale $A_1QB_1R_1$ ist:

$$\frac{A_1Q}{A_1R_1} = \frac{AQ}{SR_1} = \frac{QB}{SR_1} = \frac{QB_1}{B_1R_1}$$

oder

$$\frac{A_1Q}{QB_1} = -\frac{A_1R_1}{R_1B_1}.$$

Für irgend eine Parallele zu A_1B_1 gilt das gleiche (§. 6, 1), also für alle Transversalen, d. h.:

a) *Die Projektion einer Strecke wird durch die Projektion des Mittelpunktes und des unendlich fernen Punktes harmonisch geteilt.*

Ebenso ergiebt sich umgekehrt aus der Annahme, dafs $A_1QB_1R_1$

so sind dies vier harmonische Strahlen. Denn zieht man noch $AR \parallel q \parallel BR_1$, so ist $AR = BR_1$ und somit:

$$\frac{RA}{AQ} = \frac{R_1B}{BQ},$$

d. h.

$$\left(\frac{ra}{aq}\right) = -\left(\frac{rb}{bq}\right)$$

oder

$$\left(\frac{aq}{qb}\right) = -\left(\frac{ar}{rb}\right), \text{ d. h.:}$$

a') *Der Winkel der Strahlen nach den Grenzpunkten einer Strecke wird durch die Strahlen nach dem Mittelpunkt und dem unendlich fernen Punkt derselben harmonisch geteilt.*

Ebenso ergiebt sich umgekehrt aus der Annahme, dafs $aqbr$ vier

vier harmonische Punkte und $AB \parallel SR_1$, dafs $AQ = QB$, d. h.:

b) *Rückt in der Projektion von vier harmonischen Punkten ein Punkt in unendliche Entfernung, so rückt die Projektion des zugeordneten Punktes in die Mitte der Projektionen der beiden andeern Punkte.*

harmonische Strahlen und $AB \parallel r$, dafs $AQ = QB$ ist, d. h.:

b′) *Auf einer Parallelen zu einem von vier harmonischen Strahlen halbiert der diesem zugeordnete Strahl die von den beiden anderen Strahlen begrenzte Strecke.*

5. Nach 4a läfst sich die Aufgabe leicht lösen: *Zu einem Teilpunkt Q einer Strecke AB den zugeordneten Punkt R zu finden.* Man zieht durch A oder B oder Q eine Gerade, auf welcher man nach einerlei Richtung oder nach den Gegenrichtungen zwei gleiche Strecken aufträgt. Dann kann man A und B entweder als die Projektionen der Grenzpunkte dieser Doppelstrecke und zugleich Q als Projektion des Mittelpunktes oder unendlich fernen Punktes auffassen oder umgekehrt. Man erhält durch Verbindung der perspektivischen Punkte den Scheitel eines Strahlenbüschels und projiziert von diesem aus auf die Gerade AB den noch übrigen der vier Punkte.

Folgende Figuren stellen einige solcher Lösungsarten dar.

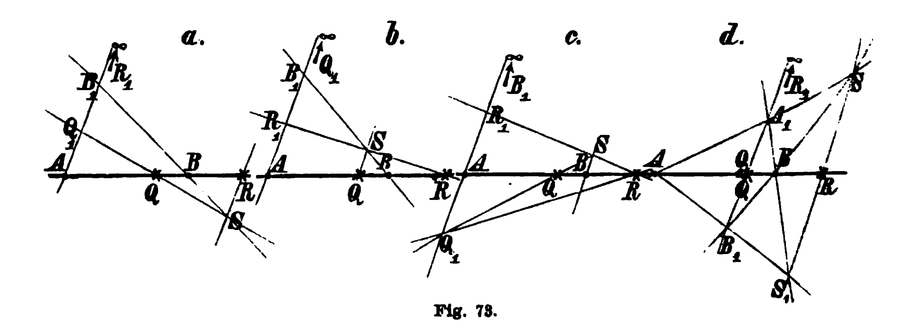


Fig. 73.

Die Aufgabe: *Zu einem Teilstrahl q eines Winkels ab ist der zugeordnete Strahl r zu finden,* wird nach 4a′ gelöst, indem man durch einen Punkt Q von q die Parallele QB zu a zieht und die Strecke QB um $BR = QB$ verlängert; dann ist SR der zugeordnete Strahl zu q.

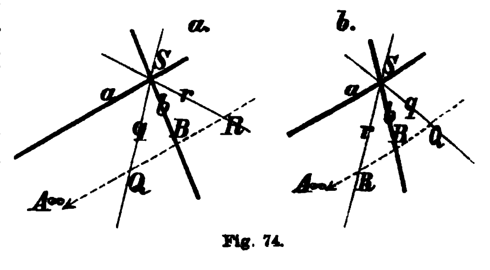


Fig. 74.

6. Sind nun $AQBR$ vier harmonische Punkte und $aqbr$ die mit ihnen perspektivischen Strahlen eines Büschels S und zieht man $Q_1BR_1 \parallel a$, so ist nach 4b $Q_1B = BR_1$ und somit sind nach 4a′ $aqbr$ vier harmonische Strahlen.

6. Sind nun $aqbr$ vier harmonische Strahlen und $AQBR$ die mit ihnen perspektivischen Punkte einer Reihe s und zieht man $Q_1BR_1 \parallel a$, so ist nach 4b′ $Q_1B = BR$ und somit sind nach 4a $AQBR$ vier harmonische Punkte.

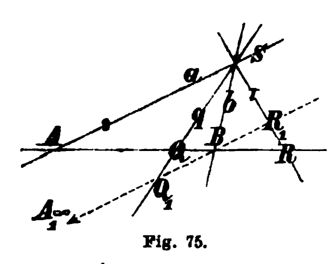


Fig. 75.

a) *Die mit vier harmonischen Punkten perspektivischen Strahlen eines Büschels sind harmonische.*

a′) *Die mit vier harmonischen Strahlen perspektivischen Punkte einer Geraden sind harmonische.*

Hiernach kann jede der beiden Aufgaben in 5 auf die andere zurückgeführt werden.

Projiziert man ferner vier harmonische Punkte durch vier Strahlen auf eine zweite Gerade, so sind nach a die Strahlen harmonische und somit nach a′ auch die vier Punkte der zweiten Geraden, d. h.:

b) *Die mit vier harmonischen Punkten perspektivischen Punkte einer Reihe sind harmonische.*

Wählt man ferner zu vier harmonischen Strahlen einen zweiten mit ihm perspektivischen Büschel, so sind nach a′ die Punkte der Axe harmonische und somit nach a auch die vier Strahlen des zweiten Büschels, d. h.:

b′) *Die mit vier harmonischen Strahlen perspektivischen Strahlen eines Büschels sind harmonische.*

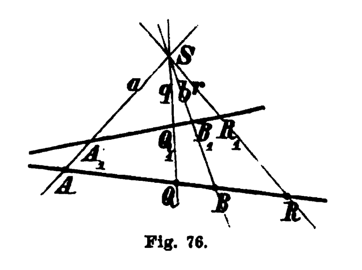


Fig. 76.

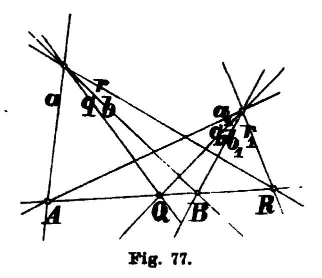


Fig. 77.

7. Wenn wir nun von zwei harmonischen Gebilden je drei Elementenpaare in perspektivische Lage bringen (§. 14, 4, 5 u. 5′) indem man z. B. A und A_1 zusammenfallen läfst), so mufs auch das vierte Elementenpaar (etwa R und R_1) perspektivisch sein, da mit dem einen Elemente (R) dasjenige (nach 6) perspektivisch ist, welches der Projektion (Q_1) des zugeordneten Elementes (Q) selbst zugeordnet ist (das ist eben R_1). Daraus folgt:

a) *Irgend zwei harmonische Gebilde sind projektivisch.*

b) *Fällt von harmonischen Punkten zweier Reihen ein Paar Punkte zusammen, so sind beide Reihen perspektivisch.*

b') *Fällt von harmonischen Strahlen zweier Büschel ein Paar Strahlen zusammen, so sind beide Büschel perspektivisch.*

8. Die metrische Beziehung der Abschnitte von vier harmonischen Punkten läfst sich noch in anderer Weise feststellen. (Vgl. auch §. 3, 5.) Es folgt nämlich aus $AQ:QB = AR:BR$, wenn M die Mitte von AB ist:

$$\frac{AM + MQ}{MB - MQ} = \frac{AM + MR}{MR - MB},$$

Fig. 78.

oder nach §. 3, 2c u. b, da $AM = MB$ ist:

$$AM:MQ = MR:AM \quad \text{oder} \quad \overline{AM}^2 = MQ \cdot MR, \quad \text{d. h.:}$$

a) *Das Produkt der Abstände zweier harmonisch zugeordneten Punkte von dem Mittelpunkt der harmonisch geteilten Strecke ist gleich dem Quadrat der Hälfte dieser Strecke, und umgekehrt: zwei so bestimmte Punkte teilen die Strecke harmonisch.*

Anmerkung: Eine ähnliche Beziehung ergiebt sich für die Halbierende des harmonisch geteilten Winkels. Sind m und m_1 die Winkelhalbierenden zu ab und $AB \parallel m_1$, so ist nach a

$$\overline{AM}^2 = MQ \cdot MR.$$

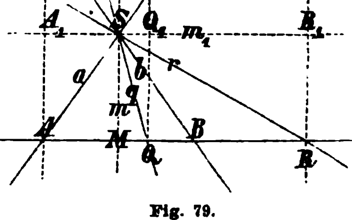


Fig. 79.

Zieht man AA_1, QQ_1, RR_1 normal zu m, so folgt durch Division mit diesen einander gleichen Strecken

$$\left(\frac{MA}{AA_1}\right)^2 = \left(\frac{MQ}{QQ_1}\right) \cdot \left(\frac{MR}{RR_1}\right)$$

oder

$$\left(\frac{ma}{am_1}\right)^2 = \left(\frac{mq}{qm_1}\right) \cdot \left(\frac{mr}{rm_1}\right)^{*)}$$

Aus dem Verhältnis der Produkte der Abschnitte einer harmonisch geteilten Strecke folgt:

$$\frac{AQ \cdot QB}{AR \cdot BR} = \frac{(MB + MQ)\,(MB - MQ)}{(MR + MB)\,(MR - MB)} = \frac{MB^2 - MQ^2}{MR^2 - MB^2}$$

$$= \frac{MQ \cdot MR - MQ^2}{MR^2 - MQ \cdot MR} = \frac{MQ}{MR}$$

*) Es ist $\operatorname{tg}^2 ma = \operatorname{tg} mq \cdot \operatorname{tg} mr$.

und da

$$\frac{AQ}{AR} = \frac{QB}{BR},$$

so ist nun

$$\frac{MQ}{MR} = \left(\frac{QA}{AR}\right)^2 = \left(\frac{QB}{BR}\right)^2, \text{ d. h.:}$$

b) *Das Verhältnis der Abstände zweier harmonisch zugeordneten Punkte vom Mittelpunkt der harmonisch geteilten Strecke ist gleich dem Quadrat des Teilverhältnisses der Strecke jener Punkte durch die Grenzpunkte der ursprünglich gegebenen Strecke.*

§. 19. Harmonische Punkte und Strahlen im vollständigen Viereck und Vierseit.

1. Vier Punkte $ABCD$, von welchen keine drei in derselben Geraden liegen und welche durch sechs Gerade verbunden sind:

AB oder a, BC oder b,
CD oder c, DA oder d,
AC oder e, BD oder f,

1'. Vier Gerade $abcd$, von welchen keine drei durch denselben Punkt gehen und welche einander in sechs Punkten schneiden:

ab in A, bc in B
cd in C, da in D,
ac in E, bd in F,

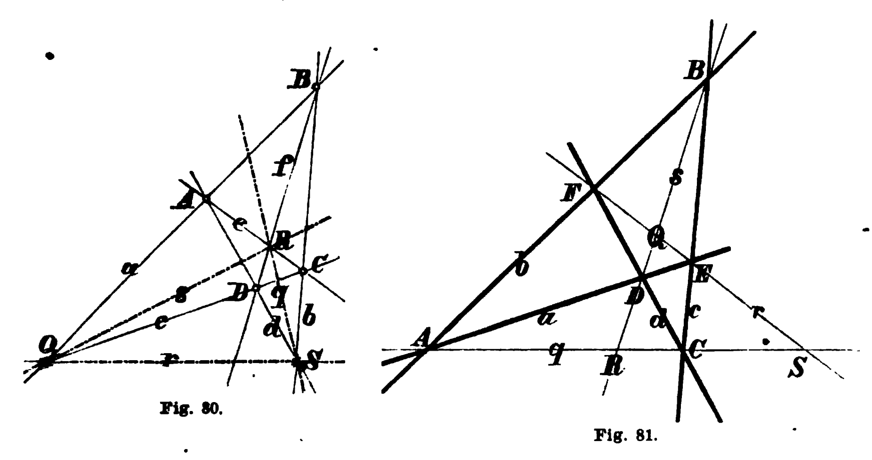


Fig. 80.

Fig. 81.

bilden ein vollständiges Viereck. Dasselbe hat drei Paar Gegenseiten ac, bd, ef. Die Durchschnittspunkte QSR derselben heifsen Nebenecken.

bilden ein vollständiges Vierseit. Dasselbe hat drei Paar Gegenecken AC, BD, EF. Die Verbindungsgeraden qsr derselben heifsen Nebenseiten (Diagonalen).

Das vollständige Viereck enthält drei einfache Vierecke: $ABCD$, $ACDB$, $ADBC$. (Fig. 82).

Das vollständige Vierseit enthält drei einfache Vierseite: $abcd$, $acdb$, $adbc$. (Fig. 83.)

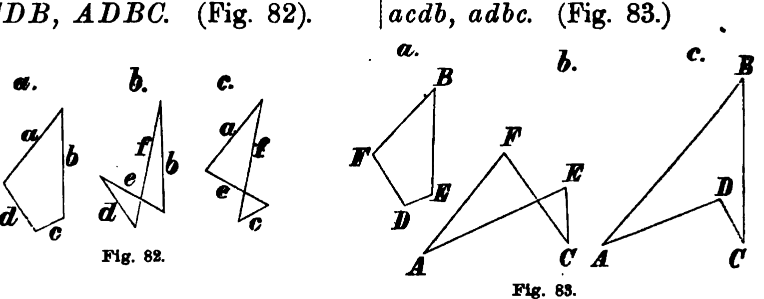


Fig. 82. Fig. 83.

2. Es ist $Q(asc)$ ⊼ $R(esf)$ zu d als Axe; daher müssen die zu s harmonisch zugeordneten Strahlen r und q einander auf d schneiden. Ebenso ist $Q(asc)$ ⊼ $R(fse)$ zu b als Axe; somit müssen die Strahlen r und q einander auch auf b schneiden; sie müssen also durch den Schnittpunkt S von bd gehen.

In einem Nebeneck eines vollständigen Vierecks wird der Winkel zweier Gegenseiten durch die Strahlen nach den anderen Nebenecken harmonisch geteilt.

2'. Es ist $q(ASC)$ ⊼ $r(ESF)$ zu D als Scheitel; daher müssen die zu S harmonisch zugeordneten Punkte R und Q auf einem Strahl von D liegen. Ebenso ist $q(ASC)$ ⊼ $r(FSE)$ zu B als Scheitel; somit müssen die Punkte R und Q auch auf einem Strahl durch B liegen; sie müssen also auf der Verbindungsgeraden s von BD liegen.

Auf einer Nebenseite eines vollständigen Vierseits wird der Abstand zweier Gegenecken durch die anderen Nebenseiten harmonisch geteilt.

Anders kann man dies beweisen, indem man die Figur auffaſst als

ein Dreiseit abc mit 1) den durch den Punkt R gehenden Ecktransversalen sef und 2) der Transversalen d (mit den Ecktransversalen ref) und hierauf §. 17, 1 a' und b anwendet.

ein Dreieck ABC mit 1) den auf der Geraden r liegenden Schnittpunkten SEF und 2) den Ecktransversalen durch D (mit den Schnittpunkten REF) und hierauf §. 17, 1 a und b' anwendet.

Jeder dieser Sätze folgt auch unmittelbar aus dem anderen.

3. Hiermit ist ein Mittel gegeben die Aufgaben §. 18, 5 und 6 mit dem Lineal allein zu lösen:

a) Man findet zu einem gegebenen Winkel ac und Teilstrahl r den zugeordneten Strahl s, indem man durch einen Punkt S auf r zwei Gerade b und d zieht und die Schnittpunkte derselben

a') Man findet zu einer gegebenen Strecke AC und Teilpunkt R den zugeordneten Punkt S, indem man auf einer Geraden s durch R zwei Punkte B und D sowohl mit A als C durch Ge-

mit a und c untereinander verbindet. Der Schnittpunkt R dieser Verbindungsgeraden liegt dann auf dem fraglichen Strahl.

Da hierbei der Punkt S auf r ganz beliebig gewählt werden kann, so folgt:

b) *In vollständigen Vierecken, welche zwei Gegenseiten und die Verbindungsgerade von deren Nebeneck nach einem zweiten Nebeneck gemeinsam haben, fallen auch die Verbindungsgeraden des ersten und dritten Nebenecks zusammen.*

rade verbindet. Die Verbindungsgerade r der Schnittpunkte dieser letzteren Geraden geht dann durch den fraglichen Punkt.

Da hierbei der Strahl s durch R ganz beliebig gewählt werden kann, so folgt:

b′) *In vollständigen Vierseiten, welche zwei Gegenecken und den Schnittpunkt von deren Nebenseite mit einer zweiten Nebenseite gemeinsam haben, fallen auch die Schnittpunkte der ersten und dritten Nebenseite zusammen.*

Dies führt dazu, folgende Aufgabe mit dem Lineal allein zu lösen:

c) *Es soll durch einen gegebenen Punkt R eine Gerade nach dem Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden ac gezogen werden, ohne diesen Schnittpunkt selbst zu benützen.*

Man wählt durch R die beliebigen Strahlen e und f, bestimmt durch diese den Punkt s, zieht durch diese zwei weitere Strahlen b_1, d_1 u. s. f.

c′) *Es soll von einer gegebenen Geraden r der Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden zweier gegebenen Punkte AC bestimmt werden, ohne diese Verbindungsgerade selbst zu benützen.*

Man wählt auf r die beliebigen Punkte E und F, bestimmt durch diese die Gerade s, wählt auf dieser zwei weitere Punkte B_1, D_1 u. s. f.

4. Aus 2 folgt:

a) *In einem vollständigen Viereck wird jede Seite durch ein Nebeneck*

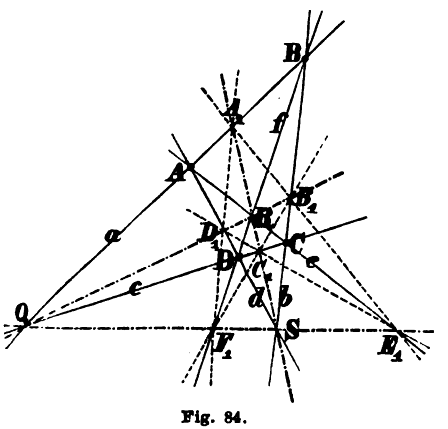


Fig. 84.

und den Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden der beiden anderen Nebenecken harmonisch geteilt.

4′. Aus 2 folgt:

a′) *In einem vollständigen Vierseit wird der Winkel benachbarter Seiten*

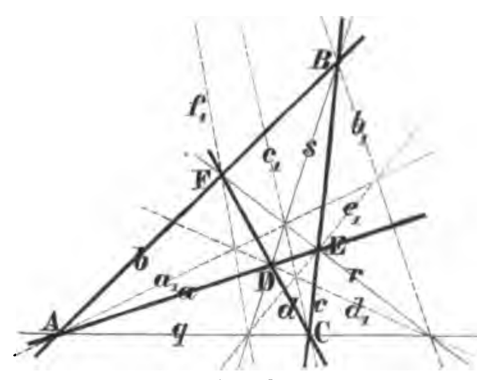


Fig. 85.

durch eine Nebenseite und den Strahl nach dem Schnittpunkt der beiden anderen Nebenseiten harmonisch geteilt.

Sind $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ diese Teilpunkte auf $abcdef$, so ist nun zu F_1 als Scheitel QAB ⊼. SAD; daher liegen auch die zu Q und S zugeordneten Punkte A_1 und D_1 perspektivisch zu F_1 als Scheitel, d. h. $A_1 D_1 F_1$ ist eine Gerade, ebenso $B_1 C_1 F_1$, $A_1 B_1 E_1$, $D_1 C_1 F_1$; daraus folgt:

b) *In einem vollständigen Viereck bilden die Schnittpunkte der Seiten mit den Verbindungsgeraden der Nebenecken die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.*

Sind $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ diese Teilstrahlen durch $ABCDEF$, so ist nun zu f_1 als Axe qab ⊼. sad; daher liegen auch die zu q und s zugeordneten Strahlen a_1 und d_1 perspektivisch zu f_1 als Axe, d. h. $a_1 d_1 f_1$ gehen durch einen Punkt, ebenso $b_1 c_1 f$, $a_1 b_1 e_1$, $d_1 c_1 e_1$; daraus folgt:

b′) *In einem vollständigen Vierseit bilden die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Schnittpunkten der Nebenseiten die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks.*

§. 20. Harmonische Punkte und Strahlen im Kreis.

1. Beschreibt man um eine Strecke AA_1 als Durchmesser einen Kreis und wählt zu dessen Grenzpunkten irgend zwei harmonisch zugeordnete Punkte BB_1, so nennt man letztere harmonisch zugeordnete Pole des Kreises.

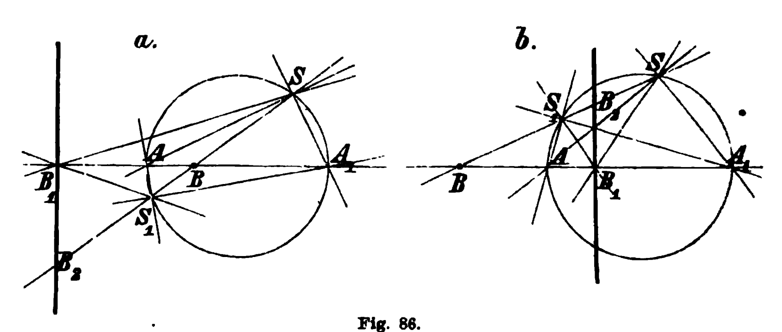


Fig. 86.

Für die zu den vier harmonischen Punkten $AB\ A_1 B_1$ perspektivischen Strahlen eines Scheitels S, der auf der Kreislinie liegt, ist nun $AS \perp SA_1$; somit nach §. 18, 3b $\sphericalangle B_1 SA = ASB$, d. h.:

a) *Die Strahlen von einem Punkt eines Kreises nach den Grenzpunkten eines Durchmessers halbieren die Winkel der Strahlen nach zwei harmonisch zugeordneten Polen des Durchmessers.*

Daher ist:

$$BS : SB_1 = BA : AB_1 \quad (§.\ 17,\ 3a').$$

Fassen wir BB_1 als ursprünglich gegebene Strecke auf, die in A und A_1 harmonisch geteilt ist (§. 18, 1a), so ergiebt sich aus dieser Proportion:

b) *Der geometrische Ort des Punktes, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten ein bestimmtes Verhältnis haben, ist die Kreislinie, von welcher zwei diametrale Punkte den Abstand der ersteren Punkte innen und aufsen in dem gegebenen Verhältnis teilen (Kreis des Apollonius).*

Anmerkung. Ist das Verhältnis gleich 1, so tritt an die Stelle des Kreises die Mittelnormale zu beiden Punkten. Diese ist somit als Grenze aufzufassen, der sich ein Teil des Kreises mehr und mehr nähert, wenn der eine Grenzpunkt des Durchmessers in unendliche Entfernung hinausrückt.

2. Ziehen wir durch B die beliebige Sehne SS_1 so sind im $\triangle\, SB_1S_1$ die Geraden SA und S_1A Winkelhalbierende; daher wird der Winkel SB_1S_1 auch halbiert durch die Verbindungsgerade B_1A (Fig. 86, a) oder deren Normale $B_1B_2 \perp B_1A$ (Fig. 86, b) (§. 16, 3b').

a) *Zieht man durch einen Pol eine Secante, so wird der Winkel der Strahlen des zugeordneten Poles nach den Grenzpunkten der Sehne durch die Verbindungsgerade beider Pole (bezw. deren Normale) halbiert.*

Es sind somit B_1B und B_1B_2 harmonisch zugeordnete Strahlen des Winkels SB_1S_1 und die Schnittpunkte derselben mit SS_1 vier harmonische Punkte SBS_1B_2.

Wir nennen nun die in einem von zwei harmonisch zugeordneten Polen B und B_1 auf deren Verbindungsgeraden errichteten Normale B_1B_2 die Polare des anderen Pols B, letzteren Punkt B den Pol zu jener Normalen B_1B_2. Die abgeleitete Beziehung läfst sich hiernach kurz ausdrücken:

b) *Die Sehnen aller Strahlen eines Punktes werden durch diesen und durch dessen Polare harmonisch geteilt,*

oder da der einem Punkt harmonisch zugeordnete eindeutig bestimmt ist:

c) *Der einem Teilpunkt einer Sehne harmonisch zugeordnete Punkt liegt auf der Polare des Teilpunktes.*

3. Ist B ein Punkt aufserhalb eines Kreises, SS_1 dessen Berührungssehne, AA_1 der Durchmesser auf der Centralen durch B, so ist

$$\sphericalangle BSA = SA_1A = AA_1S_1 = ASB_1,$$

also SB, SB_1, SA, SA_1 sind vier harmonische Strahlen, d. h.:

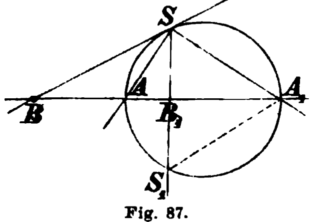


Fig. 87.

a) *Ein Berührungswinkel wird harmonisch geteilt durch die Strahlen nach den Grenzpunkten des zur Sehne normalen Durchmessers* —

woraus dann weiter folgt, dafs B und B_1 harmonisch zugeordnete Pole sind, d. h.:

b) *Die Polare eines Punktes aufserhalb des Kreises ist die Berührungssehne seiner Tangenten.*

b′) *Der Pol zu einer Sehne ist der Schnittpunkt der Tangenten ihrer Grenzpunkte.*

Lassen wir Pol oder Polare sich der Kreislinie nähern, so folgt (vgl. §. 18, 2):

c) *Die Polare eines Punktes der Kreislinie ist dessen Tangente.*

c′) *Der Pol einer Tangente des Kreises ist deren Berührungspunkt.*

Rückt dagegen Pol oder Polare gegen den Mittelpunkt, so rücken deren zugeordnete Elemente weit hinaus. Da einem Punkt oder einer Geraden immer nur ein solches zugeordnetes Element entspricht, so gebraucht man auch für den Mittelpunkt und irgend einen Durchmesser die Redeweise:

d) *Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade der Ebene.*

Alle Durchmesser werden nämlich im Mittelpunkt halbiert; die zugeordneten Punkte sind somit in unendlicher Entfernung.

d′) *Der Pol eines Durchmessers ist der unendlich ferne Punkt der zum Durchmesser normalen Geraden.*

Alle zu dem Durchmesser normalen Sehnen werden nämlich durch diesen halbiert; die zugeordneten Punkte sind also in unendlicher Entfernung.

4. In dem Sehnenviereck $ABCD$ (Fig. 88) werden die Sehnen AB und CD durch den Schnittpunkt Q und die Verbindungsgerade RS der beiden andern Nebenecken harmonisch geteilt (§. 19, 4a); daher ist RS Polare zu Q (2, c); ebenso sind R und QS, S und QR bzw. Pol und Polare. Also gilt:

In jedem Sehnenviereck ist ein Nebeneck der Pol zur Verbindungsgeraden der beiden andern Nebenecken.

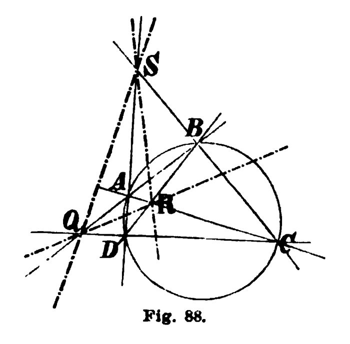


Fig. 88.

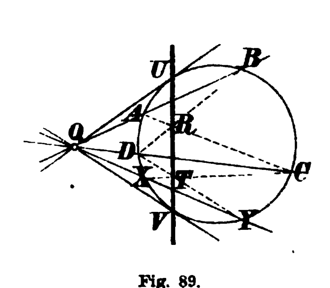


Fig. 89.

Dies kann in Verbindung mit 3b benutzt werden, um die Berührungspunkte der von einem gegebenen Punkt Q aus gehenden Tangenten mit dem Lineal allein zu finden; man zieht QAB und QDC beliebig und konstruiert RS oder (Fig. 89) man zieht noch eine dritte Sekante QXY und konstruiert RT.

5. Sind AB und A_1B_1 zwei Paare zugeordneter Pole, so ist nach §. 18, 8a:

$$MA \cdot MB = r^2 = MA_1 \cdot MB_1.$$

a) *Das Produkt der Entfernungen zweier zugeordneten Pole vom Mittelpunkt ist konstant, gleich dem Quadrat des Radius.*

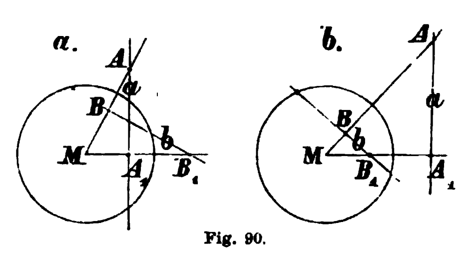


Fig. 90.

Ist hierbei A ein beliebiger Punkt einer Geraden a, B_1 deren Pol, so dafs MA_1B_1 normal zu a, so folgt aus

$$MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1,$$

dafs BB_1 antiparallel AA_1, somit auch $MBB_1 = R$, BB_1 Polare zu A. Es geht also die Polare zu A durch den Pol von a; der Pol zu a liegt auf der Polare zu A.

b) *Die Polare jedes Punktes einer Geraden geht durch den Pol dieser Geraden.*

b′) *Der Pol jedes Strahles eines Punktes liegt auf der Polare des Punktes.*

c) *Der Schnittpunkt der Polaren zweier Punkte ist der Pol ihrer Verbindungsgeraden.*

c′) *Die Verbindungsgerade der Pole zweier Geraden ist Polare zu deren Schnittpunkt.*

d) *Die Polaren zu den Punkten einer Reihe bilden ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Pol zu dem Träger der Punktreihe ist.*

d′) *Die Pole zu den Strahlen eines Büschels bilden eine Punktreihe, deren Träger die Polare zu dem Scheitel des Büschels ist.*

In Verbindung mit 3b heifst dies:

e) *Gleitet ein Punkt auf einer Geraden hin, so dreht sich die Berührungssehne seiner Tangenten um einen Punkt, den Pol der Geraden.*

e′) *Dreht sich eine Sekante um einen Punkt, so gleitet der Schnittpunkt ihrer Tangenten auf einer Geraden hin, der Polare des Punktes.*

6. Diese Sätze begründen eine von der perspektivischen Beziehung verschiedene, eigentümliche Beziehung zwischen Punktgebilden und Geradengebilden: wird in der Ebene einer Figur ein beliebiger Kreis angenommen und zu jedem Punkt derselben die Polare, zu jeder ihrer Geraden der Pol konstruiert, so entsteht die der ersteren Figur entsprechende polare Figur; die letztere entsteht durch Polarisation der ersteren und in gleicher Weise aus der letzteren die erstere, so dafs beide als polar reciproke Figuren bezeichnet werden. Aus bekannten Eigenschaften der polaren Figur lassen sich nun häufig gewisse Eigenschaften der ersteren Figur erweisen. Eine solche polar reciproke Eigenschaft ist nun zunächst die auf die Lage bezügliche (descriptive), dafs einander jeweils Punkte einer Geraden und Strahlen eines Büschels ent-

sprechen. Zu dem Sehnenviereck $ABCD$ ist die polare Figur das Tangentenvierseit $abcd$; den sechs Seiten des ersteren $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ entsprechen polar die sechs Ecken $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ des letzteren (3 b'); den Nebenecken

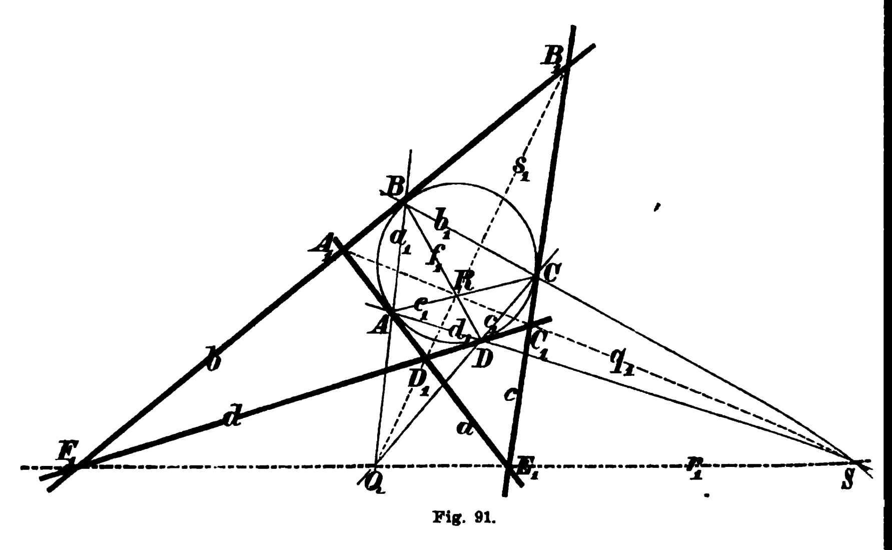


Fig. 91.

Q, R, S des ersteren müssen polar entsprechen die Nebenseiten $q_1 r_1 s_1$ des letzteren (5 d' oder e'); diese müssen daher nach 4 zusammenfallen mit den Verbindungsgeraden der Nebenecken des Sehnenvierecks; m. a. W.

a) *Von einem durch vier Punkte des Kreises bestimmten Sehnenviereck und Tangentenvierseit*

liegen je zwei Nebenecken des ersteren auf einer Nebenseite des letzteren.	*schneiden einander je zwei Nebenseiten des letzteren in einem Nebeneck des ersteren.*

Damit ist auch der dem Satze 4 entsprechende gegeben:

b) *In jedem Tangentenvierseit ist eine Nebenseite die Polare zum Schnittpunkt der andern Nebenseiten.*

c) In gleicher Weise ergiebt sich der Satz von Brianchon aus dem Satz von Pascal. Den Ecken $ABCDEF$ des Tangentensechsseits entsprechen polar die Seiten $abcdef$ des zugehörigen Sehnensechsecks,

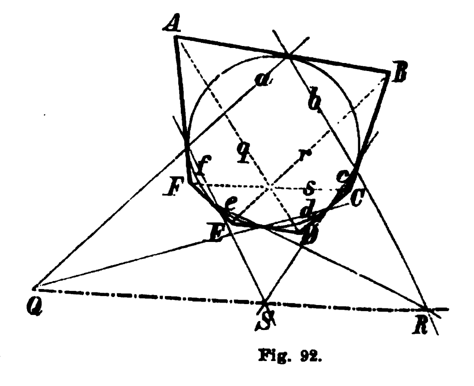


Fig. 92.

den Verbindungsgeraden qrs der Gegenecken des ersteren die Schnitt-

punkte der Gegenseiten des letzteren. Da letztere auf einer Geraden liegen, so müssen erstere durch einen Punkt gehen, den Pol dieser Geraden.

d) Wenn ABC drei Punkte einer Reihe, abc die Strahlen des polar entsprechenden Büschels sind, so liegen die drei Punkte perspektivisch

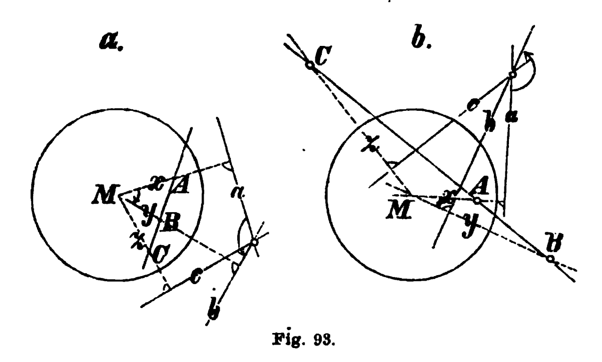


Fig. 93.

zu den vom Mittelpunkt auf die Strahlen normal gezogenen Strahlen xyz und es ist nach §. 16, 1:

$$\frac{AC}{CB} = \left(\frac{xz}{zy}\right) \cdot \frac{AM}{BM}.$$

Werden nun die Winkel der Strahlen abc gegenwendig zu denen von xyz bestimmt, so ergänzen einander die Winkelpaare ab und xy, ac und xz, cb und zy jeweils zu $2R$, so daſs ihre Sinus bezw. dieselben sind. Ist hierbei $\sphericalangle ac < ab$, so muſs $\sphericalangle xz > xy$ sein und umgekehrt; d. h. wird $\sphericalangle ab$ durch c innen geteilt, so wird xy durch z auſsen geteilt und umgekehrt; es ist also

$$\left(\frac{xz}{zy}\right) = -\left(\frac{ac}{cb}\right), \quad \frac{AC}{CB} = -\left(\frac{ac}{cb}\right) \cdot \frac{AM}{MB}.$$

$$\frac{AC}{CB} : \left(\frac{ac}{cb}\right) = -\frac{AM}{BM}.$$

Das Doppelverhältnis einer geteilten Strecke und des polar entsprechenden geteilten Winkels ist entgegengesetzt dem Verhältnis der Abstände beider Punkte vom Kreismittelpunkt.

e) Für einen weiteren Punkt D der Reihe und den dazu polaren Strahl d ist ebenso

$$\frac{AD}{DB} = -\left(\frac{ad}{db}\right) \cdot \frac{AM}{MB}.$$

Somit

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \left(\frac{ac}{cb}\right) : \left(\frac{ad}{db}\right), \quad \text{d. h.:}$$

Der Wert des Doppelverhältnisses einer durch zwei Punkte geteilten Strecke, bezw. eines durch zwei Strahlen geteilten Winkels bleibt bei der Polarisation unverändert.

Daher entsprechen harmonische Punkte und Strahlen einander, da deren Doppelverhältnis $= -1$ ist.

f) Den Ecken ABC eines Dreiecks entsprechen polar die Seiten abc eines Dreiseits, den Schnittpunkten $A_1B_1C_1$ einer Geraden mit den Seiten des Dreiecks die durch einen Punkt gehenden Ecktransversalen $a_1b_1c_1$ des Dreiseits. Nun folgt aus d):

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = -\left(\frac{ac_1}{c_1b}\right)\left(\frac{ba_1}{a_1c}\right)\left(\frac{cb_1}{b_1a}\right), \text{ d. h.:}$$

Das Tripelverhältnis erhält bei der Polarisation den entgegengesetzten Wert.

Somit ergiebt die Polarisation aus dem Satz des Menelaus den von Ceva und umgekehrt.

§. 21. Beliebige Punkte und Strahlen projektivischer Reihen und Büschel.

1. In zwei perspektivischen Punktreihen ist von besonderer Bedeutung der Punkt auf jeder dieser Reihen, welcher auf dem zur anderen Reihe parallelen Strahle liegt, wie R auf $SR \parallel A_1B_1$, Q_1 auf $SQ_1 \parallel AB$. Der Punkt R hat eine solche Lage, daſs die Projektionen der Punkte der Reihe A_1B_1 ihm um so näher kommen, je weiter letztere auf ihrem Träger hinausrücken. Da im übrigen jedem Punkt der einen Reihe ein bestimmter Punkt der andern entspricht, so nennt man jenen Punkt R die Projektion des unendlich fernen Punktes der zweiten Geraden A_1B_1 oder auch den Fluchtpunkt zu dieser Geraden.

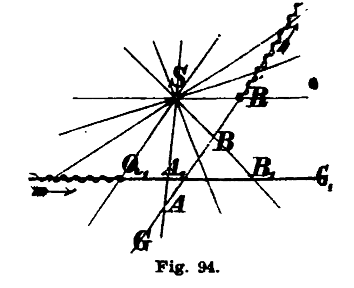


Fig. 94.

Es ergiebt sich aus der Bewegung des projicierenden Strahles, daſs zweien Punkten AB des im Fluchtpunkt R begrenzten Halbstrahls auch zwei solche Punkte A_1B_1 auf einerlei Seite des Fluchtpunkts Q der andern Geraden entsprechen; ferner geht die Richtung A_1B_1 von Q_1 weg, während die von AB auf R zugeht, d. h.:

a) *Es entspricht in zwei projektivischen Punktreihen einer Strecke auf einem Halbstrahl des Fluchtpunkts, deren Richtung vom Fluchtpunkt weggeht, eine Strecke auf einem Halbstrahl des Fluchtpunkts der zweiten Reihe, deren Richtung zum Fluchtpunkt hingeht.*

Für irgend ein entsprechendes Punktpaar A und A_1 ist nun:

$$AR : SR = SQ_1 : A_1Q_1 \quad \text{oder} \quad AR \cdot A_1Q_1 = SR \cdot SQ_1, \quad \text{d. h.:}$$

b) *In zwei projektivischen Punktreihen ist das Produkt der Strecken von den Fluchtpunkten nach zwei entsprechenden Punkten konstant.*

Dies Produkt heifst die Konstante der projektivischen Beziehung*).

2. Sind $ABCD$ vier Punkte einer Reihe, $abcd$ die vier hierzu perspektivischen Strahlen eines Büschels S, so ist (§. 16, 1):

$$\frac{AC}{CB} = \left(\frac{ac}{cb}\right) \cdot \frac{AS}{BS}, \quad \frac{AD}{DB} = \left(\frac{ad}{db}\right) \cdot \frac{AS}{BS}.$$

Somit:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \left(\frac{ac}{cb}\right) : \left(\frac{ad}{db}\right).$$

Das Doppelverhältnis aus den beiden Teilverhältnissen einer in zwei Punkten C und D geteilten Strecke AB, bzw. eines durch zwei Strahlen c und d geteilten Winkels ab bezeichnen wir mit $(ABCD)$, bzw. $(abcd)$.

Es ist also bei projektivischen Gebilden $(ABCD) = (abcd)$.

In einer zweiten Punktreihe $A_1B_1C_1D_1$, welche mit ersterer auf demselben Strahlenbüschel $(abcd)$ liegt, ist ebenfalls

$$(A_1B_1C_1D_1) = (abcd)$$

also

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

In einem zweiten Strahlenbüschel $(a_1b_1c_1d_1)$, welches ersteres in derselben Punktreihe $ABCD$ schneidet, ist ebenfalls

$$(ABCD) = (a_1b_1c_1d_1)$$

also

$$(abcd) = (a_1b_1c_1d_1).$$

Das Doppelverhältnis von zweifach geteilten Strecken oder Winkeln ist in allen projektivisch entsprechenden Gebilden das gleiche.

Zusatz. Dem Werte -1 des Doppelverhältnisses entsprechen harmonische Punkte, bezw. Strahlen (§. 18, 1b). Daher fliefsen aus vorstehendem Satze unmittelbar die Sätze §. 18, 6 und 7.

3. Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

a) *Wenn für Strecken oder Winkel mit je zwei teilenden Elementen die Doppelverhältnisse (nach Zeichen und Gröfse) übereinstimmen, so sind diese Gebilde projektivisch; sie sind perspektivisch, wenn drei entsprechende Elemente perspektivisch liegen.*

Denn drei Elementenpaare, z. B. ABC und $A_1B_1C_1$ lassen sich jedenfalls perspektivisch legen (§. 14, 4 und 5). Die Lage des vierten Elementes D_1 ist aber genau so bestimmt, wie die Lage des zu D perspektivischen Elementes D_2; nämlich für dieses mufs nach 2 sein:

---

*) Den Fluchtpunkten in den Punktreihen entsprechen bei perspektivischen Strahlenbüscheln die Paare von Normalstrahlen $f \perp v$, $f_1 \perp v_1$, deren Axenpunkte man erhält, wenn man durch die Scheitel einen Kreis legt, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt. Es läfst sich nachweisen, dafs $\operatorname{tg} af \cdot \operatorname{tg} a_1v_1$ für alle entsprechenden Strahlen aa_1 einen konstanten Wert hat.

$$AD_2 + D_2B = AB,\ \frac{AD_2}{D_2B} = \frac{AC}{CB} : (abcd)$$

und dieselben Gleichungen bestehen der Annahme nach auch für AD_1 und D_1B. — Aus a) folgt weiter:

b) *Durch drei zugeordnete Elementenpaare ist die projektivische Beziehung zwischen Punktreihen bzw. Strahlenbüscheln vollständig bestimmt: d. h. zu irgend einem vierten Element giebt es nur ein bestimmtes projektivisches.*

c) *Wenn von Punktreihen oder Strahlenbüscheln irgend zwei einem dritten projektivisch sind, so sind sie es auch unter sich.*

Denn da die Doppelverhältnisse von vier zugeordneten Gebilden der ersten beiden mit dem der dritten übereinstimmen, so sind sie untereinander gleich und nach a) die Gebilde projektivisch.

Zusatz. Eine algebraische Umformung zeigt, dafs

$$(ABCD) = (DCBA) = (CDAB) = (BADC),$$

d. h.: das Doppelverhältnis bleibt unverändert: 1) bei der Umkehrung der Ordnung aller Elemente; 2) bei der Vertauschung der teilenden mit den begrenzenden Elementen; 3) bei der Vertauschung der teilenden Elemente unter sich und ebenso der begrenzenden.

Dem entsprechend lassen sich für zwei gleiche Doppelverhältnisse zweier Gruppen von Punkten oder Strahlen auch verschiedene projektivische Zuordnungen der einzelnen Elemente aufstellen.

Zwischen vier Elementen bestehen 24 Doppelverhältnisse, unter welchen je vier übereinstimmen und zu jedem ein reciproker Wert sich findet.

4. Die Aufgabe a): *Zu einem Teilpunkt C einer Strecke AB und einem gegebenen Doppelverhältnis: $(ABCD) = q : r$ den zweiten Teilpunkt D zu bestimmen,* ist entsprechend §. 18, 5 zu lösen, indem man beachtet, dafs für eine Projektion der vier Punkte auf eine Parallele zu SD, in welcher die Projektion von D in unendliche Entfernung rückt, das Doppelverhältnis $(A_1B_1C_1D_{1\infty}) = q : r$ sein mufs, wobei jedoch $\frac{A_1D_{1\infty}}{D_{1\infty}B_1} = -1$ ist (§. 2, 3b), so dafs dann $\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = -\frac{q}{r}$. Die Konstruktionen unterscheiden sich daher von den in §. 18, 5 angedeuteten (Figur 73) nur durch das Antragen ungleicher Strecken $A_1C_1 = q$, $C_1B_1 = -r$, statt gleicher Strecken.

Fig. 95.

Die Aufgabe b): *Zu einem Teilstrahl b eines Winkels ac und einem gegebenen Doppelverhältnis $(abcd) = q : r$ den zweiten Teilstrahl d zu bestimmen,* kann mittelst einer Transversalen auf die vorhergehende zurückgeführt werden. Oder (Fig. 95) man trägt auf b

$SQ = q$, $SR = r$ (auch mit Berücksichtigung der Zeichen von q und r), zieht zwischen b und c $QQ_1 \parallel a$ und ferner $RR_1 \parallel a$, dann $Q_1R_1 \parallel b$, so ist SR_1 der fragliche Strahl d.

Es ist nämlich nach §. 15, 1:

$$\left(\frac{ac}{cb}\right) : \left(\frac{ad}{db}\right) = \frac{S_1Q_1}{Q_1Q} : \frac{S_1R_1}{R_1R} = \frac{S_1Q_1}{S_1R_1} = \frac{q}{r}.$$

5. Aufgabe. *Es sind drei Elementenpaare von projektivischen Punktreihen oder Strahlenbüscheln in nicht perspektivischer Lage gegeben; es soll zu einem beliebigen vierten Element das projektivische bestimmt werden.*

a) Ist $ABC \barwedge A_1B_1C_1$, so nimmt man auf der Verbindungsgeraden AA_1 (a) die Punkte S und S_1 als Scheitel der Büschel abc $\mathfrak{p}$.

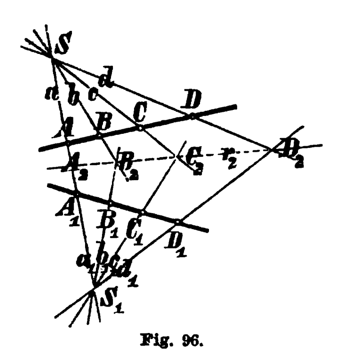


Fig. 96.

ABC, $a_1b_1c_1$ $\mathfrak{p}$. $A_1B_1C_1$. Nun ist abc $\mathfrak{p}$. $a_1b_1c_1$ (§. 14, 5') und die Axe r_2 derselben ergiebt eine mit ABC und $A_1B_1C_1$ perspektivische Punktreihe $A_2B_2C_2$, so dafs zu einem Punkt D leicht D_2 und dann D_1 zu finden ist.

a') Ist $abc \barwedge a_1b_1c_1$, so zieht man durch den Schnittpunkt aa_1 (A) die Geraden r und r_1 als Träger der Punktreihen ABC $\mathfrak{p}$. abc; AB_1C_1

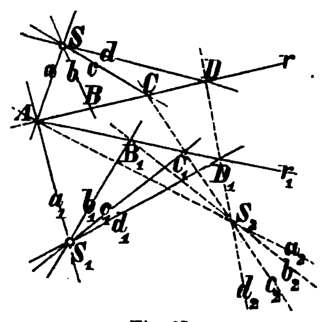


Fig. 97.

$\mathfrak{p}$. $a_1b_1c_1$. Nun ist ABC $\mathfrak{p}$. AB_1C_1 (§. 14, 5) und der Scheitel S_2 derselben ergiebt einen mit abc und $a_1b_1c_1$ perspektivischen Büschel $a_2b_2c_2$, so dafs zu einem Strahl d leicht d_2 und dann d_1 zu finden.

b) Ist $ABC \barwedge abc$ gegeben, so läfst sich die Konstruktion von $ABCD \barwedge abcd$ auf eine der beiden voranstehenden Arten lösen, mit Hilfe von $A_1B_1C_1$ $\mathfrak{p}$. abc, bzw. $a_1b_1c_1$ $\mathfrak{p}$. ABC.

Zusatz zu a. Die Scheitel S und S_1 können im besonderen auch nach A_1 und A verlegt werden. Alsdann mufs die Axe x durch die Punkte E_1F gehen, welche dem Schnittpunkt EF_1 entsprechen, da r der Strahl von A nach F_1, r_1 von A_1 nach E ist. In gleicher Weise mufs dies der Fall

Zusatz zu a'. Die Träger r und r_1 können im besonderen auch nach a_1 und a verlegt werden. Alsdann mufs der Scheitel X in dem Schnittpunkt der Strahlen e_1f liegen, welche dem Scheitelstrahl f_1e entsprechen, indem XS dem Strahl S_1S, XS_1 dem SS_1 projektivisch entspricht. Derselbe Schnitt-

sein, wenn B und B_1 statt A und A_1 als Scheitel angenommen werden.

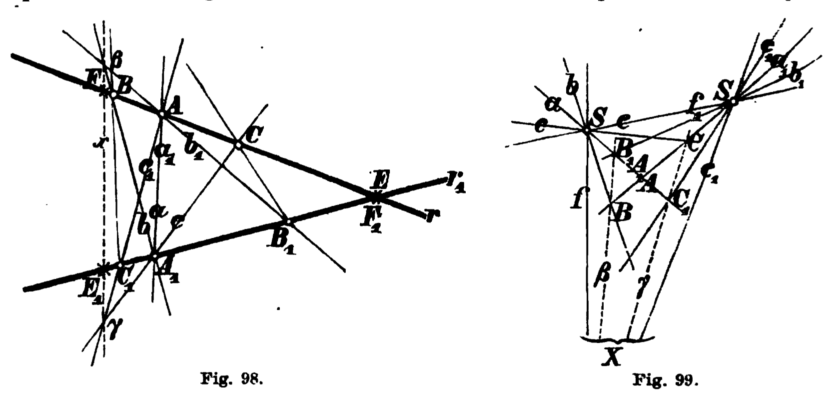


Fig. 98. Fig. 99.

Die entsprechenden Strahlen BC_1 und B_1C schneiden daher einander ebenfalls auf der Axe x.

punkt muſs aber auch Scheitel sein, wenn b und b_1 statt a und a_1 als Träger angenommen werden. Die einander entsprechenden Schnittpunkte bc_1 und b_1c müssen daher auf einem Strahl durch S_2 liegen.

Hieraus folgen die Sätze §. 14, 5, Zusatz.

6. In der vorigen Aufgabe 5a können wir auch, wenn durch entsprechende Punktpaare die Verbindungsgeraden AA_1, BB_1, CC_1 gelegt sind, die Schnittpunkte zweier derselben mit der dritten, z. B. S und S_1, als Scheitel der beiden per-

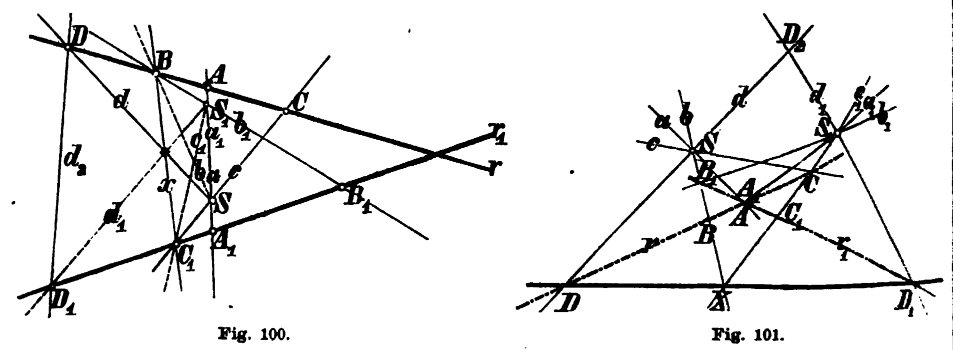


Fig. 100. Fig. 101.

spektivischen Büschel annehmen: abc ꝑ. ABC und $a_1b_1c_1$ ꝑ. $A_1B_1C_1$, so daſs nun die Verbindungsgerade von bb_1 (B) mit cc_1 (C_1) sich als Axe x ergiebt. Alsdann muſs $ABCD$

6′. In der vorigen Aufgabe 5a′ können wir auch, wenn von entsprechenden Strahlenpaaren die Schnittpunkte aa_1, bb_1, cc_1, bestimmt sind, die Verbindungsgeraden zweier derselben mit dem dritten, z. B. r und r_1, als Träger der beiden perspektivischen Punktreihen annehmen: ABC ꝑ. abc und $A_1B_1C_1$ ꝑ. $a_1b_1c_1$, so daſs nun der Schnittpunkt von BB_1 (b) und CC_1 (c) sich als Scheitel X ergiebt. Als-

$\mathfrak{p}$. $abcd$ und $A_1B_1C_1D_1$ $\mathfrak{p}$. $a_1b_1c_1d_1$ und somit $abcd \barwedge a_1b_1c_1d_1$ sein. Da nun abc $\mathfrak{p}$. $a_1b_1c_1$ zu x als Axe, so mufs auch der Schnittpunkt von d und d_1 auf x liegen. — Bezeichnen wir DD_1 mit d_2, so ist $ab_1rd_2r_1c$ $(SS_1BDD_1C_1)$ ein Brianchon'sches Sechsseit. Wir folgern also:

dann mufs $abcd$ $\mathfrak{p}$. $ABCD$, $a_1b_1c_1d_1$ $\mathfrak{p}$. $A_1B_1C_1D_1$, somit $ABCD \barwedge A_1B_1C_1D_1$ sein. Da nun ABC $\mathfrak{p}$. $A_1B_1C_1$ zu X als Scheitel ist, so mufs auch die Verbindungsgerade von D und D_1 durch X gehen. — Bezeichnen wir dd_1 mit D_2, so ist $AB_1SD_2S_1C$ ein Pascal'sches Sechseck. Wir folgern also:

a) *Die beiden Träger zweier projektivischen Punktreihen bestimmen mit vier Verbindungsgeraden entsprechender Punkte Brianchon'sche Sechsseite,*

a') *Die beiden Scheitel zweier projektivischen Strahlenbüschel bestimmen mit vier Schnittpunkten entsprechender Strahlen Pascal'sche Sechsecke,*

und umgekehrt folgt:

b) *In einem Brianchon'schen Sechsseit sind die Schnittpunkte von vier Seiten mit den beiden übrigen Seiten Punkte projektivischer Reihen.*

b') *In einem Pascal'schen Sechseck sind die Verbindungsgeraden von vier Ecken mit den beiden übrigen Ecken Strahlen projektivischer Büschel.*

7. Auch die Punkte und Tangenten des Kreises führen auf projektivische Strahlenbüschel und Punktreihen. Nach I. Teil, §. 34, 8a′ können zwei Punkte der Kreislinie als Scheitel kongruenter gleichwendiger Strahlenbüschel gewählt werden, deren entsprechende Strahlen einander auf der Kreislinie schneiden. Kongruente Strahlenbüschel sind aber natürlich projektivisch; sie sind bei der Deckung perspektivisch. Wählen wir nun zwei Tangenten g und g_1 als Träger zweier Punktreihen, deren entsprechende Punkte AA_1, BB_1 je auf einer Tangente a, b des Kreises liegen und sind E und F_1, A_2, B_2 ... die Berührungspunkte von g, g_1, a, b, ..., so ist der Strahlenbüschel $E(A_2B_2\ldots) \barwedge F_1(A_2B_2\ldots)$; ferner ist $E(A_2B_2\ldots) \barwedge M(AB\ldots)$, da ihre Strahlen paarweise aufeinander normal, $EA_2 \perp MA$, also die Büschel kongruent sind. Aus demselben Grund ist $F_1(A_2B_2\ldots) \barwedge M(A_1B_1\ldots)$, somit schliefslich auch $M(AB\ldots) \barwedge M(A_1B_1\ldots)$, $AB\ldots \barwedge A_1B_1\ldots$

Fig. 102.

(Es folgt dies übrigens auch einfach aus §. 17, 5′ und §. 21, 6b.)

Die Verbindungsgeraden von zwei Punkten eines Kreises nach beliebigen Punkten desselben bilden zwei pro-

Die Schnittpunkte zweier Tangenten eines Kreises mit beliebigen andern Tangenten desselben bilden

jektivische (kongruente gleichwendige) Strahlenbüschel. — Der Tangente eines Scheitels entspricht der Scheitelstrahl.

zwei projektivische Punktreihen. — Dem Berührungspunkt eines Trägers entspricht der Schnittpunkt der beiden Träger.

Aus diesen Sätzen folgen auch in Verbindung mit 6a und a' die Sätze von Pascal und Brianchon als für den Kreis gültig.

Zusatz. In der Punktreihe $AB\ldots$ erhält man den Fluchtpunkt R durch die Tangente parallel g_1, und es läfst sich leicht erweisen, dafs die Konstante der projektivischen Beziehung $= ER \cdot FR = MR^2$ ist.

8. Wir fassen nun noch den Fall ins Auge, dafs zwei perspektivische Punktreihen auf einer einzigen Geraden liegen (bzw. dafs zwei projektivische Büschel denselben Scheitel haben, konjektivische Gebilde). — Zwei projektivische Punktreihen auf einer Geraden heifsen gleichgerichtet, wenn der Richtung einer Strecke auf einem Halbstrahl des Fluchtpunkts in der einen Reihe eine gleiche Richtung der projektivischen Strecke in der andern Reihe entspricht; im entgegengesetzten Fall heifsen die Punktreihen gegengerichtet. Da der Annäherung an den Fluchtpunkt in der einen Reihe eine Entfernung in der andern Reihe entspricht (1a), so entsprechen einander im ersten Fall die Halbstrahlen der Fluchtpunkte nach entgegengesetzten Richtungen, in letzterem die nach einerlei Richtung.

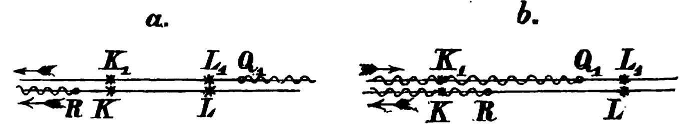


Fig. 103.

Im ersteren Fall (Fig. 103a) können daher zwei einander entsprechende Punkte K und K_1*) in einen zusammenfallen, in einen sogenannten Doppelpunkt zwischen den beiden Fluchtpunkten R und Q_1; in letzterem Fall (Fig. 103b) müssen aber aufserhalb RQ_1 zwei entsprechende Punkte KK_1 und ebenso LL_1 zusammenfallen. Die Lage eines solchen Doppelpunktes ist (nach 1) bestimmt durch $RK \cdot KQ_1 = \pm \varepsilon^2$. Im ersten Fall giebt es, je nach dem $\varepsilon \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right. \frac{RQ_1}{2}$ ist, 2, 1, 0 Doppelpunkte, in letzterem Fall stets zwei Doppelpunkte.

Entsprechendes gilt für projektivische Strahlenbüschel mit einem gemeinschaftlichen Scheitel, da irgend eine Gerade durch sie zwei projektivische Punktreihen ergiebt. — Es gilt also der Satz:

a) *Zwei konjektivische Gebilde haben höchstens zwei Doppelelemente.*

---

*) In den Figuren sind beide Punktreihen noch durch einen kleinen Abstand getrennt, um sie besser zu unterscheiden.

b) *In konjektivischen Punktreihen liegen die Doppelelemente stets diametral zur Mitte der beiden Fluchtpunkte.*

9. Wenn die projektivischen Reihen auf einem Träger liegen und im besonderen ihre Fluchtpunkte R und Q_1 zusammenfallen, so bilden sie eine involutorische Reihe. Der Fluchtpunkt M heifst Mittelpunkt der Involution. Der zu einer involutorischen Reihe perspektivische Büschel heifst ein involutorischer Büschel*).

Nach 1b gilt für entsprechende Punkte A und A_1 einer involutorischen Reihe die Gleichung $MA \cdot MA_1 = \pm \varepsilon^2$ (Potenz der Involution). Wird daher A als ein Punkt der zweiten Reihe aufgefafst, so entspricht ihm A_1 als ein Punkt der ersten Reihe, was man durch den Satz ausdrückt:

a) *Wenn in einem involutorischen Gebilde zwei Elemente einander als zweien projektivischen Gebilden zugeordnet entsprechen, so entsprechen sie einander auch bei Vertauschung der Zuordnung zu diesen Gebilden, kurz alle Elementenpaare entsprechen einander in doppelter Zuordnung.*

Es seien nun umgekehrt auf einem Träger zwei projektivische Reihen vorhanden, von welchen ein Elementenpaar A und A_1 mit einem Elementenpaar B_1 und B zusammenfällt, nämlich B_1 auf A, B auf A_1; es sei ferner R der Punkt der Reihe $AB\ldots$, welcher dem unendlich fernen Punkt der Reihe $A_1B_1\ldots$ entspricht, während dem Punkt R, als Punkt der Reihe $A_1B_1\ldots$ aufgefafst, der Punkt Q in der Reihe $AB\ldots$ entspreche. Alsdann ist:

$$\frac{AQ}{QB} : \frac{AR}{RB} = \frac{A_1R}{RB_1} : \frac{A_1R_{1\infty}}{R_{1\infty}B} \text{ und da } \frac{A_1R_{1\infty}}{R_{1\infty}B} = -1,$$

ferner

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{A_1R}{RB_1} = \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BR}{RA} = 1$$

so ist $\frac{AQ}{QB} = -1$, d. h. Q ist der unendlich ferne Punkt der Reihe AB und ihm entspricht R als Punkt der zweiten Reihe; beide Fluchtpunkte sind in R vereinigt, d. h.:

b) *Zwei projektivische Gebilde eines Trägers bilden ein involutorisches Gebilde, sobald zwei Elemente einander in doppelter Zuordnung entsprechen.*

Bestimmt man nun ein zu einem involutorischen Gebilde projektivisches, so entsprechen einander in letzterem zwei Elemente projektivisch in doppelter Zuordnung, da dies nach a) in ersterem Gebilde der Fall ist; daher ist nach b) auch dieses Gebilde ein involutorisches, d. h.:

c) *Jedes zu einem involutorischen Gebilde projektivische Gebilde ist ebenfalls ein involutorisches.*

---

*) Ein involutorischer Büschel entsteht unabhängig von einer solchen Reihe, durch die Vereinigung zweier projektivischer Büschel mit gemeinsamem Scheitel, in welchem je ein Normalstrahl des einen (siehe die Note zu §. 21, 1) mit dem ihm nicht entsprechenden Normalstrahl des andern Büschels zusammenfällt.

Sind in einer involutorischen Reihe die beiden projektivischen Punktreihen gleichgerichtet, so liegen zwei entsprechende Punkte auf den Gegenstrahlen des Mittelpunkts (elliptische Involution); es können daher keine Doppelpunkte (sich selbst entsprechende Punkte) vorkommen. Sind die Punktreihen gegengerichtet, so liegen zwei entsprechende Punkte stets auf einerlei Halbstrahl des Mittelstrahls (hyperbolische Involution) und es ist für die beiden Doppelpunkte K und L

$$MA \cdot MA_1 = MK^2 = ML^2,$$

woraus nach §. 18, 8a folgt:

d) *In einem hyperbolischen involutorischen Gebilde werden die Doppelelemente durch jedes Paar entsprechender Elemente harmonisch getrennt.*

Siebentes Kapitel.

Perspektivische Figuren der Ebene.

§. 22. Perspektivische Beziehungen geradliniger Figuren.

1. Die perspektivische Lage der Figuren einer Ebene ist (nach §. 4) folgendermaſsen bestimmt:

Jedem Punkt entspricht ein Punkt der Art, daſs die Verbindungsgeraden perspektivisch entsprechender Punkte einander in einem Punkt, dem Projektionscentrum schneiden, und

jeder Geraden entspricht eine Gerade der Art, daſs die Schnittpunkte perspektivisch entsprechender Geraden auf einer Geraden, der Projektionsaxe liegen.

Diese Verbindungsstrahlen heiſsen Projektionsstrahlen, diese Schnittpunkte Axenpunkte.

Zwei Figuren heiſsen projektivisch ($\barwedge$), wenn sie perspektivisch gelegt werden können.

Zwei Dreiecke oder Dreiseite sind perspektivisch, von welchen ein Paar Ecken in einem Punkt, bzw. ein Paar Seiten auf einer Geraden liegen. Da sich diese Figuren stets so legen lassen, so folgt:

Zwei Dreiecke oder Dreiseite sind projektivisch.

2. Werden auf drei Strahlen $s_1 s_2 s_3$ eines Büschels S Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1 beliebig angenommen, so sind dadurch perspektivische Dreiecke ABC p. $A_1B_1C_1$ bestimmt; schneiden einander die Seiten AB und A_1B_1 in S_3, AC und A_1C_1 in S_2, BC und B_1C_1 in S_1, so ist $S_1S_2S_3$ eine Gerade. Wird

2'. Werden durch drei Punkte $S_1S_2S_3$ einer Geraden s Strahlenpaare aa_1, bb_1, cc_1 beliebig gezogen, so sind dadurch perspektivische Dreiseite abc p. $a_1b_1c_1$ bestimmt; verbinden wir die Schnittpunkte ab und a_1b_1 durch s_3, ac und a_1c_1 durch s_2, bc und b_1c_1 durch s_1, so gehen $s_1s_2s_3$ durch

nämlich S_2S_3 von s_1, s_2, s_3 in X_1, X_2, X_3 geschnitten, so ist $s_1\,(SAA_1X_1)$ 𝔭. $s_2\,(SBB_1X_2)$ zu S_3 als Centrum und $s_1\,(SAA_1X_1)$ 𝔭. $s_3\,(SCC_1X_3)$ zu S_2 als Scheitel. Hieraus folgt, daſs $s_2\,(SBB_1X_2)$ $\barwedge$ $s_3\,(SCC_1X_3)$ und da drei Elementenpaare SBB_1 und SCC_1 zu S_1 als Scheitel perspektivisch sind,

einen Punkt. Wird nämlich der Schnittpunkt s_2s_3 mit S_1, S_2, S_3 durch x_1, x_2, x_3 verbunden, so ist $S_1(saa_1x_1)$ 𝔭. $S_2(sbb_1x_2)$ zu s_3 als Axe und $S_1(saa_1x_1)$ 𝔭. $S_3(scc_1x_3)$ zu s_2 als Axe. Hieraus folgt, daſs $S_2\,(sbb_1x_2)$ $\barwedge$ $S_3\,(scc_1x_3)$ und da drei Elementenpaare sbb_1 und scc_1 zu s_1 als Axe perspekti-

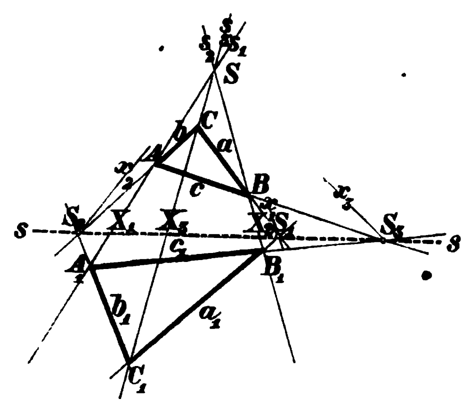


Fig. 104.

so liegt auch (§. 21, 3a) X_2X_3 auf einer Geraden durch S_1, d. h. $S_1S_2S_3$ ist eine Gerade, die Projektionsaxe s.

visch sind, so liegt auch (§. 21, 3a) der Schnittpunkt x_2x_3 auf der Geraden s_1, d. h. $s_1s_2s_3$ gehen durch einen Punkt, das Projektionscentrum S.

Je zwei Punkte auf drei Strahlen eines Punktes bestimmen perspektivische Dreiecke (deren Seiten einander paarweise auf einer Geraden schneiden).

Je zwei Strahlen von drei Punkten einer Geraden bestimmen perspektivische Dreiseite (deren Ecken paarweise durch die Strahlen eines Punktes verbunden werden).

Zum Beweise des ersten Satzes kann auch auf das eine Dreieck ABC der Satz von Menelaus mit den Seiten des andern Dreiecks als Transversalen dreifach angewendet werden und der Satz des Ceva in Bezug auf den Schnittpunkt S der Ecktransversalen, woraus sich dann $S_1S_2S_3$ als Punkte einer Transversale zu ABC ergeben (nach §. 17, 2). Ähnlich läſst sich auch der zweite Satz ableiten. — Dieser ergiebt sich übrigens auch aus dem ersten, wenn man die Ecken der Dreiecke BS_1B_1 und AS_2A_1 als paarweise auf den Strahlen $S_3\,(csc_1)$ liegend auffaſst, so daſs dann die Schnittpunkte CC_1S der Seiten dieser Dreiecke auf einer Geraden liegen müssen.

Zusatz. Aus besonderen Fällen dieser Figuren ergeben sich die Sätze:

a) *Die durch einen Punkt gehenden Ecktransversalen eines Dreiecks schneiden die Seiten des letzteren in drei Ecken eines mit ersteren perspektivischen Dreiecks (dessen Seiten die des ersteren in drei Punkten einer Geraden schneiden).*

a′) *Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Seiten eines Dreiseits bestimmen durch ihre Verbindungsgeraden mit den Ecken des letzteren drei Seiten eines mit ersterem perspektivischen Dreiseits (dessen Ecken mit denen des ersteren auf drei Strahlen eines Punkts liegen).*

Auch diese Sätze können aus §. 17, 1 und 2, bzw. 1′ und 2′ abgeleitet werden.

3. An perspektivische Punkte, Gerade, Dreiecke lassen sich nun

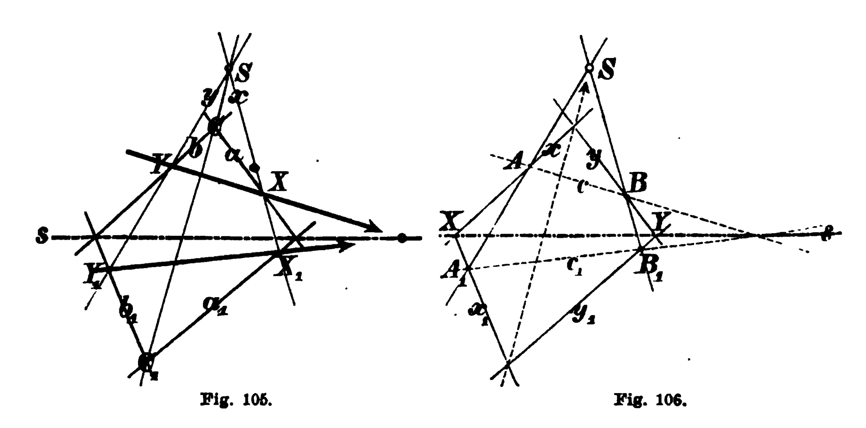


Fig. 105. Fig. 106.

weitere entsprechende Gebilde anreihen. Es sei S das Projektionscentrum, s die Projektionsaxe.

Schneidet man ein perspektivisches Geradenpaar aa_1 durch irgend einen Projektionsstrahl x in X und X_1, ein zweites Geradenpaar b und b_1 durch einen zweiten Strahl y in Y und Y_1, so ist nach 2 CXY 𝔭. $C_1X_1Y_1$ zu S als Centrum und der Verbindungsgerade des Schnittpunkts aa_1 mit bb_1 als Axe, d. h. auch XY und X_1Y_1 schneiden einander auf der Axe.

Zieht man durch ein perspektivisches Punktpaar A und A_1 die Geraden x und x_1 nach einem Axenpunkt X und ebenso durch ein zweites Punktpaar B und B_1 die Geraden y und y_1 nach Y, so ist nach 2′ cxy 𝔭. $c_1x_1y_1$ zu s als Axe und dem Schnittpunkt von AA_1 mit BB_1 als Centrum, d. h. auch die Schnittpunkte xy und x_1y_1 liegen auf einem Strahl durch das Centrum.

In perspektivischen Figuren ergeben sich als weitere entsprechende Gebilde:

a) *die Schnittpunkte perspektivischer Geraden mit einem Projektionsstrahl;*

a') *die Verbindungsgeraden perspektivischer Punkte mit einem Axenpunkt;*

b) *die Verbindungsgerade zweier Punkte der einen Figur und die der perspektivischen Punkte der zweiten (sie schneiden einander auf der Axe).*

b') *der Schnittpunkt zweier Geraden der einen Figur und der von den perspektivischen Geraden der zweiten (sie liegen auf einem Projektionsstrahl).*

Insbesondere folgt hieraus:

c) *Das Centrum und auch jeder Punkt der Axe entspricht sich selbst.*

c') *Die Axe und auch jeder Projektionsstrahl entspricht sich selbst.*

Nach diesen Sätzen kann zu jedem Punkte und zu jeder Geraden, welche einer von zwei perspektivischen Figuren zugeordnet wird, das perspektivische Gebilde gefunden werden. Die perspektivische Beziehung der Gebilde einer Ebene (vgl. Bem. §. 4, 2) ist eindeutig bestimmt, wenn gegeben ist das Centrum, die Axe und ein Paar entsprechender Punkte oder | ein Paar entsprechender Geraden.

4. Jedem Punkt einer Geraden a entspricht in der perspektivischen Figur ebenfalls ein Punkt einer Geraden a_1; nur für den Punkt A' auf dem Projektionsstrahl $SA' \parallel a_1$ ist auf a_1 kein Punkt in endlicher Entfernung anzugeben, sondern nur auszusagen, daſs die Projektionen der Punkte von a auf der Geraden a_1 in um so gröſsere Entfernung fallen, je näher erstere dem Punkte A' rücken (§. 21, 1); A' ist die Projektion des unendlich fernen Punktes von a_1 oder der Fluchtpunkt von a zu a_1.

Ist ebenso B' der Fluchtpunkt von b zu b_1, sind ferner C und C_1 die Schnittpunkte der Geradenpaare ab und a_1b_1, A_0 und B_0 die Axenpunkte derselben, so ist $\triangle SA'B'$ p. ä. $C_1A_0B_0$ zu C als Ähnlichkeitspunkt (§. 11, 2), da $A'CA_0 \backsim SCC_1 \backsim B'CB_0$. Daher ist auch $A'B' \parallel B_0A_0$, d. h. der zweite Fluchtpunkt B' liegt auf der Geraden, welche durch den ersten Fluchtpunkt A' parallel zur Axe gezogen ist; daraus folgt:

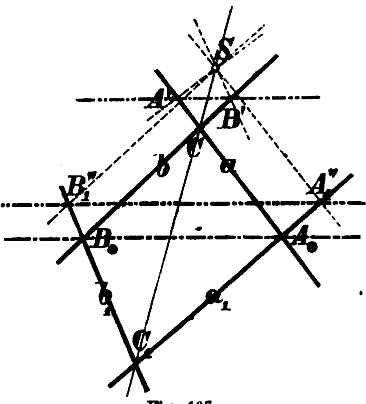


Fig. 107.

a) *Die Fluchtpunkte zu allen Geraden der einen von zwei perspektivischen Figuren liegen auf einer Geraden, die parallel zur Axe ist.*

Diese heiſst die Fluchtgerade der andern Figur oder auch die

Projektion der unendlich fernen Geraden der ersteren Figur, da ihr die Projektionen der Geraden dieser Figur um so näher kommen, je weiter diese Geraden mit allen ihren Punkten hinausrücken.

Ebenso ergiebt sich die Fluchtgerade $A_1''B_1''$, welche der Figur $a_1 b_1$ angehört und die Fluchtpunkte zu den Geraden ab enthält. Da dann $A_0 A' S A_1''$ ein Parallelogramm, so ist leicht zu erkennen, daſs der Abstand des Punktes A_0 von $A_1''B_1''$ der gleiche ist, wie der des Punktes S von $A'B'$.

b) *Der Abstand zwischen einer Fluchtgeraden und der Axe ist gleich dem Abstand des Centrums von der andern Fluchtgeraden.*

5. Zu parallelen Geraden der einen Figur (Fig. 108) $c_1 \parallel a_1$ gehört in der andern Figur nur ein Fluchtpunkt A', da $SA' \parallel a_1 \parallel c_1$; statt „Fluchtpunkt zu einer Geraden" sagt man daher auch „Fluchtpunkt zu einer Richtung", da zu allen Parallelen derselbe Fluchtpunkt gehört. Parallele Gerade $a_1 c_1$ werden nun als solche ac projiziert, die einander auf der Fluchtgeraden schneiden. Umgekehrt müssen die Projektionen zweier Geraden bd, die einander auf der Fluchtgeraden in B' schneiden, parallel SB', somit untereinander parallel sein, $b_1 \parallel d_1$.

In perspektivischen Figuren entsprechen einander parallele Geraden der einen Figur und Strahlen eines Fluchtpunktes der andern Figur.

6. Die perspektivische Beziehung der Figuren einer Ebene ist nun auch z. B. bestimmt durch das Centrum S, die Fluchtgerade f und ein Paar entsprechender Punkte bzw. einen Axenpunkt. — Betrachten wir nun in einem vollständigen Viereck zwei Nebenecken als Fluchtpunkte, bzw. in einem vollständigen Vierseit $abcd$ eine Nebenseite $A'B'$ als Fluchtgerade, so ist die perspektivische Figur ein Parallelogramm $a_1 b_1 c_1 d_1$. Da in diesem die Diagonalen einander halbieren, so ergeben sich nun wieder aus §. 18, 4a die Sätze des §. 19. Auf diese Weise lassen sich Eigenschaften einer Figur (z. B. Figur 65, 66, 84, 85) nachweisen, indem man eine solche Projektion derselben ins Auge faſst, in welcher alle Strahlen von Punkten einer Geraden als Parallelstrahlen erscheinen.

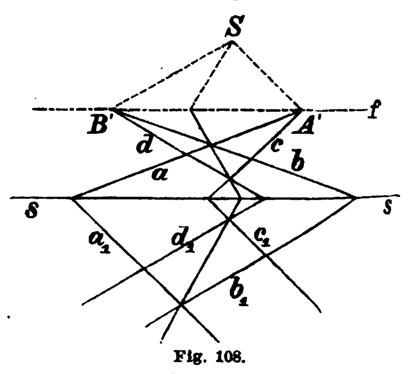


Fig. 108.

§. 23. Perspektivische Beziehungen der Kreise.

A. Ein Kreis.

1. Zieht man von irgend einem Punkt S Sekanten durch einen Kreis, welche diesen in AA_1, BB_1 treffen, so schneiden einander die

Verbindungsgeraden AB und A_1B_1 auf der Polare zu S (§. 20, 4); ebenso die Tangenten in AA_1 und BB_1 (§. 20, 4e′). Daher lassen sich die Kreisteile gegenseitig als perspektivisch entsprechend auffassen:

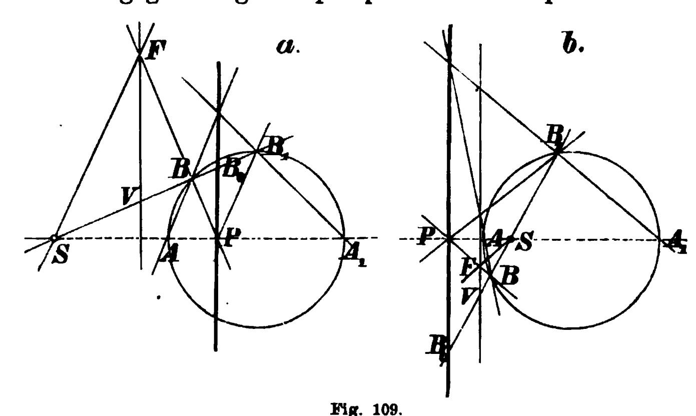


Fig. 109.

Die Punkte und Tangenten eines Kreises liegen paarweise perspektivisch in Bezug auf

a) *einen beliebigen Punkt als Centrum und dessen Polare als Axe.*

a′) *eine beliebige Gerade als Axe und deren Pol als Centrum.*

Es entsprechen einander die Bogen, welche zu perspektivischen Sehnen gehören.

Zusatz. Liegt das Centrum im Mittelpunkt, so sind die entsprechenden Teile diametral (vgl. §. 12, 1); rückt es auf einem Durchmesser in unendliche Entfernung, so sind die entsprechenden Bogen symmetrisch zu dem Durchmesser als Axe, welcher auf ersterem Durchmesser normal ist.

2. Ist P der zugeordnete Pol zu S, so ist PB_1 𝔭. PB und der Projektionsstrahl $SF \parallel PB_1$ trifft PB im Fluchtpunkt F. Nach §. 20, 2a bildet PS gleiche Winkel mit PB und PB_1, von welchen der letztere mit $\sphericalangle FSP$ übereinstimmt, da $PB_1 \parallel SF$; somit ist $\sphericalangle FSP = FPS$, woraus folgt, dafs die Fluchtgerade Mittelnormale zu PS ist. — Die zweite Fluchtgerade fällt daher nach §. 22, 4b mit der ersten zusammen

a) *Bei der Projektion eines Kreises in sich selbst halbiert die Fluchtgerade den Abstand zwischen Centrum und Axe.*

Trifft SBB_1 die Axe in B_0, die Fluchtgerade in V, so ist V die Mitte von SB_0 und da die Punkte SB_0 die Sehne BB_1 harmonisch teilen, so folgt $VS^2 = VB \cdot VB_1 = -BV \cdot VB_1$.

b) *Die Potenz irgend eines Punktes dieser Fluchtgeraden ist entgegengesetzt dem Quadrat seines Abstands vom Centrum.*

Man nennt diese Gerade auch Potenzgerade zwischen dem Punkt S und dem Kreis.

B. Zwei Kreise.

3. Es sei S ein Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise, dessen zugeordnete Pole P und P_1 p. ä. sind, da für ihre Abstände von den Mittelpunkten M und M_1 aus §. 20, 5a folgt: $MP : M_1P_1 = r : r_1$

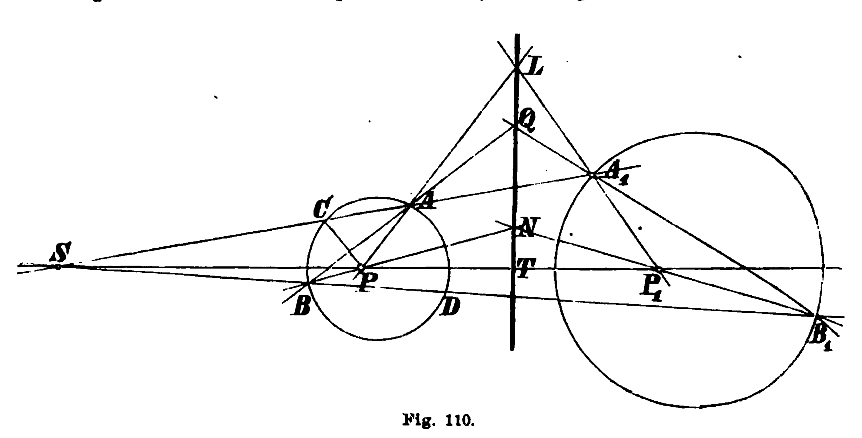


Fig. 110.

(§. 11, 5, d). A und A_1 seien nicht perspektivisch ähnlich liegende, sogenannte **inverse Punkte** eines Ähnlichkeitsstrahles, C und A_1 p. ä. Punkte; alsdann ist $\sphericalangle CPS = A_1P_1S$ (§. 11, 5b) und $\sphericalangle CPS = APP_1$ (§. 20 2a), somit $\sphericalangle APP_1 = A_1P_1P$; AP und A_1P_1 schneiden einander in L auf der Mittelnormale zu PP_1. Das Gleiche gilt für den Schnittpunkt N der Verbindungsgeraden von P bzw. P_1 mit einem zweiten Paar inverser Punkte B und B_1. Da nun APB und $A_1P_1B_1$ auf drei Strahlen durch S liegen, so müssen auch (§. 22, 2) AB und A_1B_1 einander auf der Mittelnormale zu PP_1 in Q schneiden. Mit jedem Punkt A, mit jeder Sehne AB eines Kreises ist somit ein Punkt A_1, eine Sehne A_1B_1 perspektivisch in Bezug auf S als Centrum und die Mittelnormale zu PP_1 als Axe. Daſs sich in dieser Weise beide Kreise den perspektivischen Figuren anschlieſsen, drücken wir durch den Satz aus:

Zwei Kreise sind perspektivisch (kollinear) zu einem Ähnlichkeitspunkt als Centrum und der Mittelparallele von dessen Polaren als Axe.

Die Verbindungsgerade zweier Punkte AB und die der inversen Punkte A_1B_1 sind perspektivisch und heiſsen **inverse Gerade**; ebenso die Tangenten in inversen Punkten; diese müssen als Grenzlagen inverser Sehnen einander ebenfalls auf der Axe schneiden. Die Polaren des Ähnlichkeitspunkts, die sogenannten **Ähnlichkeitspolaren**, entsprechen einander als perspektivisch ähnliche, sowie als inverse Geraden.

4. Da für die perspektivisch ähnlich liegenden Punktpaare CA_1 und DB_1 (Fig. 110)

$$\frac{SA_1}{SC} = \frac{SB_1}{SD}$$

und aufserdem $\qquad AS \cdot SC = BS \cdot SD,$

so folgt: $\qquad AS \cdot SA_1 = BS \cdot SB_1,\quad$ d. h.:

a) *Das Produkt der Abstände zweier inversen Punkte vom Ähnlichkeitspunkt ist das gleiche für alle solche Punktpaare.*

Es kann also durch ABB_1A_1 ein Kreis gelegt werden (§. 9, 1b), was übrigens auch aus der Gleichheit der Winkel $A_1B_1B = CDB = CAB$ folgt (I. Teil §. 41, 2); somit gilt der Satz:

b) *Ein Kreis durch ein Paar inverser Punkte zweier Kreise schneidet diese in einem zweiten Paar inverser Punkte.*

Als specieller Fall ergiebt sich hieraus der Satz §. 12, 4.

5. Nach §. 9, 1a ist nun auch (Fig. 110):

$$AQ \cdot QB = A_1Q \cdot QB_1, \quad \text{d. h.:}$$

a) *Die Potenz eines Punktes der Axe ist für beide Kreise die gleiche.*

Daher heifst die Axe Potenzgerade beider Kreise.

Kein Punkt aufser dieser Geraden hat diese Eigenschaft. Ist nämlich für irgend einen Punkt Z und zwei Kreise M und M_1, deren Radien r und r_1 sind, die Potenz die gleiche (§. 9, 4):

$$t^2 = t_1^2 \quad \text{oder}$$

$$\overline{ZM}^2 - r^2 = \overline{ZM_1}^2 - r_1^2$$

und ist ZT die Normale von Z auf die Centrale, also

$$\overline{ZM}^2 = \overline{ZT}^2 + \overline{TM}^2$$

$$\overline{ZM_1}^2 = \overline{ZT}^2 + \overline{TM_1}^2,$$

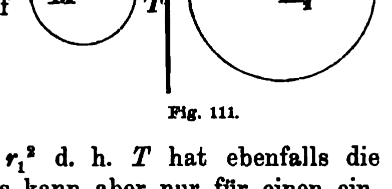


Fig. 111.

so ist auch $\overline{MT}^2 - r^2 = \overline{M_1T}^2 - r_1^2$ d. h. T hat ebenfalls die gleiche Potenz für beide Kreise. Dies kann aber nur für einen einzigen Punkt der Centralen gelten, da der Punkt eindeutig bestimmt ist durch

$$MT + TM_1 = MM_1 \quad \text{und} \quad \overline{MT}^2 - \overline{M_1T}^2 = r^2 - r_1^2.$$

Jeder Punkt gleicher Potenzen für beide Kreise mufs also auf der in T errichteten Normalen liegen, d. h.:

Der geometrische Ort des Punktes, welcher für zwei Kreise (nach Wert und Zeichen) übereinstimmende Potenzen hat, ist die Mittelparallele zu den Polaren eines Ähnlichkeitspunkts.

Da es nur eine Potenzgerade giebt, so fällt die Mittelparallele der äufseren mit derjenigen der inneren Ähnlichkeitspolaren zusammen.

Zusätze. a) *Wenn zwei Kreise einander schneiden, so ist die Sekante der Schnittpunkte Potenzgerade.*

b) *Wenn zwei Kreise einander berühren, so ist die gemeinsame Tangente Potenzgerade.*

Hierbei ist jedoch die perspektivische Bedeutung derselben hinfällig, da der Berührungspunkt jeweils als Punkt des einen Kreises allen andern Punkten des andern Kreises entsprechen müfste.

c) *Wenn zwei Kreise von einem dritten geschnitten werden, so schneiden einander die Sekanten der Schnittpunkte je eines der beiden Kreise auf der Potenzgeraden beider Kreise.*

6. Sind P und P_1 zugeordnete Pole zu dem Ähnlichkeitspunkt S zweier Kreise O und O_1, F_1 auf P_1C_1 der Fluchtpunkt zu PC (§. 21, 1), d. h. $SF_1 \parallel PC$, so folgt nun auch, dafs $\sphericalangle F_1SP = CPP_1 = PP_1F_1$ (vgl. 3).

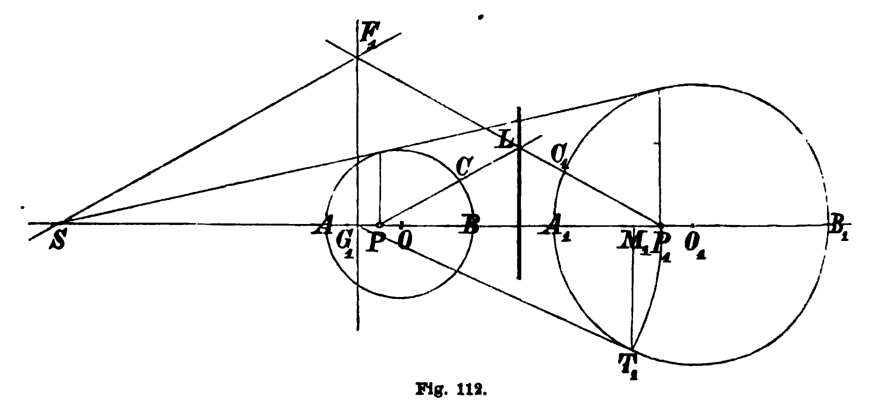


Fig. 112.

a) *In zwei Kreisen halbiert die Fluchtgerade zu allen Richtungen, welche der Figur des einen Kreises zugeordnet werden, den Abstand des Ähnlichkeitspunkts und der Ähnlichkeitspolare im andern Kreis.*

Wenn F_1G_1 irgend eine Gerade aufserhalb eines Kreises O_1 ist, so findet man stets zwei zugeordnete Pole S und P_1, welche von F_1G_1 gleichweit entfernt sind, aus $\overline{SG_1}^2 = \overline{G_1A_1} \cdot \overline{G_1B_1} = \overline{G_1T_1}^2$ (§. 18, 8a). Es kann dann ein zweiter Kreis so gewählt werden, dafs er mit ersterem perspektivisch zu S als Projektionscentrum ist, nämlich so, dafs er von den Tangenten aus S an den erstern Kreis ebenfalls berührt wird. Zu allen Richtungen desselben ist dann F_1G_1 Fluchtgerade. Ist nun M_1 der Pol zu F_1G_1, so ist die Projektion von M_1 der Mittelpunkt O des zweiten Kreises; denn die vier harmonischen Punkte $G_1A_1M_1B_1$ werden so projiziert, dafs G_1 Fluchtpunkt wird, somit (§. 18, 4b) fällt die Projektion des M_1 zugeordneten Pols in die Mitte von AB.

Ist irgend ein Punkt M_1 innerhalb eines Kreises gegeben, so läfst sich dessen Polare F_1G_1 bestimmen und daraus der perspektivische Kreis,

dessen Mittelpunkt die Projektion von M_1 ist. Die Bedingung dafür ist einfach die, dafs das Projektionscentrum S auf der Geraden durch beide zugeordnete Pole $M_1 G_1$ liegt und von dem äufseren Pol G_1 so weit entfernt, dafs das Quadrat der Entfernung gleich der Potenz dieses Poles ist.

b) *Ein Kreis, ein Punkt in seiner Fläche und dessen Polare lassen sich betrachten als die Projektion eines Kreises, dessen Mittelpunkts und als Fluchtgerade zu den Richtungen des letzteren.*

b′) *Ein Kreis, eine Sekante und ihr Pol lassen sich betrachten als die Projektion eines Kreises, eines Durchmessers desselben und als Fluchtpunkt des zu letzterem normalen Durchmessers.*

Mit Hilfe dieser Sätze lassen sich Beziehungen der Lage von Punkten und Geraden im Kreis ermitteln, indem man die betreffenden Eigenschaften der perspektivisch entsprechenden Figur aufsucht. Z. B. ergeben sich die harmonischen Beziehungen im Kreis, die Beziehungen im Sehnenviereck und zugehörigen Tangentenvierseit unmittelbar aus der Anschauung der betreffenden projektivischen Figur oder aus der Anwendung von Sätzen des I. Teils.

C. Drei Kreise.

7. Die Potenzgerade x (Fig. 113) der beiden Kreise K_1 und K_2 schneide die Potenzgerade y zu dem ersteren und einem dritten Kreise K_3 in V; dann hat dieser Punkt sowohl für K_1 und K_2, als für K_1 und K_3 die gleiche Potenz, somit auch für K_2 und K_3, d. h. der Punkt liegt auch auf der Potenzgeraden der letzteren Kreise.

Die drei Potenzgeraden dreier Kreise gehen durch einen Punkt, das Potenzcentrum.

Zusätze: a) Wenn drei Kreise einander in je zwei Punkten schneiden, so gehen die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte je zweier Kreise durch einen Punkt, das Potenzcentrum.

b) Wenn drei Kreise einander paarweise berühren, so gehen die gemeinsamen Tangenten durch einen Punkt.

8. Wenn zwei Kreise K_1 und K_2 von einem dritten K berührt werden, so sind die Berührungspunkte A_1 und B_2 inverse Punkte (§. 12, 4); ihre Tangenten schneiden einander in Z auf der Potenzgeraden der beiden ersten Kreise. Für die beiden Kreise K_1 und K ist A_1 Ähnlichkeitspunkt; B_1 und B_2 sind perspektivisch ähnlich liegende Punkte, daher auch die Schnittpunkte Z_1 une Z der Tangenten in diesen Punkten mit dem Ähnlichkeitsstrahl $A_1 Z_1 Z$. Die beiden durch Z_1 und Z normal zur Centralen $K_1 K_2$ gezogenen Geraden x_1 und x sind daher perspektivisch ähnlich zu A_1 als Centrum (§. 11, 6a′).

Der Punkt Z_1 liegt nach §. 19, 5e′ auf der Polare des Ähnlich-

lichkeitspunktes zu K_1 und K_2; daher ist x_1 die Ähnlichkeitspolare, während x Potenzgerade beider Kreise ist.

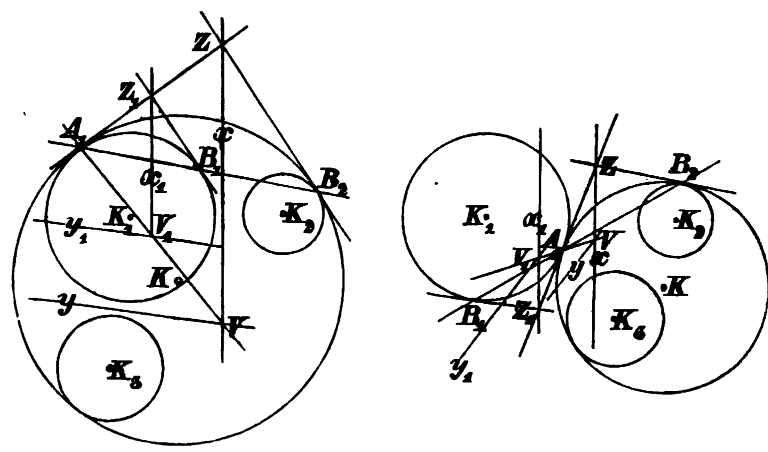


Fig. 118.

Wenn zwei Kreise von einem dritten berührt werden, so ist die Potenzgerade der beiden ersten Kreise, als Gerade zum dritten Kreise aufgefafst, perspektivisch ähnlich zur Ähnlichkeitspolaren in einem der ersten Kreise und zwar zu einer äufseren Ähnlichkeitspolaren bei gleichartiger Berührung beider Kreise durch den dritten, zu einer innern bei ungleichartiger Berührung.

9. Nehmen wir nun an, ein dritter Kreis K_3 werde ebenfalls von K berührt, y sei Potenzgerade zu K_1 und K_3, y_1 Polare in K_1 zu dem Ähnlichkeitspunkt von K_1 und K_3, so ist auch y p. ä. y_1 zu A_1 als Ähnlichkeitspunkt für K und K_1. Daher liegen auch die Schnittpunkte V (xy) und V_1 $(x_1 y_1)$ auf einem Ähnlichkeitsstrahl durch A_1 (§. 11, 5b′).

Ferner müssen die Polaren der drei Punkte $A_1 V_1 V$ zu K_1 durch einen Punkt, den Pol von $A_1 V_1 V$ gehen (§. 20, 5d); die Polare zu A_1 ist aber die Tangente in A_1 (§. 20, 3c), die Polare zu V_1 geht (nach §. 20, 5b) durch den Ähnlichkeitspunkt zu K_1 und K_2 und den zu K_1 und K_3.

Wenn drei Kreise von einem vierten berührt werden,

a) *so liegt der Berührungspunkt eines der drei Kreise auf der Geraden durch das Potenzcentrum und den Schnittpunkt der Polaren der Ähnlichkeitspunkte dieses Kreises in Bezug auf die beiden andern,*

a′) *so geht die Tangente des Berührungspunkts in einem der drei Kreise durch den Schnittpunkt der Polare des Potenzcentrums in diesem Kreis und der Verbindungsgeraden der Ähnlichkeitspunkte desselben in Bezug auf die beiden andern,*

wobei jeweils der äufsere Ähnlichkeitspunkt in Betracht zu ziehen ist, wenn die Berührung der beiden Kreise gleichartig ist, der innere bei ungleichartiger Berührung.

§. 24. Anwendung zur Konstruktion berührender Kreise.

(Apollonische Aufgabe.)

1. Aufgabe. (Apollonius von Pergä, 200 v. Chr.) *Es sollen zu irgend dreien der Gebilde Punkt, Gerade, Kreis Berührungskreise konstruiert werden.*

Wir können zehn Fälle dieser Aufgabe unterscheiden. Es seien gegeben:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Punkte	3	2	2	1	1	1	—	—	—	—
Gerade	—	1	—	2	1	—	3	2	1	—
Kreise	—	—	1	—	1	2	—	1	2	3

Von diesen Aufgaben haben wir diejenigen, bei welchen kein Kreis gegeben ist, schon gelöst, nämlich I und VII im 1. Teil §. 37, II und IV im 2. Teil §. 10, 3.

2. Erste Lösung. Aufgabe III. Es seien die beiden Punkte A und B und der Kreis C gegeben. Von einem beliebigen Kreis durch A und B, welcher den Kreis C in P und Q schneidet, trifft die Sekante PQ mit der Verbindungsgeraden AB in einem Punkt X zusammen, dessen Potenz in Bezug auf den gegebenen Kreis $PX \cdot XQ$, in Bezug auf den zu konstruierenden $AX \cdot XB$ ist. Nun ist aber $PX \cdot XQ = AX \cdot XB$, da PQ und AB Sehnen des Hilfkreises sind; daher ist X ein Punkt der Potenzgeraden des gegebenen und gesuchten Kreises, liegt also (§. 23, 5 Zus. b) auf der gemeinsamen Tangente beider Kreise; hiernach ist der Berührungspunkt leicht zu finden. Die beiden Tangenten aus X ergeben im allgemeinen zwei Kreise.

Aufgabe V. Es sei der Punkt A, die Gerade b und der Kreis C gegeben. Der Durchmesser DD_1 sei normal zu b und diese Normale schneide b in E. Die fraglichen Berührungspunkte X auf b und Y auf dem Kreis C müssen nach I. Teil §. 29, 5a auf einer Geraden liegen mit dem einen Grenzpunkt D des zu b normalen Durchmessers. In dem Zweistrahl DE und DX ist dann YD_1 anti $\parallel EX$, daher $D_1D \cdot DE = YD \cdot DX$. Legt man nun durch AD_1E einen Kreis und zieht DA, welche Verbindungsgerade diesen Kreis in F treffe, so ist auch $AD \cdot DF = D_1D \cdot DE = YD \cdot DX$, d. h. der Kreis durch AXY geht auch durch F. Somit ist in F ein zweiter Punkt des fraglichen Kreises gefunden und die Aufgabe auf III zurückgeführt, wobei zur weiteren Lösung der Kreis um AED benutzt werden kann. Es ergeben sich so zwei Kreise durch A und F; noch

zwei weitere Kreise erhält man bei Vertauschung der Bedeutung von D und D_1.

Aufgabe VI. Es seien der Punkt A und die beiden Kreise B und C gegeben. Die fraglichen Berührungspunkte Y und Z auf B bzw. C sind inverse Punkte auf einem Strahl des Ähnlichkeitspunktes D beider Kreise. Sind E und F zwei weitere inverse Punkte, so ist $ED \cdot DF = YD \cdot DZ$. Legt man nun durch AEF einen Kreis und zieht AD, welche Verbindungsgerade diesen Kreis noch in G treffe, so ist $AD \cdot DG = ED \cdot DF = YD \cdot DZ$, d. h. G ist ein zweiter Punkt des Kreises durch AYZ, womit die Aufgabe auf III zurückgeführt ist. Im allgemeinen giebt jeder Ähnlichkeitspunkt zwei Kreise.

Aufgabe VIII. Es seien zwei Gerade a und b und ein Kreis C, dessen Radius r ist, gegeben. Diese Aufgabe kommt auf IV zurück, wenn man zu a und b je zwei Parallelstreifen aa_1, aa_2, bb_1, bb_2, deren Breite gleich r ist und nun die Mittelpunkte der Kreise bestimmt, welche durch den Kreismittelpunkt C gehen und $a_1 b_1$, bzw. $a_2 b_2$ berühren. Liegt der Schnittpunkt ab aufserhalb des Kreises, so sind vier Kreise, liegt er innen, acht Kreise möglich.

Aufgabe IX. Es seien eine Gerade a und zwei Kreise B und C gegeben, deren Radien r_1 und r_2 seien; $r_2 < r_1$. Macht man zu a Parallelstreifen von der Breite r_2, zu B konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 \pm r_2$, so hat man nun nach V die Mittelpunkte von denjenigen Kreisen zu bestimmen, welche durch den Mittelpunkt von C gehen und die Hilfslinien berühren. Es sind im allgemeinen acht Kreise möglich.

Aufgabe X. Es seien drei Kreise A, B, C mit den Radien r_1, r_2, r_3 gegeben; $r_1 > r_2 > r_3$. Man beschreibe zu A konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 \pm r_3$, ebenso zu B mit den Radien $r_2 \pm r_3$ und bestimme die Mittelpunkte der Kreise, welche diese Hilfskreise berühren und durch den Mittelpunkt von C gehen, nach VI. Im allgemeinen kann der Berührungskreis alle drei Kreise gleichartig berühren (aus- oder einschliefsend) oder je zwei Kreise gleichartig, den dritten ungleichartig berühren, was im ganzen acht Auflösungen giebt.

3. Zweite Lösung. Aufgabe X. Man konstruiert die Ähnlichkeitspolaren je zweier Kreise (und zwar die zu einem äufseren bzw. inneren Ähnlichkeitspunkt bei gleich- bzw. ungleichartiger Berührung), hierauf das Potenzcentrum; dieses verbindet man mit dem Schnittpunkt der beiden Ähnlichkeitspolaren in jedem Kreis: dann schneiden diese Verbindungsgeraden die zugehörigen Kreise in je zwei Punkten; je drei dieser Punkte sind Berührungspunkte eines der gesuchten Kreise.

Die übrigen Aufgaben kommen auf X zurück, wenn man die Gerade als die Grenzfigur betrachtet, welcher ein Teil des Kreises

sich nähert, sobald sein Radius unbeschränkt zunimmt und den Punkt als die Grenzfigur, in welche der Kreis bei unbeschränkt abnehmendem Radius zusammenschrumpft.

Je gröſser ein Kreis wird, während ein zweiter Kreis unverändert bleibt, desto näher rückt die Potenzgerade an seine Peripherie; es muſs nämlich der eine Abschnitt der Sehne abnehmen, während der andere zunimmt. Die Gerade (als Grenzfigur eines Kreisbogens mit unbeschränkt groſsen Radien normal zur Geraden) ist also zugleich Potenzgerade in Bezug auf einen Kreis; das Potenzcentrum liegt in der Geraden.

Je gröſser ein Kreis wird, desto weiter rückt die äuſsere Ähnlichkeitspolare eines festen Kreises an den dem groſsen Kreis abgewendeten Teil der Peripherie, die innere an den zugewendeten Teil, indem die äuſseren gemeinsamen Tangenten mehr und mehr sich einem Winkel von $2R$ nähern, ebenso die beiden innern. Die Ähnlichkeitspolaren eines Kreises in Bezug auf eine Gerade sind daher die mit letzterer parallelen Tangenten. Die Berührungspunkte derselben sind zugleich Ähnlichkeitspunkte und liegen (§. 12, 4) daher auf der Geraden durch die Punkte, in welcher der Kreis und die Gerade von dem fraglichen Kreis berührt werden (vgl. I. Teil §. 29, 5a).

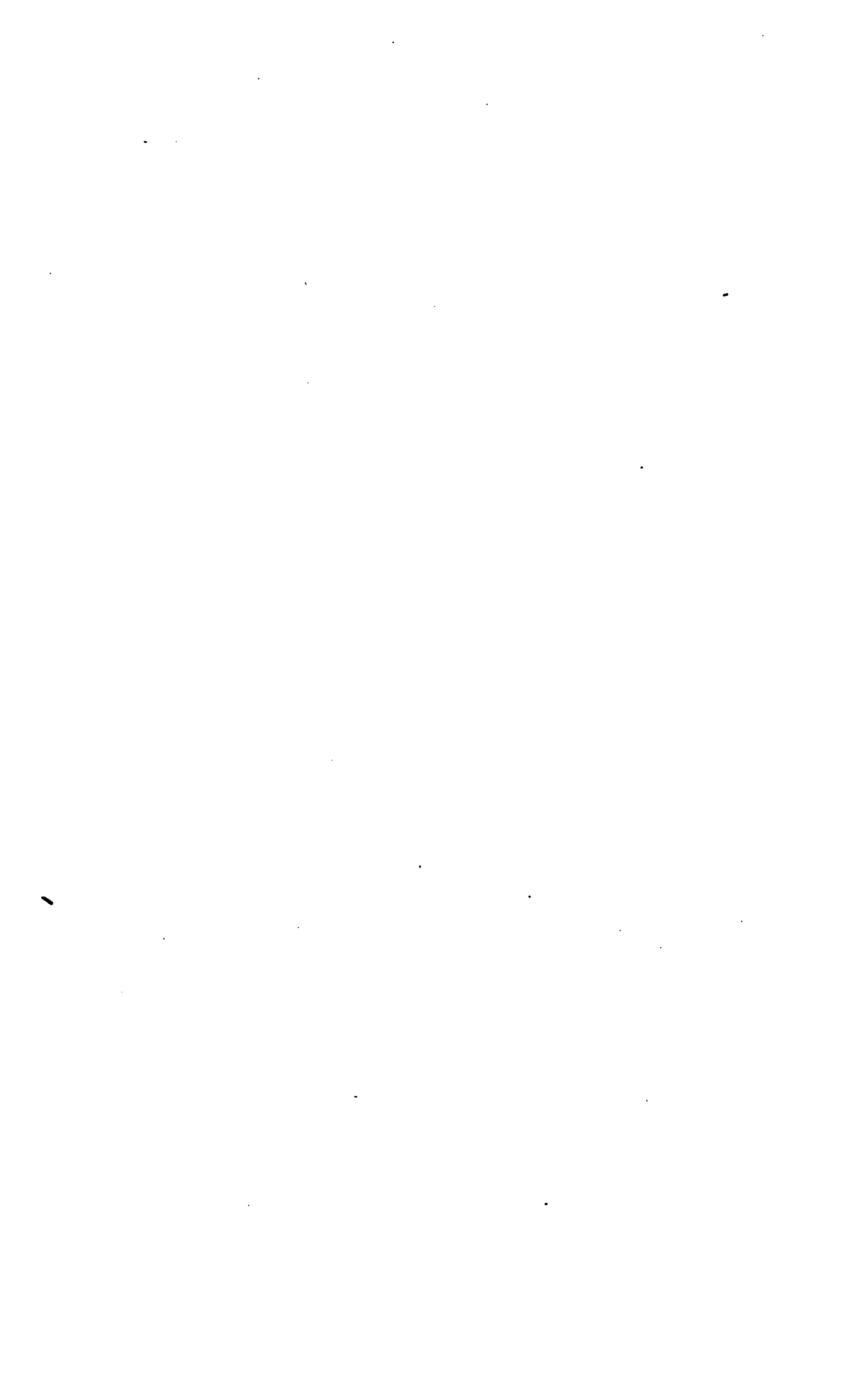
Der Punkt (als Grenzfigur des unbeschränkt zusammenschrumpfenden Kreises) hat mit einem Kreis die zugehörige Polare als Ähnlichkeitspolare, und beide haben die Mittelnormale des Punktes und zugeordneten Poles als Potenzgerade. (Vgl. §. 23, 2b.)

Auch die Aufgaben, in welchen kein Kreis gegeben ist, können in dieser Weise gelöst werden, wie z. B. II, indem man etwa um beide Punkte Hilfskreise mit gleichen Radien beschreibt und zur Geraden Parallelstreifen, deren Breite gleich dem Radius ist und die Mittelpunkte der beiden Kreise sucht, welche die Kreise gleichartig und die passende Hilfsgerade berühren.



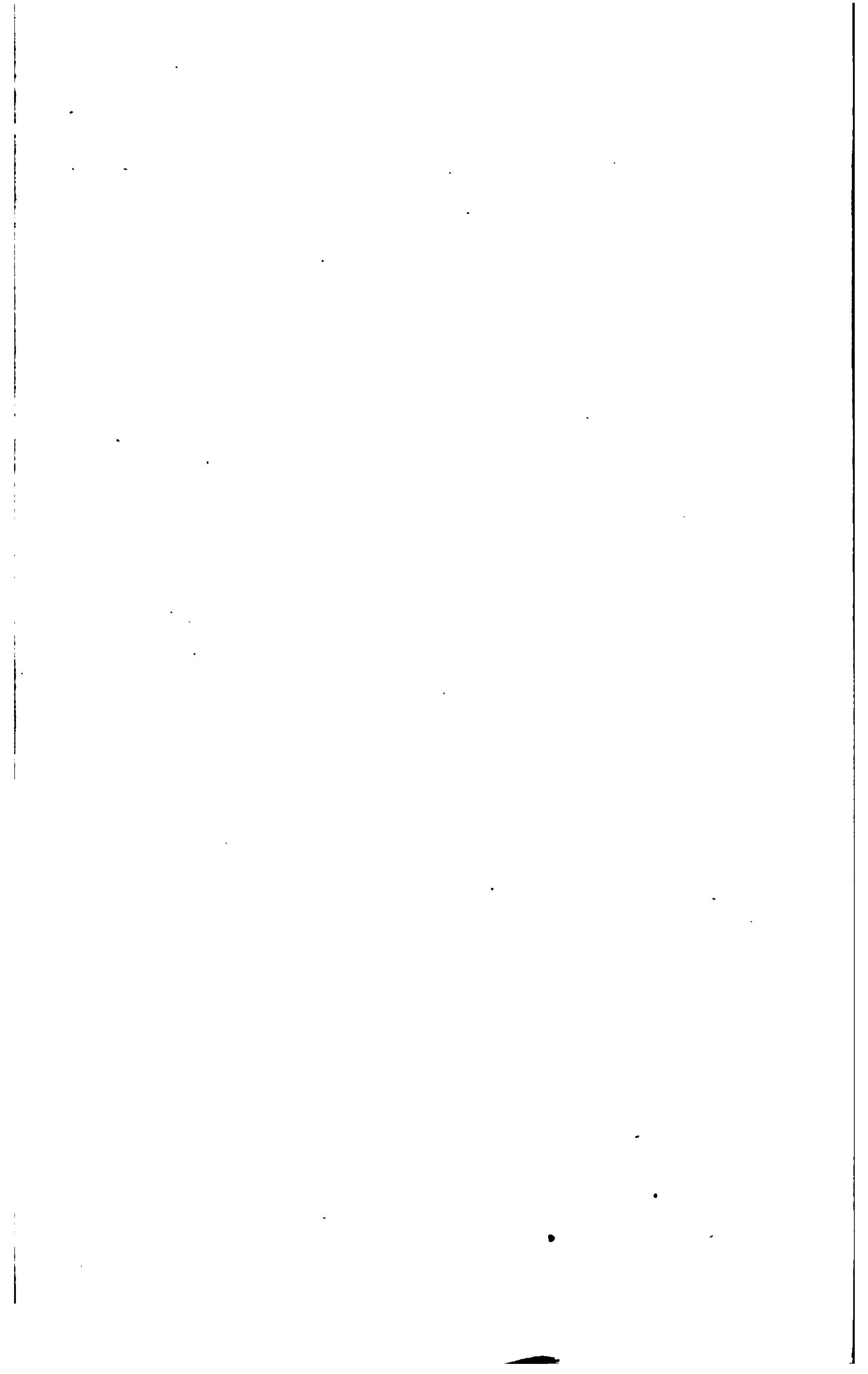
II. Abteilung.

Berechnung der planimetrischen Gröfsen.



II. Abteilung.

Berechnung der planimetrischen Gröfsen.



III. Abschnitt.

Metrische Beziehungen zwischen Strecken, Flächen und Bögen.

Achtes Kapitel.

§. 25. Verhältnisse von Flächen und Strecken.

Vorbemerkung. Während in der vorangehenden Abteilung nur Verhältnisse von Strecken und deren Produkte und Quotienten in Betracht gezogen wurden, sollen im folgenden zusammengesetztere Ausdrücke für die metrischen Beziehungen von Strecken aufgesucht werden. Solche Beziehungen ergeben sich in erster Linie durch den pythagoreischen Satz (§. 8, 8e) und aus der Vergleichung der Flächen geradlinig begrenzter Figuren.

1. Wir vergleichen zunächst Rechtecke R und r, welche gleiche Grundseite g und beliebige Höhen H und h haben. Sind nun a) diese Höhen kommensurabel und läfst sich ihr gemeinsames Mafs $x$mal auf H und $y$mal auf h abtragen, so kann man durch die Endpunkte dieser Abschnitte Parallele zu g ziehen und dadurch R in x, r in y kleinere unter einander gleiche Rechtecke s (I. Teil §. 46, 2) zerlegen. Somit ist:

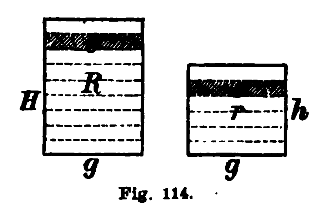


Fig. 114.

$$H : h = x : y = xs : ys = R : r.$$

Wenn aber b) die Höhen H und h inkommensurabel sind, so sind es auch die Rechtecke, gleichwohl gilt auch für solche die eben aufgestellte Proportion. Denn angenommen es ginge der $x$te Teil von H $y$mal auf h und bliebe noch ein kleiner Rest übrig, so würden die Parallelen zu g durch die Teilpunkte R in x gleiche Rechtecke zerlegen, r in y solche, wobei noch ein kleineres Rechteck übrig bliebe. Es ist also dann $R = xs$, $ys < r < (y+1)s$, so dafs $y : x < r : R < (y+1) : x$ während gleichzeitig $y : x < h : H < (y+1) : x$, so dafs $r : R$ und $h : H$ stets zwischen dieselben Grenzen

$$\frac{y+1}{x} \text{ und } \frac{y}{x}$$

fallen. Da man nun deren Differenz

$$\frac{y+1}{x} - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$$

kleiner machen kann, als jede beliebig kleine Zahl, — denn es kann ja die Zahl x der Teile beliebig grofs gewählt werden, — so ergiebt sich, dafs $r:R$ und $h:H$ sich um keine mefsbare Gröfse unterscheiden, d. h. es ist $r:R = h:H$. Wir folgern also:

Die Inhalte von Rechtecken, welche in einer Seite übereinstimmen, verhalten sich wie die nichtübereinstimmenden Seiten.

2. Vergleichen wir nun die Rechtecke R und r, deren Seiten G, H und g, h nicht übereinstimmen, so läfst sich zur Vergleichung ein drittes Rechteck ϱ benutzen, das g und H als Seiten hat. Dann ist:

$$r:\varrho = h:H, \quad \text{und}$$

$$\varrho:R = g:G$$

also

$$r:R = gh:GH, \quad \text{d. h.:}$$

Fig 115.

Die Inhalte beliebiger Rechtecke stehen in demselben Verhältnis, wie die Produkte aus (den Mafszahlen von) je zwei aneinander stofsenden Seiten.

3. Da ein Parallelogramm inhaltsgleich einem Rechteck von gleicher Grundseite und Höhe, da ferner ein Dreieck die Hälfte von einem Parallelogramm von gleicher Grundseite und Höhe ist, so folgern wir aus 1 und 2:

a) *Die Inhalte von Parallelogrammen (Dreiecken) mit gleichen Grundseiten (Höhen) stehen in demselben Verhältnis wie ihre Höhen (Grundseiten).*

b) *Die Inhalte von Parallelogrammen (Dreiecken) stehen in demselben Verhältnis wie die Produkte aus Grundseite und Höhe.*

4. Dreiecke, welche in einem Winkel übereinstimmen, lassen sich so aufeinander legen, dafs die Winkel einander decken, wie BAC und B_1AC_1. Zieht man noch B_1C, so verhält sich

$$\triangle BAC : B_1AC = AB : AB_1 \text{ (nach 3)}$$

$$\triangle B_1AC : B_1AC_1 = AC : AC_1,$$

woraus folgt:

Fig. 116.

$$\triangle BAC : B_1AC_1 = AB \cdot AC \;:\; AB_1 \cdot AC_1, \quad \text{d. h.:}$$

Die Inhalte der Dreiecke (Parallelogramme), welche in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschliefsenden Seiten.

5. Stimmen zwei Dreiecke in je zwei Winkeln überein, d. h. sind die Dreiecke einander ähnlich, so kann auch

$$AC : AC_1 = AB : AB_1$$

gesetzt werden; also verhält sich dann:

$$\triangle BAC : B_1AC_1 = \overline{AB}^2 : \overline{AB_1}^2.$$

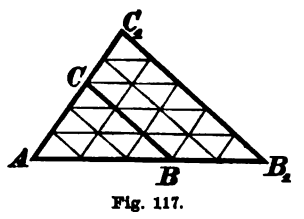


Fig. 117.

In beistehender Figur z. B. verhalten sich die Seiten wie 3 : 5, die Zahlen der einbeschriebenen gleichen Dreieckchen wie

$$9 : 25 = 3^2 : 5^2.$$

Da ähnliche Figuren sich je in gleichviele ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, deren entsprechende Seiten untereinander im gleichem Verhältnis stehen, so folgt (mit Berücksichtigung von §. 3, 2d):

Die Inhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten (oder Strecken).

Zusatz. Aus der Verbindung dieses Satzes mit dem pythagoreischen folgern wir:

Beschreibt man über den drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks als entsprechenden Seiten ähnliche Figuren, so ist die Fläche der Figur über der Hypotenuse gleich der Summe derer über den Katheten.

§. 26. Berechnung von Flächen und Strecken.

1. Um die Gröfse der Flächen durch Zahlen angeben zu können, vergleicht man dieselbe mit einer als Einheit angenommenen Fläche, der sogenannten Flächeneinheit und mifst, wievielmal diese in jener enthalten ist. Als Flächeneinheit wird am zweckmäfsigsten die Fläche eines Quadrates gewählt, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist. Der Flächeninhalt wird dann ausgedrückt durch die Zahl der Flächeneinheiten, deren Summe der betreffenden Fläche gleichkommt (vgl. I. Teil §. 45, 1–3 und §. 50, 1).

Nach §. 25, 2 läfst sich nun der Inhalt eines Rechtecks leicht angeben. Sind nämlich g und h die Längenzahlen (siehe §. 1, 7) seiner Grundseite und Höhe, während die der Flächeneinheit 1 und 1 sind, so ist das Verhältnis beider Flächen $g \cdot h : 1 \cdot 1$, d. h. der Flächeninhalt des Rechtecks ist $= gh$.

a) *Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt zweier benachbarten Seiten desselben* (in betreff der Ausdrucksweise siehe §. 1, 7).

b) *Der Inhalt eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite.*

Hieraus fliefsen in Verbindung mit I. Teil §. 46, 2a, 3a und 4 die Sätze:

c) *Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundseite und Höhe.*

d) *Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundseite und Höhe.*

e) *Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Höhe und aus der halben Summe der beiden Parallelen (bezw. aus der Mittelparallelen).* Vgl. I. Teil §. 50.

2. Diese Beziehungen zwischen Strecken und Flächen geben uns nun auch ein Mittel, Strecken selbst untereinander zu vergleichen. So folgt aus §. 24, 3 für den Fall, dafs $BC \parallel B_1C_1$ ist:

$$\triangle ABC : BCB_1 = AB : BB_1$$
$$\triangle ABC : BCC_1 = AC : CC_1.$$

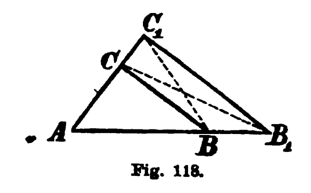


Fig. 118.

Da nun

$$\triangle BCB_1 = BCC_1$$

(I. Teil §. 46, 3 c), so ist

$$AB : BB_1 = AC : CC_1$$

d. i. es gilt die in §. 5, 2 abgeleitete Proportion. Ebenso ergiebt die Gleichheit der Dreiecke AB_1C und ABC_1, indem man jedes derselben mit $\triangle ABC$ vergleicht, dafs

$$AB : AB_1 = AC : AC_1$$

(vgl. I. Teil §. 48, 5).

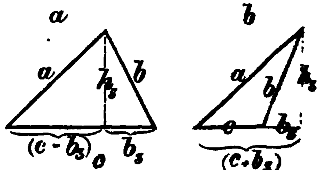
Da jedes Produkt zweier Strecken als Flächeninhalt eines Rechtecks gedeutet werden kann, dessen anstofsende Seiten eben jene Strecken sind, so erkennt man als übereinstimmend:

a) I. §. 46, 6 und 8 über Gleichheit von Quadraten und Rechtecken beim rechtwinkeligen Dreieck und II. §. 8, 3 b und a über die mittlere Proportionale von Strecken in demselben.

b) den pythagoreischen Lehrsatz I. §. 47, 3 und den Satz von den zweiten Potenzen der Seiten im rechtwinkeligen Dreiecke II §. 8, 3 c.

c) die Aufgabe I. §. 48, 5 über die Verwandlung eines Rechtecks in ein anderes und II. §. 7, 1 die Konstruktion der vierten Proportionalen.

d) die Aufgabe I. §. 48, 6 über die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat und II. §. 10, 1 die Konstruktion der mittleren Proportionale.


Fig. 119.

Auch der pythagoreische Satz für das schiefwinkelige Dreieck I. §. 47, 4 läfst sich nun als eine metrische Beziehung der Seiten auffassen. Es seien abc die Seiten, b_3 die Normalprojektion von b auf c, so folgt rein algebraisch aus dem Satz II. §. 8, 3 c:

$$a^2 = (c \mp b_3)^2 + h_3^2 = c^2 \mp 2cb_3 + b_3^2 + h_3^2,$$

während

$$b_3^2 + h_3^2 = b^2;$$

somit ist

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cb_3.$$

Diese Beziehungen dienen uns nun dazu, aus gegebenen Strecken andere durch sie bestimmte Strecken zu berechnen.

3. Berechnung der Höhen und des Flächeninhalts eines Dreiecks aus den Seiten. Aus dem eben abgeleiteten Satze folgt:

$$b_3 = \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Daher ist:

$$h_3^2 = b^2 - b_3^2 = (b + b_3)(b - b_3) = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2}; \quad \text{also ist}$$

$$4c^2h_3^2 = [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]$$

$$= (b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c).$$

Setzt man nun der Abkürzung wegen:

$$a + b + c \qquad = 2s, \qquad \text{so ist:}$$

$$-a + b + c = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a);$$

und wird $(s - a) = s_1$, $(s - b) = s_2$, $(s - c) = s_3$ gesetzt, so findet sich:

$$4c^2h_3^2 = 2s \cdot 2s_1 \cdot 2s_2 \cdot 2s_3, \quad h_3^2 = \frac{4ss_1s_2s_3}{c^2}, \quad h_3 = \frac{2}{c}\sqrt{ss_1s_2s_3}.$$

Den Flächeninhalt des Dreiecks $J = \frac{c}{2} \cdot h_3$ giebt also

$$\boldsymbol{J = \sqrt{ss_1s_2s_3}},$$

die sogenannte Heronische Formel.

Beispiel:

$a = 13$	$s = 21$
$b = 14$	$s_1 = 8$
$c = 15$	$s_2 = 7$
$2s = 42$	$s_3 = 6$

$$J = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 4^2} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84.$$

Zusatz. In einem gleichseitigen Dreieck ist

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad J = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}.$$

4. Berechnung von Ecktransversalen im Dreieck. Die Ecktransversale e, welche die Seite c in die Abschnitte p und q teilt

und deren Normalprojektion auf c durch x bezeichnet werde, wird durch die Gleichungen bestimmt:

$$a^2 = e^2 + p^2 - 2px$$
$$b^2 = e^2 + q^2 + 2qx.$$

Man eliminiert x:

$$a^2q + b^2p = e^2(q+p) + pq(p+q) = e^2c + pqc,$$

woraus:
$$e^2 = \frac{a^2q + b^2p}{c} - pq.$$

Fig. 120.

a) Für die Schwerlinie m_3 ist

$$p = q = \frac{c}{2},$$

also

$$m_3^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

b) Für die Winkelhalbierende w_3 ist (§. 17, 3a′)

$$p : q = a : b \qquad \text{und} \qquad p + q = c,$$

woraus

$$p = \frac{ac}{a+b}, \quad q = \frac{bc}{a+b},$$

$$a^2q + b^2p = \frac{abc(a+b)}{a+b} = abc.$$

Also ist:

$$w_3^2 = ab - pq = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab}{(a+b)^2}[(a+b)^2 - c^2]$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c)$$

oder $w_3^2 = \frac{4abss_3}{(a+b)^2}$, somit $w_3 = \frac{\sqrt{ab}}{\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cdot \sqrt{ss_3}.$

Auch durch Benutzung des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises, bezw. der ähnlichen Dreiecke $BCY \backsim XCA$ (Fig. 121) ergiebt sich:

Fig. 121.

$$w_3 : b = a : (w_3 + z), \quad w_3^2 = ab - w_3z = ab - pq.$$

5. Berechnung des Radius des Dreiecksumkreises.

Wenn CX (Fig. 122) Durchmesser des Kreises, so ist

$$\sphericalangle CXB = CAB, \quad \sphericalangle XBC = R = AC_1C,$$

somit
$$\triangle XCB \backsim ACC_1,$$

also $d : a = b : h_3$, woraus $r = \dfrac{ab}{2h_3}$

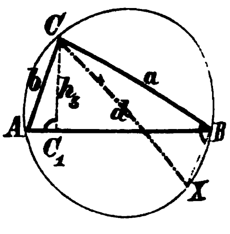


Fig. 122.

und da $h_3 = \frac{2J}{c}$, so ist $r = \frac{abc}{4J}$

wo J durch die Heronische Formel bestimmt wird.

6. Berechnung der Radien des Inkreises und der Ankreise eines Dreiecks. Nach I. §. 37, 3′ ist (Fig. 123):

$$AF = s_1 = s - a,$$
$$FB = s_2 = s - b,$$
$$BF_1 = s_3 = s - c,$$
$$AF_1 = s.$$

Daraus, dafs

$$\triangle AMF \backsim AM_1F_1$$

und dafs

$$\triangle FMB \backsim F_1BM_1,$$

Fig. 123.

folgt bezw.:

$$\frac{\varrho}{s_1} = \frac{\varrho_1}{s}, \quad \frac{\varrho}{s_2} = \frac{s_3}{\varrho_1},$$

also durch Multiplikation und Division bezw.:

$$\frac{\varrho^2}{s_1 s_2} = \frac{s_3}{s} \text{ und } \frac{s_2}{s_1} = \frac{\varrho_1^2}{s s_3},$$

woraus:

$$\varrho = \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s}};$$

ferner

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{s s_2 s_3}{s_1}};$$

entsprechend: $\varrho_2 = \sqrt{\frac{s s_1 s_3}{s_2}}$ und $\varrho_3 = \sqrt{\frac{s s_1 s_2}{s_3}}$.

Übrigens ergiebt sich auch leicht aus der Betrachtung der Figur, dafs

$$\triangle ABC = AMB + BMC + CMA$$

ist, also

$$J = \frac{\varrho}{2}(a + b + c) = \varrho s, \quad \varrho = \frac{J}{s};$$

in ähnlicher Weise folgt:

$$\varrho_1 = \frac{J}{s_1}.$$

7. Metrische Beziehungen im Sehnenviereck. Trägt man die Seite CD des Sehnenvierecks $ABCD$ von A als Sehne AK in den Kreis und verbindet K mit B, so entstehen die ähnlichen Dreiecke

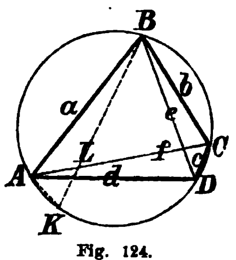


Fig. 124.

$$ABL \backsim DBC,$$

da

$$\sphericalangle ABK = DBC \text{ und } \sphericalangle BAL = BDC;$$

ebenso

$$\triangle BLC \backsim ABD,$$

da

$$\sphericalangle LBC = DBC + LBD = ABL + LBD = ABD$$

und

$$\sphericalangle ADB = ACB.$$

Somit ist

$$AL = \frac{AB \cdot CD}{BD}, \quad LC = \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

und da $$AL + LC = AC,$$

so ist: $$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

oder $$e \cdot f = ac + bd,$$ d. h.:

Im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Gegenseiten. (Ptolemäischer Lehrsatz 150 n. Chr.).

Zusatz. Im Sehnenviereck $ABCK$ ist:

$$AC \cdot BK = AB \cdot CK + BC \cdot AK$$

oder da $$AK = c, \; CK = d,$$

so ist: $$f \cdot BK = ad + bc.$$

Wird das Sehnenviereck mit der Reihenfolge der Strecken $acbd$ gebildet, so ist die von ac überspannte Diagonale $= BK$, die von cb überspannte $= e$, somit ist:

$$e \cdot BK = ab + cd,$$

woraus folgt:

$$f : e = (ad + bc) : (ab + cd)$$

$$f^2 = \frac{ad + bc}{ab + cd}(ac + bd)$$

$$e^2 = \frac{ab + cd}{ad + bc}(ac + bd).$$

8. Um den Flächeninhalt eines Sehnenvierecks aus seinen vier Seiten $abcd$ zu berechnen, zerlegen wir dasselbe durch die Diagonale e in zwei Dreiecke und betrachten die Gegenseiten b und d als Grundseiten. Dann ist

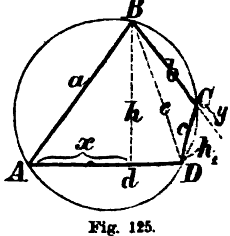


Fig. 125.

$$J = \frac{d \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h_1}{2};$$

weil aber die Winkel bei A und C einander zu $2R$ ergänzen, so ist

$$h_1 = \frac{ch}{a},$$

folglich

$$J = \frac{ad + bc}{2} \cdot \frac{h}{a}.$$

Um h zu erhalten, berechnen wir zunächst die Projektion x von a auf d. Es ist

$$e^2 = a^2 + d^2 - 2dx = b^2 + c^2 + 2by$$

und da
$$y = \frac{cx}{a},$$
so ist
$$(a^2+d^2)-(b^2+c^2)=\frac{2x}{a}(ad+bc),\quad x=\frac{a}{2(ad+bc)}[(a^2+d^2)-(b^2+c^2)].$$

Nun ist
$$h^2 = (a+x)(a-x),$$
aber
$$a \pm x = \frac{a}{2(ad+bc)}[2(ad+bc) \pm (a^2+d^2) \mp (b^2+c^2)],$$
$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+d-b+c)(a+d+b-c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)}.$$

Setzt man
$$a+b+c+d = 2s,$$
so ist:
$$J = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

§. 27. Graphische Bestimmung von Strecken und Flächen.

(Graphisches Rechnen der Planimetrie.)

1. Schon im. I. Teil wurde die Addition und Subtraktion von Strecken, Winkeln und Flächen behandelt. Es lassen sich hiernach mit diesen geometrischen Gröfsen Konstruktionen ausführen, welche arithmetischen Operationen entsprechen. In der That können diese Konstruktionen Rechnungen ersetzen, wenn man z. B. die zu addierenden oder zu subtrahierenden Zahlen als Längenzahlen betrachtet, mit den ihnen entsprechenden Strecken die geometrische Addition oder Subtraktion ausführt und das Resultat der Konstruktion mifst. Allein ein solches Ersetzen der Zahlen durch Strecken und umgekehrt findet wegen seiner Umständlichkeit und Ungenauigkeit keine Anwendung.

Es hat dagegen in dem sogenannten mechanischen Rechnen eine Anwendung gefunden. Bei diesem werden entweder geteilte Lineale (Scheiben) gegen einander verschoben, auf welchen die Strecken (Bogen) den Logarithmen der beigesetzten Zahlen entsprechen (logarithmischer Rechenschieber), so dafs die Addition und Subtraktion dieser Strecken (Bogen) je einer Multiplikation bezw. Division der betreffenden Zahlen entspricht, — oder es werden die fraglichen Gröfsen graphisch in einer Tafel dargestellt und mit einem Netz von Linien bedeckt, so dafs das Auge, indem es diesen Linien folgt, das gewünschte Resultat findet.

Ein rein graphisches Verfahren zur Bestimmung von Gröfsen ist dann von Vorteil, wenn letztere von gezeichneten Strecken, Winkeln, Flächen abhängen, wie dies in Geometrie und Mechanik

der Fall ist. Alsdann werden die fraglichen Gröfsen durch geometrische Konstruktionen ausgeführt, welche den arithmetischen Operationen entsprechen und die man deshalb mit graphischem Rechnen bezeichnet (Culmann 1864).

2. a) Die Konstruktion der vierten Proportionale

$$c : b = a : x, \quad x = \frac{b}{c} a$$

ist aufzufassen als die graphische Multiplikation der Strecke a mit dem (unbenannten) Multiplikator $\frac{b}{c}$, d. i. mit der Verhältniszahl der Strecken b und c. Zugleich ist damit die graphische Division der Strecke a durch das Verhältnis $\frac{c}{b}$ ausgeführt. — Für die Division durch eine ganze Zahl ist $c = nb$ zu setzen.

b) Sollen mehrere Strecken a_1, a_2, a_3 mit einer konstanten Verhältniszahl $\frac{b}{c}$ multipliziert werden, (wie dies beim Zeichnen ähnlicher Figuren in Betracht kommt) so trägt man diese Strecken nebst c auf eine Gerade von einem Punkt aus ab und konstruiert zur erhaltenen Punktreihe eine perspektivisch ähnliche Reihe (§. 6, 1 oder 4), in welcher die Strecke b der Strecke c entspricht. — Eine andere Lösung, die nur einfache Abmessungen mit dem Zirkel erfordert, stützt sich auf §. 20, 1b. Man teilt eine Strecke harmonisch im Verhältnis $b : c$, beschreibt um den Abstand der Teilpunkte als Durchmesser einen Kreis und trägt nun jede gegebene Strecke a_1 vom Endpunkt jener Strecke bis zur Kreislinie; der Abstand des so erhaltenen Punktes der Kreislinie vom Anfangspunkt der Strecke giebt das Resultat.

c) Soll das Produkt einer Strecke a mit mehreren Verhältniszahlen

$$\frac{b_1}{c_1}, \quad \frac{b_2}{c_2}, \quad \frac{b_3}{c_3}$$

bestimmt werden

$$x = \frac{b_1}{c_1} \cdot \frac{b_2}{c_2} \cdot \frac{b_3}{c_3} \cdot a,$$

so kann dies z. B. auf folgende Weise ausgeführt werden. Man trägt vom Scheitel S (Fig. 126) zweier Geraden p und q die Zähler abwechselnd auf die eine und andere Gerade, b_1 und b_3 auf p, b_2 auf q, umgekehrt die Nenner c_1 und c_3 auf q, c_2 auf p und verbindet die Endpunkte der zusammengehörigen Zähler und Nenner. Auf dieselbe Gerade mit dem ersten Nenner c_1 trägt man $SA = a$ ab und beschreibt von dem

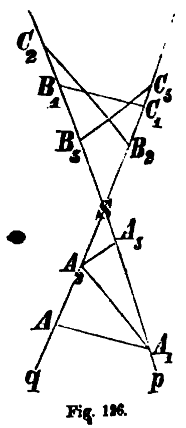


Fig. 126.

Endpunkt A einen Geradenzug, dessen Seiten mit jenen Verbindungsgeraden der Reihe nach parallel sind und dessen Ecken abwechselnd auf q und p liegen. Für die Strecken a, a_1, a_2, a_3 von S bis zu diesen Ecken ist nun:

$$a_1 = \frac{b_1}{c_1} a, \quad a_2 = \frac{b_2}{c_2} a_1, \quad a_3 = \frac{b_3}{c_3} a_2,$$

somit

$$\frac{b_3}{c_3} \cdot \frac{b_2}{c_2} \cdot \frac{b_1}{a_1} a = a_3 = x.$$

Sind die Verhältnisse

$$\frac{b_3}{c_3}, \quad \frac{b_2}{c_2}, \quad \frac{b_1}{c_1}$$

einander gleich, so treten an die Stelle der Verbindungsgeraden

$$B_1C_1, \; B_2C_2, \; B_3C_3$$

zwei antiparallele Geraden.

3. a) Durch das Produkt zweier Strecken ab wird geometrisch der Flächeninhalt eines Rechtecks dargestellt, dessen Seiten a und b sind. Man nennt daher ein solches Produkt zweier Strecken eine Gröſse zweiter Dimension. Dagegen werden Strecken, die Summe oder Differenz von Strecken, das Produkt einer Strecke mit Verhältniszahlen, der Quotient einer Strecke und einer Verhältniszahl Gröſsen erster Dimension genannt. Die (unbenannte) Verhältniszahl $\frac{b}{c}$ heiſst eine Gröſse nullter Dimension.

b) Wird das Produkt zweier Strecken ab durch eine Strecke c geteilt, so erhält man $x = \frac{ab}{c}$, als die eine Seitenstrecke eines Rechtecks, dessen zweite Seite c und dessen Flächeninhalt ab ist; es ist dies eine Gröſse erster Dimension, entsprechend $\frac{b}{c} \cdot a$ (s. 2a). Wird hierbei $c = 1$ als Längeneinheit gewählt, so stellt $i = \frac{a \cdot b}{1}$ eine Strecke i dar, welche zur Längeneinheit in demselben Verhältnis steht, wie die Fläche des Rechtecks zur Flächeneinheit: $\frac{i}{1} = \frac{ab}{1}$. Durch Abmessung der Strecke i mit der Längeneinheit (und deren Unterabteilungen) ergiebt sich daher die Zahl der Flächeneinheiten, d. i. der Flächeninhalt des Rechtecks.

Fig. 127.

Soll der Flächeninhalt eines Dreiecks graphisch ermittelt werden $i = \frac{ah}{2}$, so geschieht dies durch graphische Multiplikation der Strecke a mit der Verhältniszahl $\frac{h}{2}$, also $2 : a = h : i$, wobei 2 die Strecke von zwei Längen-

einheiten bedeutet, oder auch durch die Multiplikation von h mit $\frac{a}{2}$. Oder man verwandelt das Dreieck in ein solches, dessen Grundseite 2 und dessen Höhe i ist (Fig. 128a), bezw. dessen Höhe 2 und dessen Grundseite i ist (Fig. 128b, c).

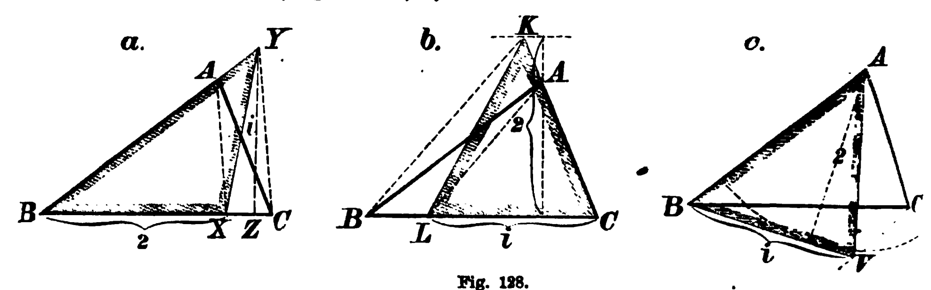


Fig. 128.

Um den Flächeninhalt irgend eines Vielecks graphisch zu bestimmen, wird es zuvor in ein Dreieck verwandelt (I. Teil §. 48, 3).

Anmerkung. Wie hier die Gröfse zweiter Dimension ab durch eine Strecke i ermittelt wurde, so ist dies auch für eine Gröfse nullter Dimension $\frac{a}{b}$ möglich, indem man x mit der Längeneinheit 1 so bestimmt, dafs

$$b : a = 1 : x, \quad x = \frac{a}{b} \cdot 1.$$

c) Wird ab mit einer Verhältniszahl $\frac{c}{d}$ multipliziert, so stellt das Produkt $\frac{c}{d} \cdot ab$ die Fläche dar, deren Verhältnis zu ab durch den Multiplikator $\frac{c}{d}$ bestimmt ist; die Gröfse ist zweiter Dimension. Liegt die Fläche ab als Parallelogramm oder Dreieck vor, so erhält man die Fläche $\frac{c}{d} \cdot ab$, indem man die Grundseite in dem Verhältnis $c : d$ teilt und die Parallele zur zweiten Seite, bezw. die Verbindungsgerade mit der Spitze zieht (§. 25, 3).

Anmerkung. Das Produkt dreier Strecken findet erst in der Ausmessung des Rauminhaltes der Körper eine geometrische Deutung.

4. Die Konstruktion der mittleren Proportionale zweier Strecken $a : x = x : b$, bezw. der Seite eines Quadrates von gegebenem Inhalt $x^2 = ab$, entspricht der arithmetischen Operation des Ausziehens der Quadratwurzel $x = \sqrt{ab}$; dieser Ausdruck ist also erster Dimension. Irrationale Wurzeln werden hierbei durch Strecken dargestellt, welche mit der angewendeten Einheit kein gemeinschaftliches Mafs haben, z. B. (Fig. 129):

$$x = \sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5}, \quad 3 : x = x : 5.$$

Jede Gröfse zweiter Dimension, wie z. B.

$$\frac{b_1}{c_1}\,\frac{b_2}{c_2}\cdot ab = \frac{b_1}{c_1}\,a\cdot\frac{b_2}{c_2}\cdot b$$

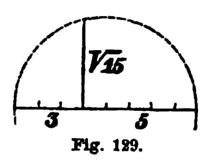


Fig. 129.

läfst sich nun durch Anwendung von 3c bzw. 2a und durch die Konstruktion einer mittleren Proportionale als ein Quadrat darstellen.

5. a) Die Summe oder Differenz von Flächen, welche in Form von Quadraten gegeben sind, wird ebenfalls in dieser Form erhalten mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes. Es ist dies die Darstellung des algebraischen Ausdruckes

$$x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$$

wobei im ersten Fall a und b Katheten, x Hypotenuse, im zweiten Fall a Hypotenuse, b und x Katheten sind.

Die Summe mehrerer solcher Glieder wird durch die wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhalten; soll z. B.

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$$

sein, so wird zunächst $z^2 = a^2 + b^2$ konstruiert, dann $y^2 = z^2 - c^2$ u. s. w.

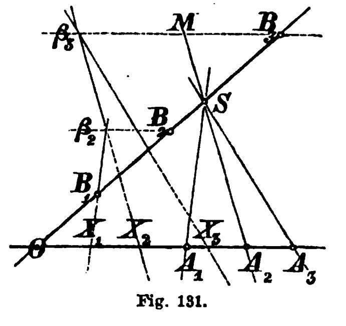


Fig. 130.

b) Sind irgend welche Gröfsen zweiter Dimension zu addieren, so kann man für jede derselben (nach 4) die Seite des entsprechenden Quadrats bestimmen und dann, wie eben gezeigt, verfahren. — Oder man stellt diese Gröfsen als Rechtecke mit einer gemeinsamen Seite dar (nach 3b) und wendet hierauf 4 an.

Um z. B.

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c(x_1 + x_2 + x_3)$$

zu konstruieren, trägt man a_1, a_2, a_3 als aufeinander folgende Strecken einer Punktreihe $OA_1A_2A_3$ an, zieht in beliebiger Richtung $OS = c$ und zeichnet von S den zu dieser Punktreihe perspektivischen Büschel. Auf dem Strahl OS trägt man b_1, b_2, b_3 als von O abgemessene Strecken einer Punktreihe $OB_1B_2B_3$ an und zieht durch deren Punkte Parallele zu OA_1. Schliefslich zeichnet man einen Geradenzug $OB_1\beta_2\beta_3X_3$, dessen Seiten der Reihe nach parallel den Strahlen jenes Büschels von S und dessen Ecken auf den Parallelen der zweiten Punktreihe liegen. Die Seiten dieses Geradenzugs schneiden OA in den Endpunkten $X_1X_2X_3$ der aufeinander folgenden Strecken x_1, x_2, x_3. Denn es ist z. B., wenn SM die Verlängerung von A_2S,

Fig. 131.

$$\frac{X_2 X_3}{A_2 A_3} = \frac{X_2 \beta_3}{A_2 S} = \frac{A_2 M}{A_2 S} = \frac{O B_3}{O S}$$

oder

$$X_2 X_3 = \frac{b_3}{c} a_3.$$

Wird $c = 1$ gewählt, so giebt die Zahl der Längeneinheiten von $O X_3$ die fragliche Summe

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

c) Mit Hülfe der Sätze über die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis (§. 9) läfst sich auch eine Fläche b^2 als Summe oder Differenz eines Quadrates x^2 und eines Rechtecks ax darstellen, welche eine Seite x gemeinsam haben, während nur die andere Seite a des Rechtecks gegeben ist. Es entspricht dies der Auflösung der quadratischen Gleichungen:

$$\text{a) } x^2 + ax = b^2, \quad \text{b) } x^2 - ax = b^2, \quad \text{c) } ax - x^2 = b^2.$$

Alsdann ist im ersten Fall:

$$x(x + a) = b^2, \quad (a + x) : b = b : x$$

im zweiten Fall:

$$x(x - a) = b^2, \quad x : b = b : (x - a)$$

im dritten Fall:

$$x(a - x) = b^2, \quad x : b = b : (a - x).$$

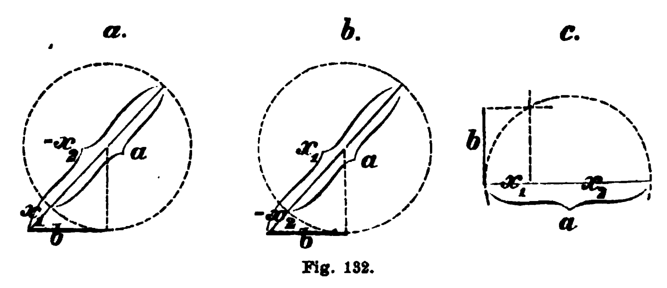


Fig. 132.

Man beschreibt mit a als Durchmesser einen Kreis und trägt in den ersten beiden Fällen b als Tangente an, dann ergiebt sich auf der centralen Sekante durch den Endpunkt von b der positive (und negative) Wert für x. Im dritten Falle sind die beiden Werte von x die Abschnitte des Durchmessers, welche zur Ordinate b gehören.

Die negativen Werte von x in der Gleichung

$$x^2 + ax = -b^2$$

findet man, wenn man $y = -x$ aus

$$y^2 - ay = -b^2, \quad ay - y^2 = b^2$$

nach c) konstruiert.

Ist statt b^2 der Wert $b \cdot c$ gegeben, so erfährt die Konstruktion eine Abänderung gemäfs §. 9, 1.

6. Das Verhältnis zweier Flächen oder Gröfsen zweiter Dimension läfst sich durch ein Streckenverhältnis ersetzen, indem man erstere zunächst als Quadrate darstellt $a^2 : b^2$ und aus deren Seiten a und b als Katheten ein rechtwinkeliges Dreieck formt. Die Projektionen a_1 und b_1 der Katheten auf die Hypotenuse geben das fragliche Verhältnis

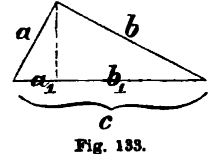


Fig. 133.

$$a^2 : b^2 = a_1 : b_1,$$

da

$$a^2 = a_1 c \text{ und } b^2 = b_1 \cdot c$$

ist.

Um einen Bruchteil eines Quadrates selbst wieder als Quadrat zu erhalten

$$x^2 = \frac{p}{q} a^2 = \frac{p}{q} a \cdot a,$$

wird die mittlere Proportionale x zu $\frac{p}{q} a$ und a konstruiert, oder es wird ein rechtwinkeliges Dreieck gezeichnet, dessen Hypotenusenabschnitte p und q sind, und dann ein ähnliches Dreieck mit den Katheten a (an q anliegend) und x.

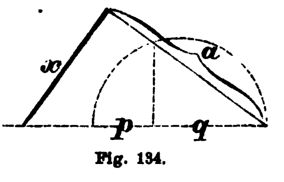


Fig. 134.

§. 28. Algebraische Analysis zur graphischen Lösung von Aufgaben.

1. Bei geometrischen Aufgaben handelt es sich häufig darum eine Strecke zu bestimmen, mit deren Hilfe die Aufgabe gelöst werden kann. Man sucht alsdann den Zusammenhang der fraglichen Strecke mit den gegebenen Stücken durch eine Gleichung auszudrücken, berechnet sie aus dieser Gleichung und führt alsdann die Konstruktion des erhaltenen algebraischen Ausdrucks aus.

Ein negativer Wert der Unbekannten hat hierbei nur dann eine Bedeutung, wenn in der Aufgabe die Lage der fraglichen Strecke nach zwei entgegengesetzten Richtungen in Betracht gezogen werden kann; andernfalls ist ein negativer Wert ein Anzeichen der Unmöglichkeit der Lösung. — Ist die Gleichung vom zweiten Grade (vgl. §. 25, 5c), so giebt oft eine weitere Bedingung, der die fragliche Strecke genügen mufs, an, welcher der beiden Werte allein zu benützen ist. Diese weitere Bedingung besteht gewöhnlich darin, dafs die fragliche Strecke innerhalb gewisser Grenzwerte liegen mufs. Manchmal entsprechen die im betreffenden Falle ausgeschlossenen Werte einer anderen Auffassung der Aufgabe bezw. einer verwandten

Aufgabe. — Ein imaginärer Wert zeigt die Unmöglichkeit der Lösung unter den gegebenen Bedingungen an.

2. Aufgabe (als Beispiel). *Es ist der Umfang* $(a + b + c)$ *eines Dreiecks parallel zu einer Seite a zu halbieren.* Sind x und y die oberen Abschnitte von b und c, so ist

$$x + y = \tfrac{1}{2}(a + b + c), \quad x : y = b : c,$$

woraus folgt:

$$x = \frac{(a + b + c)b}{2(b + c)},$$

was nach §. 27, 2a zu konstruieren ist.

3. Aufgabe. *Es ist ein Dreieck in ein inhaltsgleiches gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.* Die Grundseite und Höhe des gegebenen Dreiecks seien g und h, des gesuchten x und y, so ist $g \cdot h = x \cdot y$. In einem gleichseitigen Dreieck ist aber (§. 26, 3. Zus.)

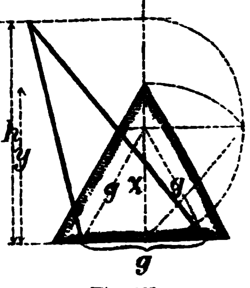


Fig. 135.

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{3}, \quad x = \frac{2y}{\sqrt{3}};$$

somit ist

$$gh = \frac{2y^2}{\sqrt{3}}, \quad y^2 = h \cdot \frac{g}{2}\sqrt{3}, \quad \frac{g}{2}\sqrt{3} : y = y : h.$$

Nun erhält man

$$z = \frac{g}{2}\sqrt{3}$$

als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite g ist, und hieraus y.

4. Aufgabe. *Es ist ein Dreieck parallel zu einer Seite in einem gegebenen Verhältnis* $p : q$ *zu teilen.* Wenn x die fragliche Seite des abzuschneidenden Dreiecks ist, welche auf die Seite a des gegebenen Dreiecks fällt, so mufs nach §. 25, 5 das Verhältnis bestehen:

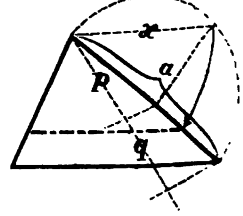


Fig. 136.

$$x^2 : a^2 = p : (p + q), \quad x^2 = \frac{p}{p + q}\, a \cdot a,$$

$$\frac{p}{p + q}\, a : x = x : a.$$

Man teilt also a im Verhältnis $p : (p + q)$ und konstruiert dann x gemäfs dieser Proportion.

5. Aufgabe. *Es ist ein Trapez parallel zu den Grundseiten im gegebenem Verhältnis* $p : q$ *zu teilen.* Es seien B und C die beiden Teile, $B : C = p : q$ (z. B. 5 : 2). Wird das Trapez durch das Dreieck A zu einem Dreieck ergänzt und sind a, x, b die entsprechenden Seiten der ähnlichen Dreiecke

$$A, \quad (A + B), \quad (A + B + C),$$

so ist nun

$$\frac{A+B}{A}=\frac{x^2}{a^2}$$

oder

$$\frac{B}{A+B}=\frac{x^2-a^2}{x^2};\quad \frac{A+B}{A+B+C}=\frac{x^2}{b^2}$$

oder

$$\frac{A+B}{C}=\frac{x^2}{b^2-x^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{B}{C}=\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}=\frac{p}{q},\quad \frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}=\frac{p}{p+q}.$$

Fig. 137.

Setzen wir nun

$$y^2=x^2-a^2,$$

so ist

$$\sqrt{b^2-a^2}:y=y:\frac{p}{p+q}\sqrt{b^2-a^2}.$$

Konstruiert man daher aus b und a das rechtwinkelige Dreieck QRS, so ist die Kathete

$$QS=\sqrt{b^2-a^2};$$

teilt man letztere im gegebenen Verhältnis:

$$QV:VS=p:q$$

und konstruiert die mittlere Proportionale y zu QV und QS, so erhält man dann x aus

$$x=\sqrt{a^2+y^2}.$$

Löst man dagegen obige Gleichung auf, so führt dies zur Konstruktion von

$$x^2=\frac{pb^2}{p+q}+\frac{qa^2}{p+q}.$$

6. Aufgabe. *Es ist durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche mit den Schenkeln eines nach Lage und Gröfse gegebenen Winkels O ein Dreiseit von bestimmtem Flächeninhalt J bildet.* Die gegebene Fläche läfst sich darstellen (Fig. 138) als ein Parallelogramm $OQRS$, welchem der gegebene Winkel angehört und in welchem der gegebene Punkt P auf einer Seite RS liegt; er teile diese Strecke in $RP=a$ und $PS=b$. Ist XPY die fragliche Gerade, welche QR in Z treffe, so mufs

$$\triangle RPZ=SPY+XQZ$$

sein, bezw.

$$\triangle RPZ_1=SPY_1+X_1QZ_1,$$

oder nach §. 25, 5. Zus.

$$QX^2=a^2-b^2,\quad QX=\pm\sqrt{a^2-b^2}.$$

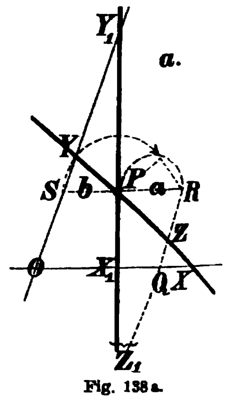
Die entgegengesetzten Zeichen entsprechen den entgegengesetzten Richtungen, in welchen QX von Q aus angetragen werden kann; beide Lösungen sind also zulässig. Wenn P im Winkelraum selbst liegt (Fig. 138a), so fällt stets X_1 zwischen O und Q, da

$$\sqrt{a^2 - b^2} < a + b.$$

Liegt dagegen P aufserhalb des Winkels (Fig. 138b), so wird X_1 auf die Verlängerung von QO fallen, da für $a > b$ auch

$$\sqrt{a^2 - b^2} > a - b.$$

Das Dreieck wird in diesem Fall im Scheitelwinkel des gegebenen Winkels erhalten; PX_1 wird nämlich auch die Verlängerung von SO treffen da



$$\sqrt{a^2 - b^2} < a$$

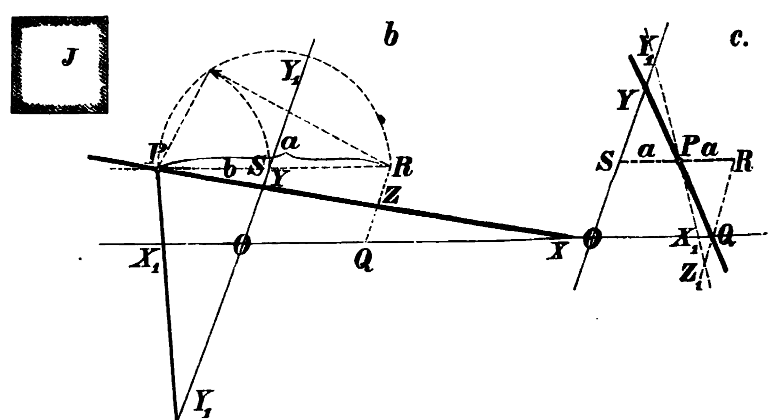


Fig. 138b u. c.

ist. — Beide Werte fallen in einen zusammen (Fig. 138c), wenn $a = b$ ist, $x = o$. Es wird dann das kleinste Dreieck QOY abgeschnitten, das den Bedingungen der Aufgabe genügt; irgend ein anderes Dreieck OY_1X_1, dessen Seite Y_1X_1 durch P geht, übertrifft jenes um $\triangle QX_1Z_1$. Wäre nun $a < b$, $PR < SP$ so wäre ein kleineres Dreieck als QOY abzuschneiden, was unmöglich ist. Dies ergiebt sich auch sofort daraus, dafs dann

$$\sqrt{a^2 - b^2}$$

imaginär wäre.

7. Aufgabe. *Es ist ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Differenzen d_1 und d_2 zwischen der Hypotenuse und je*

einer Kathete gegeben sind. Die beiden Katheten seien x und y, die Hypotenuse z, so ist

$$z - x = d_1, \quad z - y = d_2,$$
$$x = z - d_1, \quad y = z - d_2$$

und da

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

so ist nun

$$(z - d_1)^2 + (z - d_2)^2 = z^2$$
$$z = d_1 + d_2 \pm \sqrt{2 d_1 d_2}$$
$$x = d_2 \pm \sqrt{2 d_1 d_2}$$
$$y = d_1 \pm \sqrt{2 d_1 d_2}$$

so dafs nur

$$w = \sqrt{2 d_1 d_2}$$

zu konstruieren ist. Da in einem Dreieck eine Seite gröfser als die Differenz der beiden andern ist (I. Teil §. 35, 1), also

$$x > d_2, \quad y > d_1,$$

so sind hier nur die oberen Zeichen zulässig. — Die quadratische Gleichung für z ist aber identisch mit:

$$(d_1 - z)^2 + (d_2 - z)^2 = z^2,$$

was den Katheten

$$x = d_1 - z, \quad y = d_2 - z$$

oder

$$z + x = d_1, \quad z + y = d_2$$

entspricht; das negative Zeichen in z entspricht daher der Aufgabe, wenn die Summen der Hypotenuse und je einer Kathete gegeben sind:

$$z = d_1 + d_2 - \sqrt{2 d_1 d_2}, \quad x = \sqrt{2 d_1 d_2} - d_2, \quad y = \sqrt{2 d_1 d_2} - d_1.$$

Hier kann nur das negative Zeichen gelten, weil der Annahme nach $z < d_1$ oder d_2 ist. Es mufs aber hier

$$x - y < z$$

und somit

$$d_1 - d_2 < d_1 + d_2 - \sqrt{2 d_1 d_2}$$

sein oder

$$\sqrt{2 d_1 d_2} < 2 d_2, \quad d_1 < 2 d_2.$$

Zusatz. Die obigen Werte für x, y, z werden rational, sobald

$$\sqrt{2 d_1 d_2}$$

es ist. Setzen wir

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 2p^2,$$

so ist

$$y = 1 + 2p,$$

d. i. irgend eine ungerade Zahl; somit

$$x = 2p^2 + 2p = \frac{(2p+1)^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{2}, \quad z = x + 1 = \frac{y^2 + 1}{2}.$$

Dies giebt die Regel des **Pythagoras** zur Auffindung sogenannter pythagoreischer Zahlendreieke, d. h. solcher rechtwinkeliger Dreiecke, deren Seitenlängen ganze Zahlen sind. — Setzen wir

$$d_1 = 2, \quad d_2 = p^2,$$

so ist:

$$y = 2 + 2p = 2(p+1) = 2m,$$

d. i. irgend eine gerade Zahl,

$$x = p^2 + 2p = (p+1)^2 - 1 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1, \quad z = x + 2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1.$$

Dies führt auf die Regel des **Platon** zur Lösung der genannten Aufgabe.

8. **Aufgabe.** *Es ist ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Kathete a und das Verhältnis derselben zu der Differenz der beiden andern Seiten gegeben ist q : p.*

Die andere Kathete sei b, die Hypotenuse c, also

$$\frac{c-b}{a} = \frac{p}{q}, \quad c - b = \frac{p}{q}\,a,$$

wobei $p < q$ sein mufs, damit $c - b < a$ ist. Da nun

$$c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = a^2,$$

so ergiebt die Division

$$c + b = \frac{q}{p}\,a.$$

Teilt man a nach den betreffenden Verhältnissen, so erhält man aus $(c-b)$ und $(c+b)$ die Werte für c und b.

Die Berechnung ergiebt übrigens auch

$$c = \frac{q^2+p^2}{2qp}\cdot a, \quad b = \frac{q^2-p^2}{2qp}\cdot a.$$

Man konstruiert hier zunächst den Faktor von a nach §. 27, 6 als Streckenverhältnis.

Zusatz. Die letzteren Gleichungen können dazu dienen, die Aufgabe „pythagoreische Zahlendreiecke zu finden" allgemein zu lösen. Setzen wir nämlich $a = 2qp$, so wird

$$b = q^2 - p^2, \quad c^2 = q^2 + p^2,$$

wobei q und p als ganze Zahlen gewählt werden, z. B.:

$$q = 2, \quad p = 1, \quad \text{daher: } a = 4, \quad b = 3, \quad c = 5;$$
$$q = 3, \quad p = 2, \quad \text{daher: } a = 12, \quad b = 5, \quad c = 13.$$

Will man hierbei nur relative Primzahlen für a, b, c erhalten, so müssen q und p ebenfalls als relative Primzahlen und zwar je eine als gerade, die andere als ungerade gewählt werden.

Fügt man zwei solche pythagoreische Dreiecke, welche in einer Kathete übereinstimmen, mit eben dieser Kathete zusammen [wie z. B. 12,

9, 15, die Dreifachen von 4, 3, 5, und 12, 5, 13], so entsteht ein schiefwinkeliges Dreieck [im Beispiel mit den Seiten 15, 13, 14 bzw. 15, 13, 4], dessen Höhe eine rationale Zahl [12] ist, so dafs auch die Werte für den Inhalt, den Radius des ein-, an- und umgeschriebenen Kreises rational sind, wie aus §. 26, 3, 5 und 6 ersichtlich.

Neuntes Kapitel.

Metrische Beziehungen zwischen Strecken bei bestimmten Teilen des rechten Winkels und des Kreisumfangs. Cyklometrie.

§. 29. Winkelfunktionen zu bestimmten Teilen des rechten Winkels.

1. Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke in einem spitzen Winkel übereinstimmen, so ist nach §. 11, 4b und 8 das Verhältnis irgend zweier Seiten des einen Dreiecks gleich dem Verhältnis der entsprechenden Seiten des andern. Es lassen sich in jedem Dreieck sechs Seitenverhältnisse aufstellen:

$$\frac{a}{c}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}.$$

Fig. 139.

Diese für jeden einzelnen spitzen Winkel völlig bestimmten, bei jeder Änderung des Winkels sich ändernden Verhältniszahlen haben den Gesamtnamen Winkelfunktionen (oder goniometrische Funktionen*) und jede derselben hat ihren Einzelnamen erhalten.

2. Unter Sinus**) eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete (Gegenkathete) zur Hypotenuse:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

---

*) Unter Funktionen einer Gröfse x versteht man jede Gröfse, deren Wert sich mit dem von x selbst ändert, z. B. x^m, $\sqrt[n]{x}$.

**) Die Entstehung des Namens Sinus ist höchst eigentümlicher Art, zugleich eine Andeutung des Entwicklungsganges der Mathematik und des Kulturzusammenhanges verschiedener Völker und Zeiten. Griechische Mathematiker nämlich (insbesondere Ptolemäus, 150 n. Chr.) hatten zu astronomischen Zwecken die Gröfse der zu beliebigen Centriwinkeln gehörigen Sehnen berechnet; die unter Anregung griechischer Wissenschaft vielfach selbstthätigen Inder (etwa 500 n. Chr.) hatten die ganze Sehne durch die betreffende Halbsehne ersetzt, nützten aber den hierin liegenden Vorteil nicht aus. Erst die für die Entwickelung der Mathematik so bedeutsamen Araber thaten dies; sie übernahmen auch den indischen Namen für Sehne, jiva, und schrieben denselben, wie sie ihn verstanden, dschiba. Die Konsonanten dieses Wortes lassen aber auch die Lesung

Hieraus folgt unmittelbar:

$$a = c \sin \alpha, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Da in einem Kreis eine Sehne mit dem Durchmesser des einen Grenzpunkts der Sehne und der Verbindungsgeraden der beiden andern Grenzpunkte dieser Strecken ein rechtwinkliges Dreieck bildet, so ist hier der **Sinus eines Peripheriewinkels das Verhältnis seiner Sehne zum Durchmesser.** — Für einfache Teile des rechten Winkels

$$\frac{R}{2}, \quad \frac{R}{3}, \quad \frac{2R}{3}, \quad \frac{R}{5}$$

läſst sich der Sinus sofort ableiten.

Fig. 140.

a) $\sphericalangle \alpha = \frac{R}{2} = 45^0$. Die Normale zu dem einen Schenkel dieses Winkels bestimmt ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck; sind dessen Katheten a, so ist die Hypotenuse $a\sqrt{2}$, also

$$\sin \frac{R}{2} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707.$$

b) $\sphericalangle \alpha = \frac{R}{3} = 30^0$. Die Normale zum einen Schenkel bestimmt die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks; ist also dessen Seite (Hypotenuse) c, so ist die Gegenkathete $\frac{c}{2}$, somit:

$$\sin \frac{R}{3} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

c) $\sphericalangle \alpha = \frac{2R}{3} = 60^0$. Für diesen Winkel folgt aus derselben Figur die Höhe des gleichseitigen Dreiecks $\frac{c}{2}\sqrt{3}$, also:

$$\sin \frac{2R}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866.$$

d) $\alpha = \frac{R}{5} = 18^0$. Dieser Winkel wird durch ein gleichschenkeliges Dreieck erhalten, dessen Grundseite der goldene Abschnitt (§. 10, 2) zu den Schenkeln ist. Denn trägt man in einem solchen Dreieck ABC die Grundseite AB von der Spitze aus auf einen Schenkel ab, $CF = AB$, so ist

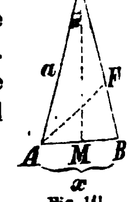


Fig. 141.

$$BC : AB = AB : BF,$$

daher (da auch $\sphericalangle B = B$)

dschaib zu, welches ein wirkliches arabisches Wort ist und „Einschnitt oder Busen“ bedeutet. Nach des Orientalisten Munk Hypothese ist nun das eigentliche Wort verloren gegangen und nur das letztere erhalten geblieben; jedenfalls gaben die ersten Übersetzer arabischer Werke jenes Wort durch das lateinische *sinus* wieder, und dieses blieb erhalten.

$$\triangle ABF \backsim CBA$$

(AF antiparallel zu CA), woraus folgt

$$\angle BAF = C \quad \text{und} \quad AF = AB = CF,$$

somit auch

$$\angle FAC = C, \quad \angle CAB = 2C \quad \text{und} \quad \angle B = CAB = 2C.$$

Die Winkelsumme des Dreiecks ABC ist

$$5C = 2R, \quad \angle C = \frac{2R}{5}.$$

Die Höhe CM zur Basis ergiebt daher

$$\angle MCA = \frac{R}{5}.$$

Ist der Schenkel a, die Basis x, so ist

$$a:x = x:(a-x), \quad x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \quad \sin\frac{R}{5} = \frac{x}{2a}$$

$$\sin\frac{R}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = 0{,}309 \ \ldots.$$

Die Berechnung von $\sin\frac{R}{4}$, $\sin\frac{R}{6}$ aus den Funktionen von $\frac{R}{2}$ und $\frac{R}{3}$ wird in 8 folgen.

e) $\angle\alpha = 0$. Mit der Änderung eines Winkels ändert sich auch dessen Sinus. Lassen wir bei unveränderter Hypotenuse (Figur 142) den Winkel wachsen, so wächst auch die Gegenkathete und mit ihr proportional der Sinus. Nimmt der Winkel immer mehr ab, so wird bei unveränderter Hypotenuse die Gegenkathete unbeschränkt kleiner werden, somit ist

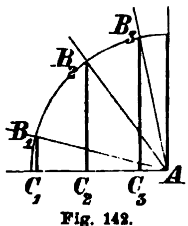


Fig. 142.

$$\sin 0 = 0.$$

f) $\angle\alpha = R = 90^0$. Wächst dagegen der Winkel gegen R, so kommt die Gröfse der Gegenkathete der der Hypotenuse näher und näher; bei der Grenze folgt:

$$\sin R = 1.$$

Zusatz. Die Winkelfunktionen sind unbenannte Zahlen. Sobald man jedoch irgend welche Strecke als Längeneinheit gewählt hat, kann man auch die Winkelfunktionen durch Strecken darstellen, indem nämlich durch die Messung der Strecke der Wert der betreffenden Winkelfunktion sich ergiebt. Setzt man so die Hypotenuse $c = 1$, so wird $\sin\alpha = a$. In dieser Weise wurde der Sinus in §. 15, 4 bestimmt. — Ist der Durchmesser eines Kreises 1, so stellt eine Sehne zugleich den Sinus des zugehörigen Peripheriewinkels dar.

3. In einem rechtwinkligen Dreieck ist mit einem spitzen Winkel α auch der andere $\beta = R - \alpha$, d. i. der sogenannte Complementwinkel von α bestimmt. Nun ist (Fig. 139) $\frac{b}{c} = \sin\beta =$ complementi sinus α, kurz Cosinus von α. Der Cosinus eines Winkels im rechtwinkeligen Dreieck ist sonach das Verhältnis der anliegenden Kathete (Ankathete) zur Hypotenuse:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c},$$

woraus folgt:

$$b = c\cos\alpha, \quad c = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Auch hier ergiebt sich (Fig. 140): Für einen Peripheriewinkel, dessen einer Schenkel Durchmesser ist, ist der Cosinus das Verhältnis der Sehne des andern Schenkels zum Durchmesser.

Nun ist

$$\cos\alpha = \sin\beta = \sin(R - \alpha), \quad \sin\alpha = \cos\beta = \cos(R - \alpha), \quad \text{d. h.:}$$

a) *Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des Complementwinkels.*

Hiernach ergeben sich sofort aus 2 die Werte:

$$\cos\frac{R}{2} = \sin\frac{R}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \cos\frac{4R}{5} = \sin\frac{R}{5} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

$$\cos\frac{R}{3} = \sin\frac{2R}{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \cos 0^0 = \sin R = 1,$$

$$\cos\frac{2R}{3} = \sin\frac{R}{3} = \tfrac{1}{2}, \qquad \cos R = \sin 0 = 0.$$

b) Um den Zusammenhang zwischen dem Sinus und Cosinus ein- und desselben Winkels abzuleiten, beachten wir, dafs $a^2 + b^2 = c^2$ oder $c^2 \cdot \sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha = c^2$, woraus durch Division mit c^2 folgt:

I. $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha},$$

z. B. $$\sin\frac{4R}{5} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{4R}{5}} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{16}(6 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 0{,}951 = \cos\frac{R}{5}.$$

4. Unter Tangens eines Winkels im rechtwinkeligen Dreieck versteht man das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$

hieraus:

$$a = b\operatorname{tg}\alpha, \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Denken wir uns auf den einen Schenkel eines Centriwinkels im Kreis die normale Tangente bis zum Schnittpunkt mit dem andern Schenkel gezogen, so ist das Verhältnis der so begrenzten Tangente zum Radius die Tangens des Centriwinkels. Ist $AC = 1$, so ist $BC = \text{tg}\ \alpha$.

Fig. 143.

Da $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \text{tg}\ \alpha$, so folgt:

$$\textbf{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{II.}$$

Hieraus: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$

Daher: $\text{tg}\ \frac{R}{2} = 1,$ $\qquad \text{tg}\ \frac{R}{5} = \sqrt{1 - 0{,}4\sqrt{5}}.$

$\text{tg}\ \frac{R}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3},$ $\qquad \text{tg}\ 0 = \frac{0}{1} = 0,$

$\text{tg}\ \frac{2R}{3} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$ $\qquad \text{tg}\ R = \frac{1}{0} = \infty.$

5. Für den Complementwinkel β folgt (wie in 3) $\frac{b}{a} = \text{tg}\ \beta$, d. i. die Cotangens von α. Unter Cotangens eines Winkels im rechtwinkeligen Dreieck versteht man das Verhältnis der Ankathete zur Gegenkathete:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{b}{a},$$

hieraus: $b = a\ \text{cotg}\ \alpha, \qquad a = \frac{b}{\text{cotg}\ \alpha},$ d. h.:

a) *Die Cotangens eines Winkels ist gleich der Tangens des Complementwinkels.*

Z. B.:

$\text{cotg}\ \frac{R}{2} = 1, \quad \text{cotg}\ \frac{R}{3} = tg\ \frac{2R}{3} = \sqrt{3}, \quad \text{cotg}\ \frac{2R}{3} = \text{tg}\ \frac{R}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3},$

$\text{cotg}\ 0 = \frac{1}{0} = \infty, \quad \text{cotg}\ R = \frac{0}{1} = 0.$

Übrigens läfst sich die Cotangens auch berechnen nach der sich sofort ergebenden Formel:

$$\textbf{cotg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad \text{II'.}$$

Hieraus: $\text{cotg}\ \alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$

b) Den Zusammenhang zwischen Tangens und Cotangens desselben Winkels lehrt die Formel:

$$\textbf{tg}\ \alpha\ .\ \textbf{cotg}\ \alpha = 1. \qquad \text{III.}$$

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}.$$

Zusatz. Die Verhältnisse $\frac{c}{b}$ und $\frac{c}{a}$ belegte man mit den Namen Sekans und Cosekans des Winkels α:

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{cosec} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha},$$

macht aber selten Gebrauch von denselben. Es ist (Fig. 143)

$$\sec\alpha = \frac{AB}{AC}; \text{ für } AC = 1 \text{ ist somit } \quad \sec\alpha = AB.$$

6. Nach den angegebenen Formeln läfst sich jede Funktion leicht in den zuvor angegebenen ausdrücken. Soll umgekehrt sin oder cos eines Winkels in dessen tg oder cotg ausgedrückt werden, so beachte man, dafs nach I und II':

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha, \quad \text{woraus}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}.$$

Die letztere Form entsteht aus der vorhergehenden, indem man Zähler und Nenner mit $\operatorname{tg}\alpha$ multipliziert und III berücksichtigt. — Ebenso:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}}.$$

7. Um für weitere Teile des rechten Winkels die Winkelfunktionen zu finden, leiten wir die Beziehungen ab, welche zwischen den Funktionen zweier Winkel bestehen, von welchen der eine die Hälfte des andern ist.

Wird in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Kathete CA um $AQ = AB$ verlängert, so ist

$$\sphericalangle AQB = QBA = \frac{\alpha}{2}.$$

Fig. 144.

Zieht man noch $AF \perp BQ$, so ist

$$QF = FB = c\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad QB = 2c\cos\frac{\alpha}{2};$$

ferner:

$$a = QB\sin\frac{\alpha}{2} = 2c\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$b = QC - QA = QB\cos\frac{\alpha}{2} - c = 2c\cos^2\frac{\alpha}{2} - c.$$

Da nun $a = c\sin\alpha$ und $b = c\cos\alpha$, so folgt:

$$\text{IV.} \qquad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{V.}$$

Letztere Form folgt aus der vorhergehenden durch Substitution von

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Indem wir in IV für α den Wert 2α einsetzen, in V dagegen $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ berechnen, erhalten wir die Formeln:

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.} \qquad \text{IV}'.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \text{V}'.$$

Durch Division ergiebt sich hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \\ \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \end{aligned}\right\} \text{VI.}$$

Durch Subtraktion folgt:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{VI}'.$$

Anmerkung. Obige Formeln ergeben sich auch aus dem ptolemäischen Lehrsatz (§. 26, 7), wenn man in einem Kreis, dessen Durchmesser 1 ist (vgl. 2, Zusatz), an einem Grenzpunkt eines Durchmessers an diesen beiderseits $\sphericalangle\,\alpha$ anträgt, bzw. an jedem Grenzpunkt einerseits.

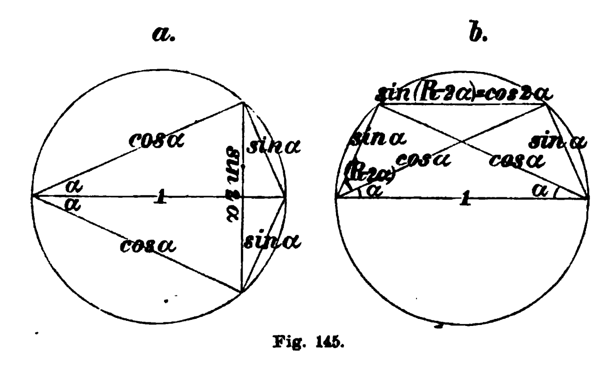


Fig. 145.

8. Mit diesen Formeln lassen sich nun die Funktionen von $\frac{R}{4}$, $\frac{R}{6}$, $\frac{R}{8}$ u. s. w. bestimmen. Wir setzen in V′:

a) $\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{4} = 22\frac{1}{2}^0$; $\sin\frac{R}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{R}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

$$\cos\frac{R}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

b) $\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{6} = 15^0$; $\sin\frac{R}{6} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2});$$

$$\cos\frac{R}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

c) $\frac{\alpha}{2} = \frac{2R}{5} = 36^0$; $\sin\frac{2R}{5} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{4R}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sin\frac{R}{5}}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos\frac{3R}{5},$$

oder in V $\alpha = \frac{2R}{5}$

$$\cos\frac{2R}{5} = 1 - 2\sin^2\frac{R}{5} = 1 - \frac{2}{16}(6-2\sqrt{5})$$

$$= \frac{1}{16}(4+4\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \sin\frac{3R}{5}.$$

Hiernach ergeben sich leicht die weiteren Funktionen, z. B.:

$$\operatorname{tg}\frac{R}{6} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{R}{6} = 2+\sqrt{3}.$$

§. 30. Sehnen und Tangenten zu bestimmten Teilen des Kreisumfangs. Seiten der regelmäſsigen Vielecke.

1. Die Bestimmung der zu dem n^{ten} Teil des Kreisumfangs gehörigen Sehne, bzw. der Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäſsigen $n$ecks (I. Teil §. 44, 4, 5) geht von dem zu der Sehne gehörigen Centriwinkel aus: $\alpha_n = \frac{4R}{n}$. Das von der Sehne und den Radien nach deren Grenzpunkten gebildete Dreieck ist gleichschenkelig; daher sind alle Winkel desselben und somit auch die Seitenverhältnisse bestimmt.

So ergiebt sich für den sechsten Teil des Umfangs

$$\alpha_6 = \frac{4R}{6} = \frac{2R}{3} = 60^0,$$

ein gleichseitiges Dreieck und die Sehne $s_6 = r$, d. h. gleich dem Radius; für den vierten Teil des Umfangs, $\alpha_4 = R = 90^0$, ergiebt sich ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck, $s_4 = r\sqrt{2}$; für den zehnten Teil,

$$\alpha_{10} = \frac{4R}{10} = \frac{2R}{5}$$

ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Basis der goldene Abschnitt des Radius ist (§. 29, 2d), woraus folgt:

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Allgemein: da der Peripheriewinkel $\frac{\alpha_n}{2} = \frac{2R}{n}$ ist, so ist nach §. 29, 2:

$$\frac{s_n}{2r} = \sin\frac{2R}{n}, \quad \boldsymbol{s_n = 2r \cdot \sin\frac{2R}{n}}.$$

So ergiebt sich z. B. für s_3 und s_5 (was leicht aus s_6 bzw. s_{10} zu konstruieren ist):

$$s_3 = 2r\sin\frac{2R}{3} = r\sqrt{3}, \quad s_5 = 2r\sin\frac{2R}{5} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

für s_8 und s_{12} (was aus s_4 und s_6 konstruiert werden kann):

$$s_8 = 2r\sin\frac{2R}{8} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad s_{12} = 2r\sin\frac{2R}{12} = \frac{r}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Zusatz. a) Ist (Fig. 146) $BC = s_5$ und $CA = s_{10}$, so ist

$$\sphericalangle CMB = \frac{4R}{5}, \quad CMA = \frac{2R}{5}, \quad MCB = \tfrac{3}{5}R,$$

und wenn $\sphericalangle AMC$ durch MF halbiert wird, so ist auch

$$\sphericalangle FMB = \tfrac{3}{5}R,$$

daher MF antiparallel zu MC im Zweistrahl BM, BC; folglich (§. 8, 2):

$$\overline{BM}^2 = BF \cdot BC.$$

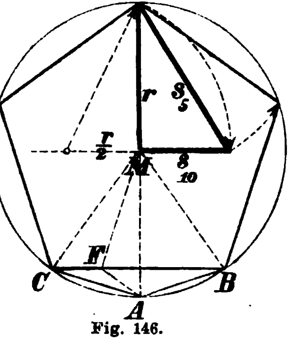


Fig. 146.

Ebenso ist im Zweistrahl CA, CB die Gerade FA antiparallel AB, da

$$\sphericalangle ABC = ACB = CAF$$

(denn F liegt auf der Mittelnormale zu AC); folglich:

$$\overline{CA}^2 = CF \cdot CB.$$

Somit

$$\overline{BM}^2 + \overline{CA}^2 = BC(BF + FC) = \overline{BC}^2$$

oder

$$\boldsymbol{r^2 + s_{10}^2 = s_5^2}.$$

b) Der Peripheriewinkel zum 15. Teil des Umfangs ist

$$\alpha_{15} = \frac{2R}{15} = \frac{5R}{15} - \frac{3R}{15} = \frac{R}{3} - \frac{R}{5} = \frac{2R}{6} - \frac{2R}{10}.$$

Trägt man daher von demselben Punkt aus s_6 und s_{10} in den Umfang ein, so ergiebt die Differenz der zugehörigen Bögen den 15. Teil des Umfangs. Nach dem ptolemäischen Lehrsatz (§. 26, 7) ist dann:

$$2r \cdot s_{15} = r \cdot \sqrt{(2r)^2 - s_{10}^2} - s_{10} \cdot r\sqrt{3}$$

$$s_{15} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{4r^2 - s_{10}^2} - s_{10}\sqrt{3}\right],$$

woraus durch Einsetzung von $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ folgt:

$$s_{15} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right].$$

Fig. 147.

Daher ist nun auch

$$\sin\frac{2R}{15} = \frac{s_{15}}{2r} = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right].$$

2. Wenn die Sehne s_n eines Bogens und der Radius r des Kreises gegeben ist, so läfst sich nun auch die Sehne s_{2n} zu der Hälfte des Bogens berechnen. Es kann dies entweder durch Aufstellung der betreffenden Streckenverhältnisse an der Figur geschehen, wie

$$s_{2n}^2 = 2r \cdot x, \quad x(2r - x) = \frac{s_n^2}{4} \text{ u. s. w.},$$

Fig. 148.

oder mit Benutzung der Formeln in §. 29, 7:

$$s_{2n} = 2r\sin\frac{2R}{2n} = 2r\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{2R}{n}}{2}} = r\sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \sin^2\frac{2R}{n}}\right)}$$

$$s_{2n} = r\sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}\right)} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{(2r)^2 - s_n^2}\right)}.$$

Umgekehrt folgt, wenn s_{2n} gegeben ist, die Sehne des doppelten Bogens:

$$s_n = 2r\sin\frac{2R}{n} = 4r\sin\frac{2R}{2n}\cdot\cos\frac{2R}{2n} = 4r\cdot\frac{s_{2n}}{2r}\sqrt{1 - \left(\frac{s_{2n}}{2r}\right)^2},$$

$$s_n = 2s_{2n}\sqrt{1 - \left(\frac{s_{2n}}{2r}\right)^2}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln läfst sich die Seite des regelmäfsigen Zwölfecks und die des Dreiecks aus der des Sechsecks berechnen, die

des Achtecks aus der des Vierecks, des Fünfecks aus der des Zehnecks u. s. w. Durch wiederholte Anwendung derselben erhält man die Seiten der Vielecke, deren Eckenanzahl $1 \cdot 2^n$, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$, $15 \cdot 2^n$ ist.

Anmerkung. Seit Euklid (300 v. Chr.) waren die genannten die einzigen regelmäfsigen Vielecke, welche man durch Benutzung von Gerade und Kreis zu konstruieren wufste, bis im Jahre 1801 K. F. Gaufs zeigte, dafs mit diesen Hilfsmitteln jedes Vieleck von $(2^n + 1)$ Seiten konstruiert werden kann, wenn diese Zahl eine Primzahl ist, wie $2^4 + 1 = 17$, $2^8 + 1 = 257$.

3. Zu einem regelmäfsigen eingeschriebenen n-eck erhält man das umgeschriebene, indem man Tangenten zieht in den Ecken des ersteren oder parallel zu den Seiten desselben. Der zur Seite gehörige Centriwinkel ist auch hier $\alpha_n = \frac{4R}{n}$ und für die Seite t_n ergiebt sich unmittelbar:

$$\frac{t_n}{2r} = \operatorname{tg}\frac{2R}{n}, \quad t_n = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{2R}{n}.$$

Fig. 149.

Z. B.:

$$t_6 = 2r \cdot \sqrt{3}, \quad t_{12} = 2r\,(2 - \sqrt{3}) \quad (§. 29, 8).$$

Der Zusammenhang zwischen s_n und t_n läfst sich entweder aus der Figur durch eine Proportion ermitteln oder durch die Formeln der Winkelfunktionen:

$$\operatorname{tg}\frac{2R}{n} = \frac{\sin\frac{2R}{n}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{2R}{n}}}.$$

a) $$t_n = \frac{s_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}}.$$

Umgekehrt folgt aus

$$\sin\frac{2R}{n} = \frac{\operatorname{tg}\frac{2R}{n}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{2R}{n}}}:$$

b) $$s_n = \frac{t_n}{\sqrt{1 + \left(\frac{t_n}{2r}\right)^2}}.$$

4. Die Seite des umgeschriebenen regelmäfsigen $2n$-ecks ist

$$t_{2n} = 2r \operatorname{tg}\frac{R}{n}.$$

Nun folgt aus §. 29, 7, IV:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}, \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{2R}{2n} = \tfrac{1}{2}\sin\frac{2R}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{R}{n},$$

somit:

a) $$s_{2n} = \sqrt{\frac{s_n\cdot t_{2n}}{2}}.$$

Eine andere Beziehung zwischen diesen Seiten ergiebt sich aus §. 29, 7, VI:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{R}{n}} = \frac{1}{\sin\frac{2R}{n}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{2R}{n}}$$

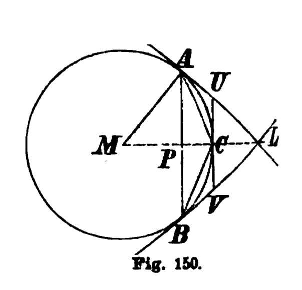


Fig. 150.

und somit auch

$$\frac{1}{t_{2n}} = \frac{1}{s_n} + \frac{1}{t_n};$$

woraus folgt:

b) $$t_{2n} = \frac{s_n t_n}{s_n + t_n}.$$

Beide Beziehungen ergeben sich auch algebraisch aus den Formeln in 3 und geometrisch aus den in Figur 150 abzulesenden Proportionen:

$$CU : AC = AC : AB$$

oder

$$\frac{t_{2n}}{2} : s_{2n} = s_{2n} : s_n$$

und

$$UV : AB = LU : LA$$

oder

$$t_{2n} : s_n = \frac{t_n - t_{2n}}{2} : \frac{t_n}{2}.$$

5. Die Aufgabe: *Zu einer gegebenen Strecke als Seite ein regelmäfsiges Vieleck zu konstruieren*, kann man, wenn es sich um eines der betrachteten Vielecke handelt, stets dadurch lösen, dafs man aus der Formel für die Seite den Radius ausrechnet und den algebraischen Ausdruck konstruiert, — oder indem man ein regelmäfsiges Vieleck von der angegebenen Eckenzahl in einen Kreis zeichnet und hierzu das ähnliche mit der gegebenen Seite. Ganz einfach ist übrigens die Konstruktion des regelmäfsigen Drei-, Vier-, Sechs-, Acht-, Zwölfecks: bei Acht- und Zwölfeck handelt es sich nur um die Konstruktion des

Aufsenwinkels $\frac{R}{2}$ bzw. $\frac{R}{3}$. Da in einem regelmäfsigen **Fünfeck** $ABCD$ (Fig. 151) der Aufsenwinkel $\frac{4R}{5}$ beträgt, so ist der Winkel zwischen Seite AE und Diagonale AD

$$\sphericalangle EAD = \frac{2R}{5},$$

$$\sphericalangle BAD = 2R - \left(\frac{4R}{5} + \frac{2R}{5}\right) = \frac{4R}{5};$$

das $\triangle ABD$ ist daher dem in §. 29, 2d ähnlich und die Seite AD wird gemäfs §. 10, 2 Zusatz a konstruiert.

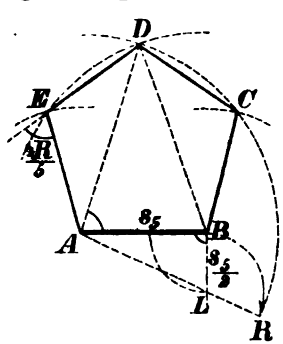
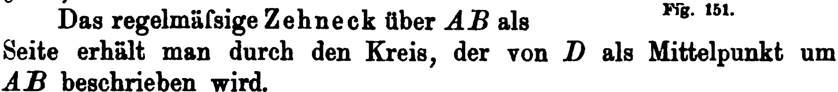


Fig. 151.

Das regelmäfsige **Zehneck** über AB als


Seite erhält man durch den Kreis, der von D als Mittelpunkt um AB beschrieben wird.

§. 31. Umfang und Fläche der regelmäfsigen Vielecke.

1. Es mögen e_n und u_n den Umfang des einem Kreise mit dem Radius r ein-, bzw. umgeschriebenen n-ecks bedeuten, so ist:

$$e_n = n \cdot s_n = 2nr \sin \frac{2R}{n}, \qquad u_n = n \cdot t_n = 2nr \operatorname{tg} \frac{2R}{n}.$$

Z. B.:

$$e_6 = 12r \sin \frac{R}{3} = 6r, \qquad u_6 = 12r \operatorname{tg} \frac{R}{3} = 4\sqrt{3} \cdot r = 6{,}928\, r,$$

$$e_{12} = 24r \sin \frac{R}{6} = 6r(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 6{,}2117r,$$

$$u_{12} = 24r \operatorname{tg} \frac{R}{6} = 24r(2 - \sqrt{3}) = 6{,}431r.$$

Ebenso ist:

$$e_{2n} = 2ns_{2n} = 4nr \cdot \sin \frac{R}{n}, \qquad u_{2n} = 2nt_{2n} = 4nr \cdot \operatorname{tg} \frac{R}{n}.$$

Aus Formel IV (S. 116) folgt aber, da $\cos \frac{\alpha}{2} < 1$ ist:

$$\sin \alpha < 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

und aus VI′ (S. 117): $\operatorname{tg} \alpha > 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Daher ist nun auch: $\sin \frac{R}{n} < 2 \sin \frac{2R}{n}$, $\operatorname{tg} \frac{2R}{n} > 2 \operatorname{tg} \frac{R}{n}$,

oder $e_n < e_{2n}$, $u_n > u_{2n}$,

was auch unmittelbar aus Figur 150 erkannt werden kann; denn dort ist sowohl $AC + CB > AB$ oder $2s_{2n} > s_n$,

als auch

$$AU + UV + VB < AL + LB$$

oder

$$\frac{t_{2n}}{2} + t_{2n} + \frac{t_{2n}}{2} < \frac{t_n}{2} + \frac{t_n}{2}, \qquad 2t_{2n} < t_n, \qquad \text{d. h.:}$$

Der Umfang des eingeschriebenen regelmäfsigen $2n$-ecks ist gröfser als der des n-ecks; der Umfang des umgeschriebenen regelmäfsigen $2n$-ecks ist kleiner als der des n-ecks.

2. Beziehungen zwischen e_n, u_n, e_{2n}, u_{2n} ergeben sich aus §. 30, 4. Nämlich aus

$$s_{2n} = \sqrt{\frac{s_n \cdot t_{2n}}{2}} \qquad \text{folgt} \qquad 2ns_{2n} = \sqrt{ns_n \cdot 2nt_{2n}}$$

oder

$$e_{2n} = \sqrt{e_n u_{2n}}, \qquad \text{d. h.:}$$

a) *Der Umfang eines eingeschriebenen $2n$-ecks ist das geometrische Mittel zwischen den Umfängen des eingeschriebenen n-ecks und des umgeschriebenen $2n$-ecks.*

Da ferner
$$t_{2n} = \frac{t_n s_n}{t_n + s_n},$$

so ist
$$2nt_{2n} = \frac{2nt_n \cdot ns_n}{nt_n + ns_n}$$

oder
$$u_{2n} = \frac{2u_n e_n}{u_n + e_n}, \qquad \text{d. h.:}$$

b) *Der Umfang eines umgeschriebenen $2n$-ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Umfängen des um- und eingeschriebenen n-ecks.* (Vgl. §. 3, 5.)

In der Reihe u_n, e_n, u_{2n}, e_{2n}, u_{4n}, e_{4n}, u_{8n}, e_{8n} ... ist also vom dritten Glied an jedes an ungerader Stelle das harmonische, jedes an gerader das geometrische Mittel der beiden ihm unmittelbar vorangehenden Glieder.

3. Wenn E_n und U_n die Fläche des einem Kreise vom Radius r ein-, bzw. umgeschriebenen n-ecks bedeuten, so gilt für die Fläche eines Dreiecks, das aus einer Seite und den Radien nach deren Grenzpunkten gebildet ist (Fig. 150):

a) $$\triangle AMC = \frac{1}{n} \cdot E_n = \frac{MC \cdot AP}{2} = \frac{r \cdot r \cdot \sin \alpha_n}{2} = \frac{r^2}{2} \cdot \sin \frac{4R}{n}$$

$$E_n = \frac{nr^2}{2} \cdot \sin \frac{4R}{n}.$$

Für AP folgt auch gemäfs §. 30, 2:

$$AP = s_n \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2};$$

somit:

$$E = \frac{nrs_n}{2}\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}.$$

b) $$\triangle UVM = \frac{1}{n}U_n = \frac{MC\cdot UV}{2} = \frac{r\cdot t_n}{2} = \frac{r}{2}\cdot 2r\ \mathrm{tg}\,\frac{2R}{n},$$

$$\boldsymbol{U_n = nr^2\cdot \mathrm{tg}\,\frac{2R}{n}} = \frac{nrt_n}{2},$$

Z. B.: $$E_{12} = 6r^2 \sin\frac{R}{3} = 3r^2,$$

$$U_{12} = 12r^2\ \mathrm{tg}\,\frac{R}{6} = 12r^2(2-\sqrt{3}).$$

Zusatz. Es läſst sich erweisen, daſs

$$E_{2n} = \sqrt{E_n U_n},\qquad U_{2n} = \frac{2E_{2n}U_n}{E_{2n}+U_n}.$$

§. 32. Umfang und Fläche des Kreises.

1. Nach §. 31 nimmt der Umfang des einbeschriebenen Vielecks mit der Zahl der Ecken desselben zu, d. h. der Umfang ist um so gröſser, je mehr Punkte er mit dem Kreise gemeinsam hat. Läſst man die Zahl dieser Punkte unbeschränkt wachsen, so ergiebt sich schlieſslich, daſs der Umfang des Kreises selbst gröſser ist als der jedes einbeschriebenen regelmäſsigen Vielecks. Dagegen nimmt der Umfang der umgeschriebenen regelmäſsigen Vielecke mit der Zunahme der Eckenzahl ab, woraus folgt, daſs der Kreisumfang kleiner ist als der jedes umbeschriebenen regelmäſsigen Vielecks. Der Umfang des Kreises u liegt daher zwischen

$$e_n = 2r\cdot n\sin\frac{2R}{n}\qquad \text{und}\qquad u_n = 2r\cdot n\ \mathrm{tg}\,\frac{2R}{n}.$$

Da der Quotient

$$n\sin\frac{2R}{n} : n\ \mathrm{tg}\,\frac{2R}{n} = \cos\frac{2R}{n}$$

mit wachsendem n sich dem Werte

$$\cos\frac{2R}{\infty} = \cos 0 = 1$$

nähert, so folgt, daſs

$$n\sin\frac{2R}{n}\qquad \text{und}\qquad n\ \mathrm{tg}\,\frac{2R}{n}$$

sich mit wachsendem Werte ein und derselben Zahl nähern, welche man mit π (Anfangsbuchstabe von περιφέρεια = Umfang) zu bezeichnen pflegt.

Der Flächeninhalt J des Kreises liegt zwischen

$$E_n = r^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{4R}{n} \quad \text{und} \quad U_n = r^2 \cdot n \operatorname{tg} \frac{2R}{n}.$$

Die Coefficienten von r^2 nähern sich nun mit wachsendem n ebenderselben Zahl π, da auch der Quotient

$$\frac{n}{2} \cdot \sin \frac{4R}{n} : n \operatorname{tg} \frac{2R}{n} = n \sin \frac{2R}{n} \cdot \cos \frac{2R}{n} : n \operatorname{tg} \frac{2R}{n} = \cos^2 \frac{2R}{n}$$

mit wachsendem n zu 1 wird.

Da der Umfang u und Inhalt J des Kreises stets zwischen den angegebenen Grenzen liegen mufs und diese immer mehr sich nähern bis zu $2r \cdot \pi$, bzw. bis zu $r^2 \cdot \pi$, so müssen die Formeln gelten:

$$\boldsymbol{u = 2\pi r, \quad J = \pi r^2.}$$

Ist der Durchmesser des Kreises $d = 2r$, so ist auch

$$\boldsymbol{u = \pi d, \quad J = \pi \frac{d^2}{4}.}$$

Daraus folgt:

Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien oder Durchmesser, ihre Flächen verhalten sich wie die Quadrate der letzteren.

Um nun π annäherungsweise zu bestimmen, ist es notwendig, sin und tg kleiner Winkel zu berechnen. Es lassen sich hierzu die Formeln anwenden (vgl. §. 30, 4):

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \quad \text{oder} \quad l \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left[l \frac{1}{\sin \alpha} + l \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + l\, 2 \right]$$

Gehen wir von dem in §. 30, 1 Zusatz b bestimmten Wert $\sin \frac{2R}{15} = 0{,}2079117$ aus, und berechnen hierzu zunächst $\operatorname{tg} \frac{2R}{15}$, so ergiebt sich für die Berechnung von π folgende Ausführung:

n	$\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{2R}{n}}$	$\frac{1}{\sin \frac{2R}{n}}$	$l \frac{1}{\sin \frac{2R}{n}}$	$l \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{2R}{n}}$	$2l \frac{1}{\sin \frac{2R}{n}}$
15	4,704 630	4,809 734	0,682 1210	[0,301 0300 = l 2]	
30	1) 9,514 364	5) 9,566 771	4) 0,980 7654	2) 0,978 3798	3) 1,961 5308
60	19,081 135	19,107 32	1,281 1998	1,280 6042	2,562 3996
120	38,188 46	38,201 54	1,582 0809	1,581 9321	3,164 1619
240	76,390 00	76,396 55	1,883 0737	1,883 0365	3,766 1474
480	152,7866	152,7898	2,184 0944	2,184 0851	4,368 1888

Daher ist für $n = 480$

$$l \sin \frac{2R}{n} = 0{,}815\,9056 - 1$$

$$l\, n \quad = 2{,}681\,2412$$

$$l \operatorname{tg} \frac{2R}{n} = 0{,}815\,9149 - 1$$

$$l\, n \sin \frac{2R}{n} = 0{,}497\,1468, \quad n \sin \frac{2R}{n} = 3{,}14\,157$$

$$l\, n \operatorname{tg} \frac{2R}{n} = 0{,}497\,1561, \quad n \operatorname{tg} \frac{2R}{n} = 3{,}14\,164,$$

$$3{,}14\,157 < \pi < 3{,}14\,164,$$

so dafs nahezu auf vier Decimalen genau kann gesetzt werden

$$\pi = 3{,}1416, \quad l\,\pi = 0{,}49\,715.$$

Für die Multiplikation und Division mit π merke man, dafs bis auf den eben angegebenen Grad der Genauigkeit auch:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{800}, \qquad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{60} + \frac{1}{600}.$$

Letzteres dient zur Berechnung von r oder d, wenn der Umfang oder Inhalt gegeben ist:

$$r = \frac{u}{2\pi}, \qquad r = \sqrt{\frac{J}{\pi}}$$

$$d = \frac{u}{\pi}, \quad d = 2\sqrt{\frac{J}{\pi}}.$$

Anmerkung. — Die roheste Ausmessung des Verhältnisses π zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser ergiebt $\pi = 3$. Dieser Wert findet sich auch in der That benutzt in der Bibel (1. Buch der Könige Kap. 7, V. 23) ferner im Talmud und in einem alten chinesischen Werke. — Die älteste genauere Angabe für π findet sich in einem dem 17. Jahrhundert vor Christus angehörenden, vielleicht selbst auf das 22. Jahrhundert zurückreichenden ägyptischen Papyrus, nämlich $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604$. — Archimedes von Syracus (278—212 v. Chr.) berechnete die Umfänge der dem Kreise ein- und umgeschriebenen regelmäfsigen Vielecke bis zum 96eck und fand als Resultat, dafs π zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liegt. Gewöhnlich wird der letztere Wert $\pi = \frac{22}{7} = 3{,}1428\,..$ gewählt, weil wegen der kleinen Zahlen bequem und für viele Fälle der Praxis hinreichend genau. Ptolemäus (150 n. Chr.) benutzte $\pi = \frac{377}{120} = 3{,}14166\,..$; noch etwas genauer ist die von den Indern benutzte Zahl $\pi = \frac{3927}{1250} = 3{,}1416$.

— Erst gegen Ende des 16. Jahrhunderts wurde π mit einer Genauigkeit berechnet, welche jedes Bedürfnis weit übertrifft: von Vieta (1579) auf 10 Decimalen, von Ludolf van Ceulen (gespr. Cöln, 1540—1610) auf 20, dann 32, zuletzt auf 35 Decimalen. Der letztere Wert stand in seiner Grabschrift und hiefs die Ludolf'sche Zahl. — Adriaan Anthoniszoon (Vater des bekannteren Adriaan Metius) fand (vor 1589) $\pi < 3\frac{17}{120}$ und $\pi > 3\frac{15}{106}$ und indem er je aus Zählern und Nennern das arithmetische Mittel nahm, setzte er

$$\pi = 3\frac{16}{113} \quad \text{oder} \quad \pi = \frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots.$$

Mit Hülfe von Reihen ist die Berechnung von π noch weiter geführt worden. Als Irrationalzahl läfst sich π nie genau in Bruchteilen der Einheit ausdrücken.

Auf 8 Decimalen genau ist $\pi = 3{,}14159265$.

2. Die Aufgabe: *Eine Strecke zu konstruieren, welche gleich dem Umfang des Kreises ist,* die Rektifikation des Kreises, läfst sich nur annäherungsweise mit Lineal und Zirkel lösen. Man trägt am einfachsten den Durchmesser $3\frac{1}{7}$mal ab, da $\frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots$ ist. Genauer ist folgende Konstruktion. Man konstruiert $\sphericalangle BMC = \frac{R}{3}$ und die Tangente in B $CL = 3r$, so ist AL ungefähr gleich dem Halbkreis. Es ist nämlich

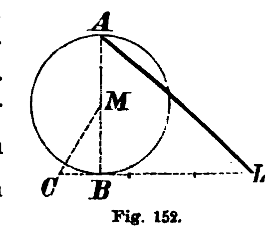


Fig. 152.

$$AL = (2r)^2 + \left(3r - r\operatorname{tg}\frac{R}{3}\right)^2, \quad AL = r\sqrt{13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}14150\,r$$

(Kochansky 1685).

3. Die Aufgabe: *Die Fläche eines Kreises in eine inhaltsgleiche geradlinig begrenzte Fläche, etwa ein Quadrat, zu verwandeln,* die Quadratur des Kreises hat viele Jahrhunderte lang die Menschen beschäftigt, so dafs sie sprichwörtlich geworden ist.

Da $J = \pi r^2 = \pi r \cdot r = \frac{u}{2} \cdot r$, so ist *der Inhalt des Kreises gleich dem eines Dreiecks, dessen Grundseite gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem Radius ist.* Hiermit ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

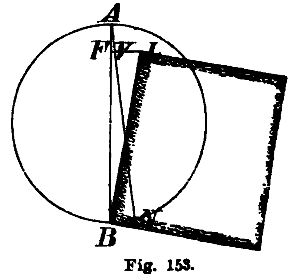


Fig. 153.

Die Quadratseite $x = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{2}\sqrt{\pi}$ ist nach dem ägyptischen Wert für $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ ungefähr $= \frac{8}{9}\,d$. — Genauer ist folgende

Konstruktion. Wird $AF = \frac{1}{8} AB$, BN und $FL \perp AB$ gezogen, $BN = AF$ und nachdem AVN gezogen $VL = AF$ gemacht, so ist BL die Quadratseite. Es ist nämlich

$$BF = \tfrac{7}{4} r, \quad FV = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{4} r = \tfrac{1}{32} r, \quad FL = \tfrac{9}{32} r,$$

$$BL^2 = (\tfrac{7}{4} r)^2 + (\tfrac{9}{32} r)^2 = \tfrac{3217}{1024} r^2 = 3{,}14160\, r^2 \quad \text{(Baader 1880).}$$

§. 33. Berechnung von Kreisteilen.

1. Das Verhältnis zweier Bögen eines Kreises läfst sich vollkommen genau bestimmen, wenn sie kommensurabel, und mit beliebiger Annäherung bestimmen, wenn sie inkommensurabel sind. Da der Radius beim Beschreiben gleicher Bögen auch gleiche Winkel beschreibt, so folgt sofort:

a) *Die Bögen eines Kreises verhalten sich wie ihre Centriwinkel.*

Im Besonderen folgt hieraus, wenn b der eine und der Halbkreis der andere Bogen ist, sowie β und 180 deren Centriwinkel in Graden gemessen, dafs $b : \pi r = \beta : 180$ oder:

$$b = \pi r \cdot \frac{\beta}{180}, \quad \beta = 180 \cdot \frac{b}{\pi r}.$$

Hieraus folgt:

b) *In zwei Kreisen verhalten sich die Bögen gleicher Centriwinkel wie ihre Radien.*

Das Verhältnis $\frac{b}{r} = \pi \cdot \frac{\beta}{180}$ ist somit durch den Winkel β eindeutig bestimmt und umgekehrt dieser durch jenes. Das Verhältnis des Bogens zum Radius heifst *arcus* des Centriwinkels:

$$\frac{b}{r} = \text{arc}\, \beta = \pi \frac{\beta}{180}.$$

Ist $r = 1$, so wird arc β durch den zu β gehörigen Bogen b dargestellt.

Es ist hiernach leicht, für jeden Winkel den arc zu berechnen, z. B.:

$$\text{arc}\, 4R = 2\pi, \quad \text{arc}\, 2R = \pi, \quad \text{arc}\, R = \frac{\pi}{2}, \quad \text{arc}\, \frac{R}{n} = \frac{\pi}{2n}.$$

In der sogenannten Arcus-Tafel findet man für die einzelnen Grade, Minuten und Sekunden den zugehörigen arcus angegeben. Um mit Hilfe einer solchen Tafel für einen beliebigen Winkel $\beta = 38^0 29' 47''$ den arcus zu bestimmen, genügt die Addition der zu den einzelnen Graden, Minuten und Sekunden gehörigen arcus:

$$\begin{aligned} \text{arc}\, 38^0 &= 0{,}66323 \\ \text{arc}\, 29' &= 0{,}00844 \\ \text{arc}\, 47'' &= 0{,}00023 \\ \hline \text{arc}\, 39^0 29' 47'' &= 0{,}67190. \end{aligned}$$

Der Bogen b zu diesem Winkel ergiebt sich dann aus

$$\mathbf{b = r \text{ arc } \beta.}$$

Ist umgekehrt der Bogen b zu dem Radius r gegeben, so berechnet man $\frac{b}{r}$ als Decimalbruch und geht damit in die Arcus-Tafel ein.

Ist z. B. $r = 25$, $b = 32$, so ist $\frac{b}{r} = 1{,}28$.

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}28000 \\ \underline{1{,}27409 = \text{arc } 73^0} \\ 0{,}00591 \\ \underline{0{,}00582 = \text{arc } 20'} \\ 0{,}00009 = \text{arc } 19'' \end{array}\right\} \beta = 73^0 20' 19''.$$

2. Unter **Kreisausschnitt** (Kreissektor) S versteht man einen Teil der Kreisfläche, welcher von einem Bogen und den nach seinen Grenzpunkten gehenden Radien begrenzt wird.

Aus der Kongruenz der Ausschnitte eines Kreises, welche zu gleichen Centriwinkeln oder Bögen gehören, folgt:

a) *Ausschnitte eines Kreises verhalten sich wie ihre Centriwinkel oder Bögen.*

$$S : \pi r^2 = \beta : 360 = b : 2\pi r, \qquad \text{woraus}$$

$$\mathbf{S = \frac{\beta}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2} = \frac{r^2}{2} \text{ arc } \beta.}$$

b) *Die Fläche des Kreisausschnitts ist gleich dem halben Produkt aus Bogen und Radius. Sie ist gleich der Fläche eines Dreiecks, dessen Grundseite gleich dem Bogen und dessen Höhe gleich dem Radius ist.*

c) *In zwei Kreisen verhalten sich die Sektoren gleicher Centriwinkel wie die Quadrate der Radien oder Durchmesser.*

3. Unter **Kreisabschnitt** (Kreissegment) versteht man einen Teil der Kreisfläche, welcher von einem Bogen und seiner Sehne begrenzt wird. Seine Fläche Σ ist gleich der Differenz des zugehörigen Sektors S und des Dreiecks zwischen dessen Radien und der Sehne:

$$\Sigma = \frac{r^2}{2} \cdot \text{arc } \beta - \frac{r}{2} \cdot r \cdot \sin \beta$$

$$\mathbf{\Sigma = \frac{r^2}{2} (\text{arc } \beta - \sin \beta).}$$

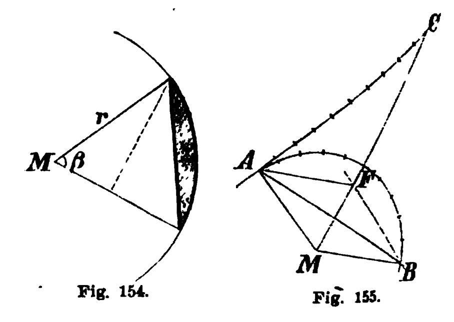


Fig. 154. Fig. 155.

Zusatz. Um einen Kreisbogen AB (Fig. 155) annähernd als Strecke

darzustellen, teilt man ihn in kleine Teile, deren Sehnen sich nur wenig von den Bogenteilen unterscheiden und trägt diese Sehnen auf einer Geraden, etwa der Tangente AC an. Das $\triangle ACM$ stellt dann den Flächeninhalt des Ausschnitts dar, und wenn $BF \parallel MA$, so giebt das $\triangle ACF$ die Fläche des Abschnitts.

4. Die Ringfläche, welche von zwei koncentrischen Kreisen mit den Radien R und r begrenzt wird, ist

$$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2).$$

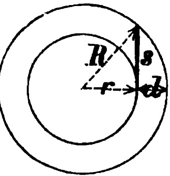


Fig. 156.

Zusatz. 1) Wird die den kleineren Kreis berührende Halbsehne des gröfseren durch s bezeichnet, so ist die Ringfläche auch $= \pi s^2$.

2) Wird aber die Breite des Ringes $= d$ nebst R oder r gegeben; so findet sich:

$$\text{Ringfläche} = \pi d (2R - d) \quad \text{oder} \quad = \pi d (2r + d).$$

5. Werden zu einem rechtwinkligen Dreieck über dessen Seiten nach aufsen Halbkreise gezeichnet, so verhalten sich die Halbkreise über AB und AC (2c) wie $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$. Da $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$, so

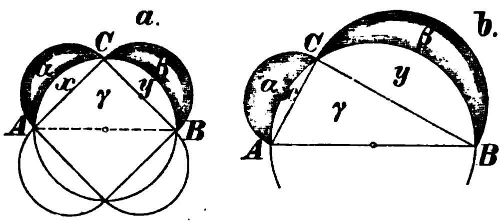


Fig. 157.

ist die Summe der Halbkreisflächen über AC und CB gleich der Fläche des Halbkreises über AB; nimmt man nun von beiden die Segmentflächen x und y weg, so erfolgt die Gleichheit:

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Zusatz. Die Auffindung dieser Flächengleichheit von mondförmigen durch Kreisbögen begrenzten Figuren und Dreiecke wird dem Hippokrates von Chios (450 v. Chr.) zugeschrieben. (Möndchen des Hippokrates.)

IV. Abschnitt.

Goniometrie und Trigonometrie.

Zehntes Kapitel.

Goniometrie.

Unter Goniometrie versteht man die Lehre von der Bestimmung der Winkel durch Streckenverhältnisse, durch die sogenannten goniometrischen Funktionen, und von den Beziehungen dieser Funktionen untereinander. Um die goniometrischen Funktionen auch auf die Berechnung beliebiger Dreiecke und Vielecke anwenden zu können, ist es notwendig deren Begriff so zu erweitern, dafs er auch für solche Winkel Geltung hat, die gröfser als R. Da diese Funktionen dazu dienen sollen, die Abhängigkeit der Lage und Gröfse der geometrischen Gebilde von einander darzustellen, so wird zunächst angegeben, wie die Lage von Punkten und Geraden der Ebenen auf die einfachste Weise bestimmt wird.

§. 34. Bestimmung der Lage eines Punktes durch Coordinaten.

1. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes P einer Ebene wählt man in derselben zwei zu einander normale Gerade XX_1 und YY_1, das sogenannte Axenkreuz und giebt an, wie grofs die vom Punkt P zu OX normal gezogene Strecke $PA = y$ und wie grofs der Abschnitt $OA = x$ ist; OA heifst die Abscisse, PA die Ordinate, beide heifsen die rechtwinkeligen Coordinaten des Punktes P; die Geraden XX_1 und YY_1 heifsen bezw. die Abscissen- und Ordinaten-Axe. Diese Coordinatenaxen, deren Schnittpunkt auch Nullpunkt oder Coordinaten-Anfang genannt wird, teilen die Ebene in vier Felder,

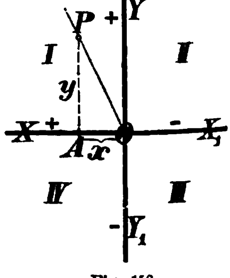


Fig. 158.

die sogenannten Quadranten, die wir in der dem Lauf des Uhrzeigers entsprechenden Reihenfolge numerieren, da in demselben Drehungssinn auch die Kreise der Winkelmefsinstrumente geteilt sind.

Anmerkung. Auf diese Bestimmung der Lage der Punkte ist die von Descartes (gest. 1650) begründete analytische Geometrie aufgebaut.

2. Man trifft nun die Bestimmung, dafs auf den Halbaxen, die den ersten Quadrant einschliefsen, die vom Nullpunkt O ausgehenden Strecken positiv, die entgegengesetzten negativ bezeichnet werden, so dafs also die einerseits (links) von der Ordinatenaxe liegenden Abscissen positiv, die andrerseits negativ sind und ebenso die einerseits (oberhalb) der Abscissenaxe liegenden Ordinaten positiv, die andrerseits liegenden negativ:

Quadrant	I	II	III	IV
Abscisse	+	−	−	+
Ordinate	+	+	−	−

Zur Abscissen- (bezw. Ordinaten-)Axe symmetrisch liegende Punkte haben gleiche Abscissen (bezw. Ordinaten) und entgegengesetzte Ordinaten (Abscissen); zum Nullpunkt diametral liegende Punkte haben entgegengesetzte Abscissen und Ordinaten.

3. Die Lage eines Punktes läfst sich auch in folgender Weise bestimmen. Man wählt einen Halbstrahl OX als Axe (Polaraxe) und dessen Grenzpunkt O als Pol und bestimmt die Lage eines Punktes P_1 durch die Strecke $OP_1 = r$, den sogenannten Fahrstrahl von P_1, und den Winkel α, um welchen eine Gerade von der Axe OX aus in bestimmtem Drehungssinn (dem Uhrzeiger entsprechend) gedreht werden mufs, um in die Lage OP_1 zu kommen. Dieser Fahrstrahl und Winkel heifsen die Polarcoordinaten des Punktes P_1.

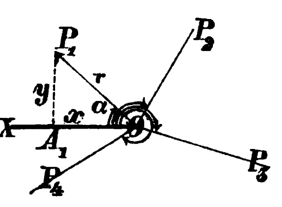


Fig. 159.

4. Um beide Arten der Bestimmung der Lage von Punkten miteinander zu vergleichen, betrachten wir OX zugleich als positive Abscissenaxe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, dessen positive Ordinatenaxe so liegt, dafs die Winkelmessung von α im Sinn der Drehung von der positiven Abscissen- nach der positiven Ordinatenaxe stattfindet. Fällen wir alsdann von einem Punkt P_1 des zweiten Schenkels eines Winkels die Normale auf den ersten Schenkel $P_1A_1 = y$, so heifst diese die Ordinate des Fahrstrahles OP_1 des zweiten Schenkels, OA_1 die zugehörige Abscisse dieses Fahrstrahles.

Bei dieser Anordnung der Axen ergiebt sich, das für jeden Punkt im ersten bezw. zweiten, dritten oder vierten Quadranten der Winkel seines Fahrstrahles mit der Axe OX zwischen 0^0 und 90^0, bezw. 90^0 und 180^0, 180^0 und 270^0, 270^0 und 360^0 liegt; hiernach

bezeichnet man Winkel von dieser Gröfse als **Winkel des ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten.**

Um den Zusammenhang beider Arten von Coordinaten leicht angeben zu können, werden die Winkelfunktionen so bestimmt, dafs sie auf jede Winkelgröfse anwendbar sind.

§. 35. Goniometrische Funktionen beliebiger Winkel.

A) Sinus und Cosinus.

1. Liegt ein Punkt P_1 im ersten Quadranten, so ist in dem durch seine Coordinaten gebildeten rechtwinkeligen Dreieck (nach §. 29, 2)

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \text{d. h.:}$$

Der Sinus des Winkels eines Fahrstrahles mit der Axe ist das Verhältnis der Ordinate des Fahrstrahles zu diesem selbst.

Diese Erklärung lassen wir nun auch gelten, wenn der Winkel $> R$ ist. Der Fahrstrahl wird an und für sich ohne Richtungszeichen genommen. Aus dem Vorzeichen der Ordinaten ergiebt sich:

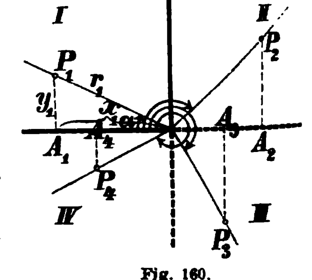


Fig. 160.

Die Sinus von Winkeln im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten haben bezw. die Zeichen $+, +, -, -$.

2. Für einen Punkt im ersten Quadranten ergiebt sich in gleicher Weise

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{d. h.:}$$

Der Cosinus des Winkels eines Fahrstrahles mit der Axe ist das Verhältnis der Abscisse des Fahrstrahles zu diesem selbst.

Indem wir diese Erklärung auf alle Arten der Winkel ausdehnen, folgt:

Die Cosinus von Winkeln im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten haben bezw. die Zeichen $+ - - +$.

Fig. 161.

3. Um bei wachsendem Winkel die **Wertänderung** seines Sinus und Cosinus leichter beurteilen zu können, wählt man für alle Winkel gleiche Fahrstrahlen, (so dafs die Brüche, welche die Funktionen darstellen, gleichnamig werden). Beschreibt man nämlich um den Nullpunkt O einen Kreis mit dem Fahrstrahl r, so geben die Ordinaten und Abscissen

der durch diesen Kreis begrenzten Fahrstrahlen die Gröfsenverhältnisse der zugehörigen Sinus und Cosinus an. Man erkennt sofort:

Der Sinus wächst im ersten Quadranten mit wachsendem Winkel von $\sin 0^0 = 0$ *bis* $\sin 90^0 = 1$.

Im zweiten Quadranten nimmt er ab bis $\sin 180^0 = 0$, im dritten nimmt er negativ zu bis $\sin 270^0 = -1$ und im vierten Quadranten ab bis $\sin 360^0 = 0$.

Der Cosinus nimmt im ersten Quadranten mit wachsendem Winkel ab von $\cos 0^0 = 1$ *bis* $\cos 90^0 = 0$.

Er geht im zweiten Quadranten von $\cos 90^0 = 0$ bis $\cos 180^0 = -1$, nähert sich dann im dritten wieder der Null bis $\cos 270^0 = 0$ und wächst im vierten wieder bis $\cos 360^0 = +1$.

4. Den Zusammenhang zwischen rechtwinkeligen und Polarcoordinaten geben die Gleichungen:

$$y = r \sin \alpha, \qquad x = r \cos \alpha.$$

Für alle zusammengehörigen, positiven oder negativen Werte von x und y ist nun aber

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

woraus folgt, dafs ebenso allgemein gilt:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \text{I.}$$

B) Tangens und Contangens.

5. Liegt ein Punkt P im ersten Quadranten, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Wir dehnen nun den Begriff von Tangens auch auf Winkel der übrigen Quadranten aus durch die Erklärung:

Die Tangens des Winkels eines Fahrstrahles mit der Axe ist das Verhältnis der Ordinate des Fahrstrahles zu dessen Abscisse.

Man erkennt hieraus sofort:

Die Tangens hat im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten bezüglich die Zeichen $+ - + -$.

6. In gleicher Weise ist nun

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y},$$

d. h.

Die Cotangens des Winkels eines Fahrstrahles mit der Axe ist das Verhältnis der Abscisse des Fahrstrahles zu dessen Ordinate.

Die Cotangens eines Winkels stimmt in ihrem Zeichen mit dessen Tangens überein.

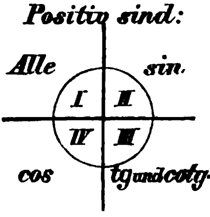


Fig. 162.

7. Zur Beurteilung der Wertänderung von Tangens wählt man für alle Winkel gleiche Abscissen $OA = OA_1$ (den gleichen Nenner für die Bruchwerte), indem man die Fahrstrahlen durch die Ordinaten in A und A_1 begrenzt. Verlängern wir die Fahrstrahlen des zweiten und dritten Quadranten bis zur Normalen in A, so geben die auf dieser Geraden gemessenen Ordinaten sowohl über die Gröfse als das Zeichen der betreffenden Tangens Aufschlufs. Man erkennt sofort:

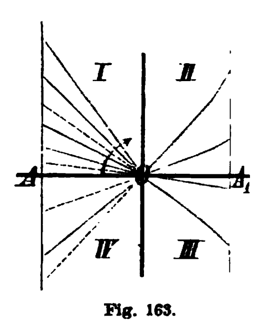


Fig. 163.

Die Tangens wächst im ersten Quadranten mit wachsendem Winkel von $\operatorname{tg} 0^0 = 0$ *bis* $\operatorname{tg} 90^0 = \infty$.

Beim Übergang des Winkels durch 90^0 springt die Tangens von $+\infty$ auf $-\infty$, um im zweiten Quadranten von $\operatorname{tg} 90^0 = -\infty$ bis $\operatorname{tg} 180^0 = 0$ zu fallen; sie wächst dann im dritten Quadranten von $\operatorname{tg} 180^0 = 0$ bis $\operatorname{tg} 270^0 = +\infty$, schlägt hier in $-\infty$ um und sinkt im vierten Quadranten bis $\operatorname{tg} 360^0 = 0$.

Um die Verhältnisse der Cotangens verschiedener Winkel darzustellen, ist eine konstante Ordinate OB zu wählen und in B die Normale zur Ordinatenaxe zu ziehen. Die durch den zweiten Schenkel, bezw. dessen Verlängerung, auf dieser Normalen begrenzten Abschnitte versinnlichen uns Gröfse und Zeichen von Cotangens.

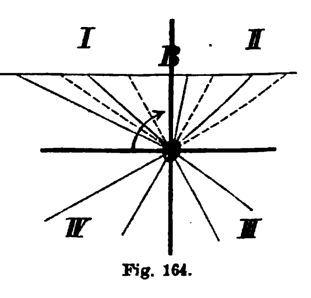


Fig. 164.

Die Cotangens nimmt im ersten Quadranten mit wachsendem Winkel ab von $\operatorname{cotg} 0^0 = \infty$ *bis* $\operatorname{cotg} 90^0 = 0$.

Sie nimmt im zweiten Quadranten im negativen Sinne zu bis $\operatorname{cotg} 180^0 = -\infty$, springt hier auf $+\infty$ über, nimmt im dritten Quadranten ab bis $\operatorname{cotg} 270^0 = 0$ und steigt von da im negativen Sinne wieder bis $\operatorname{cotg} 360^0 = -\infty$.

8. Aus der allgemeinen Giltigkeit der Gleichungen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y}, \quad y = r \sin \alpha, \quad x = r \cos \alpha,$$

folgt:

$$\textbf{II.} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\textbf{III.} \qquad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1.$$

Wie diese Formeln I—III, deren Giltigkeit für alle Werte von α hiermit nachgewiesen ist, benützt werden, um aus einer Funktion

die anderen Funktionen desselben Winkels zu bestimmen, wurde schon in §. 29, 3—6 angegeben.

§. 36. Darstellung der Funktionen beliebiger Winkel als solcher von spitzen Winkeln.

1. Stellt man wie in §. 35, 3 Sinus und Cosinus der Winkel α, $180^0 - \alpha$, $180^0 + \alpha$, $360^0 - \alpha$ dar, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke OAP_1, OA_1P_2, OA_1P_3 und OAP_4:

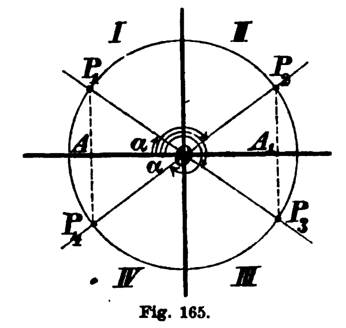


Fig. 165.

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{cotg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(180^0 + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha,$$

$$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(360^0 - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha,$$

d. h.:

Vorbehaltlich der Bestimmung des Vorzeichens sind die Funktionen eines Winkels des zweiten Quadranten dieselben wie die des Ergänzungswinkels zu 180⁰, *die Funktionen eines Winkels des dritten Quadranten wie die des um* 180⁰ *kleineren Winkels, die Funktionen eines Winkels des vierten Quadranten wie die des Ergänzungswinkels zu* 360⁰.

Zusatz. Dafs für zwei Winkel, die sich zu R ergänzen, die Funktionen des einen gleich den entsprechenden Cofunktionen des anderen sind, wurde schon (§. 29) erwähnt. — Für den Winkel $(\alpha + 90^0)$ des zweiten Quadranten ergiebt sich:

$$\sin(\alpha + 90^0) = \sin(180^0 - \alpha - 90^0) = \sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha;$$

ebenso

$$\cos(\alpha + 90^0) = -\cos(180^0 - \alpha - 90^0) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + 90^0) = -\operatorname{cotg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(\alpha + 90^0) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

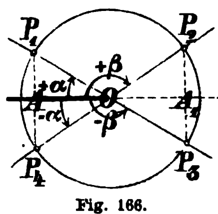


Fig. 166.

2. Eine Drehung von der positiven Abscissen- zu der negativen Ordinatenaxe wird durch negative Winkel gemessen. Für zwei entgegengesetzte Winkel α und $-\alpha$, oder β und $-\beta$ fallen die Abscissen in eine einzige Strecke OA

oder OA_1 zusammen (§. 34, 2), während die Ordinaten entgegengesetzt sind. Daraus folgt:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha,$$ d. h.:

Zwei entgegengesetzte Winkel haben den gleichen cos; *dagegen haben die übrigen entsprechenden Funktionen derselben je entgegengesetzte Werte.*

3. Wird irgend ein beliebiger Winkel um 180° geändert, indem man statt des Fahrstrahls seine Gegenrichtung in Betracht zieht, so nimmt sowohl die Abscisse als die Ordinate das entgegengesetzte Zeichen an (§. 34, 2); es gilt somit für alle Werte von α:

$$\sin(\alpha \pm 180^0) = -\sin\alpha, \quad \cos(\alpha \pm 180^0) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 180^0) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm 180^0) = \operatorname{cotg}\alpha,$$ d. h.:

Zwei Winkel, die um 180° *differiren, haben je die gleiche* tg *und die gleiche* cotg; *dagegen sind ihre* sin, *sowie ihre* cos *entgegengesetzt.*

4. Es kann auch bei der Entstehung des Winkels durch Drehung oder bei der Addition von Winkeln vorkommen, dafs 360° überschritten werden (vgl. Teil I. §. 7, 7 Anmerkung). Dreht man aber den Fahrstrahl um 360° weiter, so kommt er wieder in die Lage, die er zuvor inne hatte und für welche somit die Abscissen und Ordinaten wieder dieselben sind. Daher ergiebt sich:

Von zwei Winkeln, die um ein ganzes Vielfaches von 360° *differieren, stimmen die entsprechenden Funktionen überein.*

5. Es ist leicht einzusehen, dafs bei Zulassung auch negativer Winkel aus den in 2, 3 und 4 angegebenen Formeln auch die in 1 folgen, und dafs somit letztere auch für jede beliebige Gröfse von α gelten. Z. B. folgt aus 3 und 2:

$$\sin(180^0 - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

§. 37. Bestimmung der Lage eines Geradenzuges.

1. Die Lage einer Geraden, die nicht durch den Nullpunkt der Coordinatenaxe geht, kann bestimmt werden durch die Coordinaten zweier Punkte derselben oder durch die Coordinaten eines Punktes und den Winkel der Geraden mit der Abscissenaxe. Um die Richtung der Geraden behufs dieser Winkelmessung genau festzustellen, denkt man sich jede Gerade oder jeden Geradenzug durch Bewegung entstanden; die Richtung dieser Bewegung wird durch Ordnungszahlen oder durch die alphabetische Ordnung der Buchstaben an den Ecken des Geradenzuges bezeichnet. Die Coordinaten dieser Punkte bezeichnet man mit

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3; \quad \ldots \quad x_n, y_n.$$

Der Neigungswinkel (das Azimut) einer Geraden gegen die Abscissenaxe wird dadurch bestimmt, dafs man durch den Anfangspunkt der Geraden die Parallele zur positiven Abscissenaxe zieht und von dieser ab als dem ersten Schenkel den Winkel in dem bereits angegebenen Drehungssinne mifst.

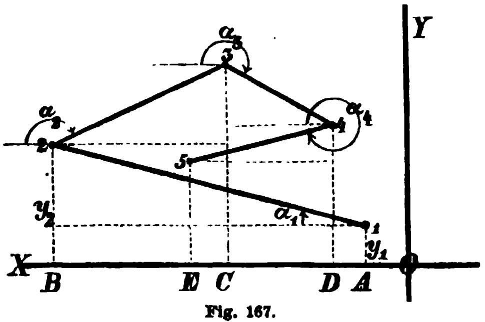
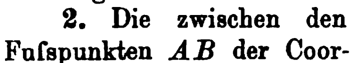


Fig. 167.



2. Die zwischen den Fufspunkten AB der Coordinaten einer Strecke *12* liegende Strecke der Axe nennt man die (Normal-)Projektion der Strecke auf diese Axe und zwar betrachtet man sie als positiv, wenn die Bewegung von A nach B in Richtung des ersten Schenkels statt hat, negativ im entgegengesetzten Falle, d. h.:

Die Projektion einer Strecke ist positiv, wenn sie auf den ersten Schenkel des Neigungswinkels selbst fällt, negativ, wenn sie auf dessen Gegenstrahl fällt.

Da für die Projektionen der Strecken des Linienzuges *1—5*

$$AB + BC + CD + DE = AE$$

und da dies auch die Projektion der Strecke *15* ist, so folgt:

Die Summe der Projektionen eines Geradenzuges ist gleich der Projektion der Strecke von dem ersten zum letzten Punkt desselben.

Die Projektion ist Null, wenn der Geradenzug geschlossen oder wenn die Schlufsstrecke normal zur Projektionsaxe ist.

Es ergiebt sich leicht, dafs die Projektion einer Strecke auf eine Axe in allen möglichen Fällen gleich der Differenz der auf dieser Axe gemessenen Coordinaten der Grenzpunkte ist.

3. Die goniometrischen Funktionen behalten nun ihre Bedeutung für jeden beliebigen Winkel, da stets der erste Schenkel des Winkels als Axe, eine vom Scheitel aus auf dem zweiten Schenkel gemessene Strecke als Fahrstrahl des Winkels aufgefafst werden kann. An die Stelle der Abscisse tritt in diesem Fall die Projektion des Fahrstrahles auf den ersten Schenkel, an die Stelle der Ordinate die Projektion auf die zum ersten Schenkel normale Richtung, welche auf derjenigen Seite des ersten Schenkels als positiv gilt, nach welcher die Drehung dieses Schenkels beim Beschreiben des Winkels beginnt.

§. 38. Funktionen der Summe und Differenz von Winkeln. Summe und Differenz von Funktionen.

1. Um auch die Gröfse der Veränderung der Funktionen bei wachsendem Winkel kennen zu lernen (vgl. §. 35, 3 und 7), bestimmt man die Funktionen der Summe und Differenz von Winkeln.

Es sei $\sphericalangle NOA = \alpha$ um $\sphericalangle AOB = \beta$ gewachsen, zunächst so, dafs die Summe

$$(\alpha + \beta) < 90^0$$

ist. Wird auf dem zweiten Schenkel von β eine Strecke OB beliebig (etwa $OB = 1$) gewählt, so ergeben sich die Funktionen von $(\alpha + \beta)$ durch die Ordinate $BX \perp ON$ und Abscisse OX:

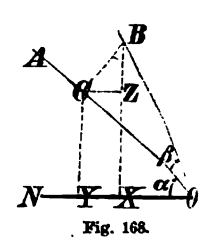


Fig. 168.

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BX}{OB}. \qquad \cos(\alpha + \beta) = \frac{OX}{OB}.$$

Um diese Funktionen durch die der Winkel α und β auszudrücken, zieht man die Ordinate $BC \perp OA$ und $CY \perp ON$. Es ist $\sphericalangle CBX = \alpha$ (I. Teil §. 18, 4b), und durch die Ordinate $CZ \perp BX$ lassen sich auch die Funktionen dieses Winkels in Betracht ziehen. Es ist nämlich

$$BX = CY + BZ \qquad OX = OY - CZ$$

oder

$$BX = OC \sin\alpha + BC \cos\alpha; \qquad OX = OC\cos\alpha - BC \sin\alpha;$$

somit:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \frac{OC}{OB} + \cos\alpha \frac{BC}{OB} \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \frac{OC}{OB} - \sin\alpha \frac{BC}{OB}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

2. Wird dagegen ein $\sphericalangle NOA = \alpha (< R)$ durch Rückdrehung seines zweiten Schenkels um $\sphericalangle \beta$ verkleinert und wiederum auf dem zweiten Schenkel von β die Strecke OB beliebig ($= 1$) gewählt, und wird

$$BX \perp ON, \quad BC \perp OA, \quad CY \perp ON, \quad CZ \perp BX$$

gezogen, so ist auch hier $\sphericalangle CBZ = \alpha$ und es gelten die in 1 angegebenen Beziehungen mit der Abänderung, dafs hier BZ und CZ das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. So folgt:

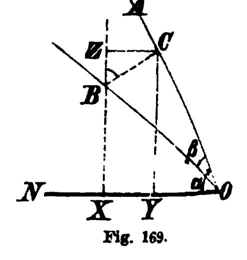


Fig. 169.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Die vier abgeleiteten Formeln lassen sich in die folgenden zwei zusammenfassen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \qquad \text{IV.}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \qquad \text{V.}$$

Welche Zeichen hierbei einander entsprechen, kann nicht zweifelhaft sein, da sin mit wachsendem Winkel zu-, cos aber abnimmt.

3. Um die vorstehenden Formeln als allgemein giltig zu beweisen, führen wir die in 1 angegebene Konstruktion für die Summe $(\alpha + \beta)$ irgend welcher Winkel aus (wobei diese Summe sogar 360° übersteigen kann). Es ist dann stets:

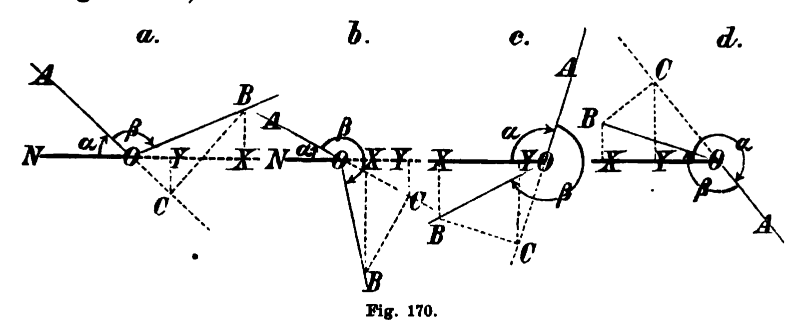


Fig. 170.

$BX = OB \sin(\alpha + \beta)$	$OX = OB \cos(\alpha + \beta)$

wobei diese Gröfse sowohl positiv, als negativ sein kann. Es ist aber auch die Projektion des Geradenzuges OCB

auf die Normale des ersten Schenkels $= BX$.	auf den ersten Schenkel $= OX$.

In diesem Geradenzug ist

$$OC = \pm OB \cos\beta, \quad BC = \pm OB \sin\beta,$$

wobei das untere Zeichen zu nehmen ist, wenn die Funktion des Ausdrucks negativ ist, da OC und OB selbst im Geradenzug stets als positive Gröfsen gelten. Der Neigungswinkel von OC gegen den ersten Schenkel ist α, falls $\cos\beta$ positiv ist, dagegen $\alpha + 180°$, sobald $\cos\beta$ negativ ist, da dann OC auf den Gegenstrahl des Schenkels OA fällt. Daher ist die Projektion von OC

auf die Normale zu ON:	auf ON:
$OB \cos\beta \sin\alpha$	$OB \cos\beta \cos\alpha$
oder	oder
$- OB \cos\beta \sin(\alpha + 180^0)$	$- OB \cos\beta \cos(\alpha + 180^0)$
$= OB \cos\beta \sin\alpha$	$= OB \cos\beta \cos\alpha$

Der Neigungswinkel von CB gegen den ersten Schenkel ist $\alpha + 90^0$, sobald $\sin\beta$ positiv ist, dagegen $(\alpha + 90^0 + 180^0)$ sobald $\sin\beta$ negativ. In beiden Fällen ergiebt sich daher, dafs die Projektion von CB

auf die Normale zu ON:

$$OB \sin\beta \sin(\alpha + 90^0) = OB \sin\beta \cos\alpha.$$

auf ON:

$$OB \sin\beta \cos(\alpha + 90^0) = -OB \sin\beta \cos\alpha.$$

Somit ist die Projektion des Geradenzuges OCB stets:

$$BX = OB \sin(\alpha + \beta) = OB \sin\alpha \cos\beta + OB \cos\alpha \sin\beta$$

$$OX = OB \cos(\alpha + \beta) = OB \cos\alpha \cos\beta - OB \sin\alpha \sin\beta$$

womit die allgemeine Giltigkeit der Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ erwiesen ist.

Die Formeln für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ ergeben sich aus diesen, wenn man $-\beta$ statt β setzt; es ist dann nämlich (§. 36, 2):

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

4. Die entsprechenden Formeln für tg und cotg ergeben sich aus diesen Formeln:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

wobei die letzte Form aus der vorhergehenden durch Division von Zähler und Nenner mit $\cos\alpha \cos\beta$ erhalten wird. Ebenso folgt:

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}.$$

5. Indem wir in IV und V $\beta = \alpha$ setzen, ergeben sich die früher abgeleiteten Formeln für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ als spezielle Fälle jener Formeln:

VI. $$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

woraus dann weiter durch Substitution von $\frac{\alpha}{2}$ für α folgt:

$$\sin\alpha = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Zählt man letztere Gleichung zu

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

hinzu oder von dieser ab, so folgt:

VII. $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

Ebenso ergiebt sich leicht aus VI:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2 \operatorname{cotg}\alpha}$$

und aus VII

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

6. Durch die Addition und Subtraktion der Formeln für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha-\beta)$, bezw. für $\cos(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ ergeben sich Formeln, welche durch Substitution von $\gamma = \alpha + \beta$ und $\delta = \alpha - \beta$ übergehen in:

$$\left.\begin{aligned} \sin\gamma + \sin\delta &= 2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\delta}{2}, \\ \sin\gamma - \sin\delta &= 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\delta}{2}, \\ \cos\gamma + \cos\delta &= 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\delta}{2}, \\ \cos\gamma - \cos\delta &= -2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\delta}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \text{VIII.}$$

Diese Formeln (prosthaphäretische Formeln, s. §. 40, 1) geben die Summen der entsprechenden Funktionen zweier Winkel in Form eines (für logarithmische Rechnung geeigneten) Produktes.

Die entsprechenden Formeln für tg und cotg sind:

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

7. Für die Summen und Differenzen von Funktionen eines einzigen Winkels folgt:

$$\begin{aligned} \sin\alpha \pm \cos\alpha &= \sqrt{2}\,(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin\alpha \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\alpha) \\ &= \sqrt{2}\,(\cos 45^0 \sin\alpha \pm \sin 45^0\cos\alpha) = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm 45^0); \end{aligned}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos^2\alpha \pm \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

woraus:

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cotg}2\alpha.$$

§. 39. Berechnung und Gebrauch der goniometrischen Tafeln.

1. Da alle Funktionen von Winkeln des zweiten bis vierten Quadranten auf solche des ersten zurückgeführt werden können, im ersten Quadranten selbst aber auch die Funktionen gleich den Cofunktionen der Complementwinkel (§. 29, 3, 5) sind, so genügt eine Tabelle der Winkelfunktionen zu 0^0 bis 45^0 für alle übrigen Winkel.

Zur Berechnung des sin von je 3^0 zu 3^0 aus den schon berechneten Funktionen von 18^0, 30^0, 36^0, 45^0, 54^0, 60^0, 72^0, bedient man sich der Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$, wobei folgender Weg zu den relativ einfachsten Wurzelausdrücken führt:

$$
\begin{array}{ll}
15^0 = 45^0 - 30^0, & 75^0 = 45^0 + 30^0 \\
6^0 = 36^0 - 30^0, & 66^0 = 36^0 + 30^0 \\
9^0 = 54^0 - 45^0, & 81^0 = 180^0 - (54^0 + 45^0) \\
12^0 = 30^0 - 18^0, & 48^0 = 30^0 + 18^0 \\
24^0 = 54^0 - 30^0, & 84^0 = 54^0 + 30^0 \\
27^0 = 72^0 - 45^0 = 45^0 - 18^0, & 63^0 = 180^0 - (72^0 + 45^0) \\
42^0 = 72^0 - 30^0, & 78^0 = 180^0 - (72^0 + 30^0) \\
3^0 = 48^0 - 45^0, & 87^0 = 180^0 - (48^0 + 45^0) \\
21^0 = 45^0 - 24^0, & 69^0 = 45^0 + 24^0 \\
33^0 = 45^0 - 12^0, & 57^0 = 45^0 + 12^0 \\
39^0 = 45^0 - 6^0, & 51^0 = 45^0 + 6^0
\end{array}
$$

So erhält man:

Winkel	Sin	Diff.	Tang.	Diff.	
0^0	0,000		0,000		90^0
		52		52	
3^0	0,052		0,052		87^0
		53		53	
6^0	0,105		0,105		84^0
		51		53	
9^0	0,156		0,158		81^0
		52		55	
12^0	0,208		0,213		78^0
		51		55	
15^0	0,259		0,268		75^0
		50		57	
18^0	0,309		0,325		72^0
	Cos		Cotg		Winkel

2. Um nun die Funktionen der Winkel von Grad zu Grad zu erhalten, beachte man, dafs ihre Differenzen von 3^0 zu 3^0 bei Berücksichtigung von blos drei Decimalen für mehrere auf einander folgende Werte nahezu konstant sind; daher kann man dies auch für die zwischenliegenden Grade annehmen, nämlich $= \frac{1}{3}$ der Differenz von 3^0 zu 3^0. Hiernach ergiebt sich

$$\sin 1^0 = \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}052 = 0{,}017, \qquad \sin 2^0 = 0{,}052 - 0{,}017 = 0{,}035$$

u. s. f. Wollte man mehr Decimalen berücksichtigen, so würden allerdings die Differenzen für mehrere aufeinander folgende Glieder der von 3^0 zu 3^0 fortschreitenden Tabelle nicht konstant sein und die Tafel müfste etwa von $\frac{3}{2}^0$ zu $\frac{3}{2}^0$ oder $\frac{3}{4}^0$ zu $\frac{3}{4}^0$ oder für noch kleinere Differenzen mittels der goniometrischen Formeln berechnet und dann erst, nachdem für den gewünschten Grad der Genauigkeit

die Differenzen mehrerer auf einander folgenden Glieder übereinstimmen, die Zwischenglieder interpolirt werden.

Die übrigen Funktionen lassen sich dann aus der zuerst berechneten bestimmen.

3. In der angegebenen Weise ist auch dann eine Interpolation auszuführen, wenn zu einem nicht in der Tafel genau enthaltenen Winkel eine Funktion bestimmt werden soll. Ist z. B. $\sin 30^0 36'$ zu berechnen, während die Tafel giebt:

$$\sin 30^0 30' = 0{,}50\,754, \qquad \sin 30^0 40' = 0{,}51\,004,$$

so ist die Differenz beider Werte in den letzten Stellen 250 für 10'; daher ist dieselbe unter der nur annähernd geltenden Voraussetzung, dafs die Differenz der Funktion proportional der Differenz der Winkel genommen werden dürfe, für 6'

$$\tfrac{6}{10} \cdot 250 = 150,$$

somit

$$\sin 30^0 36' = 0{,}50\,904.$$

Bei der Interpolation zu cos *und* cotg *ist die berechnete Differenz abzuzählen,* da diese Funktionen mit wachsendem Winkel abnehmen.

Anmerkung. Die Tafeln der goniometrischen Funktionen lassen sich benützen, um einen vorliegenden Winkel genauer zu messen, als es mit Hilfe eines gewöhnlichen Winkelmafses geschehen kann, indem man von einem Fahrstrahl des Winkels die Länge und auch Abscisse oder Ordinate (oder beide letzteren allein) mit einem feinen Mafsstab mifst und zu dem Verhältnis beider Strecken aus der Tafel den Winkel entnimmt; umgekehrt kann ein Winkel, dessen Gröfse durch Grade und Minuten bestimmt ist, mittels solcher geradlinigen Strecken, deren Verhältnis in der Tafel aufgesucht wird, konstruiert werden.

4. Zur Multiplikation und Division mit goniometrischen Funktionen dienen die Tafeln der Logarithmen dieser Funktionen. In diesen Tafeln ist die Kennziffer, sobald sie negativ sein sollte, um 10 zu grofs angenommen, um die negativen Zahlen zu vermeiden. Bei der Bestimmung der Stellenzahl des Numerus ist dies stets zu berücksichtigen, namentlich auch wenn der Logarithmus durch eine Zahl zu teilen ist, indem hierbei auf bekannte Weise die negative Kennziffer erst teilbar zu machen ist.

Die Interpolation ist dieselbe wie in der Tafel der Funktionen selbst. Ist z. B. $\sin 36^0 35' 12''$ zu bestimmen und giebt die Tafel $l \sin 36^0 35' = 9{,}77\,524$ und die Differenz 0,28 für 1'', so ist in den letzten Ziffern $12 \cdot 0{,}28$ d. i. 3 zu addieren: $l \sin 36^0 35' 12'' = 9{,}77\,527$. Ist der nächstliegende Winkel der Tafel gröfser als der gegebene, so kann auch dieser benutzt werden. Um z. B. $l \operatorname{tg} 48^0 45' 53''$ zu finden, nimmt man $l \operatorname{tg} 48^0 46' = 0{,}05\,727$, wovon $7 \cdot 0{,}43$ oder 3 in der letzten Stelle zu subtrahieren: $l \operatorname{tg} 48^0 45' 53'' = 0{,}05\,724$. Hierbei

ist zu beachten, dåfs man beim Entnehmen des kleineren Winkels aus der Tafel die Differenz für sin und tg addieren, für cos und cotg subtrahieren mufs (§. 35, 3 und 7). Übrigens giebt die Tafel selbst stets darüber Aufschlufs, ob zu addieren oder subtrahieren ist, da der fragliche Wert zwischen den beiden anschliefsenden Werten der Tafel liegen mufs.

5. Soll zu einem gegebenen Wert einer Funktion oder dem Logarithmus einer solchen der Winkel bestimmt werden, so ist darauf zu achten, dafs für jede Funktion zwei Reihen der Tafel gelten: man sieht zu, nach welcher Richtung hin von der zufällig aufgeschlagenen Stelle aus in beiden Reihen die Zahlen sich der zu suchenden nähern. Man entnimmt dann die nächstliegende Zahl, bzw. deren Winkel. Z. B. für $l \sin \alpha = 9{,}82\,695$ sucht man zunächst

$$9{,}82\,691 = l \sin 42^0 10';$$

die Differenz der letzten Stellen 4 ist durch die Differenz für 1″, nämlich durch 0,23 zu teilen, $400 : 23 = 17''$, somit $\alpha = 42^0 10' 17''$.

Ebenso $\quad l \operatorname{cotg} \beta = 9{,}91\,234;\quad$ es ist $l \operatorname{cotg} 50^0 45' = 9{,}91\,224;$

$10 : 0{,}43 = 23''$ sind abzuzählen; $\beta = 50^0 44' 37''$. Ob zu addieren oder zu subtrahieren ist, ersieht man auch hier leicht aus der Tafel.

Zu einer Funktion ergeben sich innerhalb der vier Quadranten stets zwei Winkel. Ist die Funktion negativ, so wird dies bei dem Logarithmus des absoluten Wertes der Funktion durch ein angehängtes (—) bezeichnet. Ist z. B.

$$\operatorname{cotg} \alpha = -5{,}352, \quad \text{so ist } l \operatorname{cotg} \alpha = 0{,}72\,852\ (-)$$

und der dem positiven Wert entsprechende Winkel des ersten Quadranten ist $10^0 35'$; daher

$$\alpha_1 = 180^0 - 10^0 35' = 169^0 25', \quad \alpha_2 = 360^0 - 10^0 35' = 349^0 25'.$$

6. Ist der Wert irgend einer Funktion gegeben, z. B.

$$l \operatorname{tg} \alpha = 0{,}69\,373 - 1$$

so kann man auch ohne Bestimmung des Winkels α eine andere Funktion desselben Winkels α, z. B. $l \sin \alpha$, unmittelbar berechnen: es giebt die Tafel $l \operatorname{tg} 26^0 17' = 9{,}69\,361$, Diff. 0,53, welcher Wert um 12 in den letzten Stellen abweicht; andrerseits ist $l \sin 26^0 17' = 9{,}64\,622$, Diff. 0,42, sodafs zu letzterem Wert $12 \cdot \frac{0{,}42}{0{,}53}$ d. i. 9 zu addieren ist, sodafs sich $l \sin \alpha = 0{,}64\,631 - 1$ ergiebt.

7. Die trigonometrischen Funktionen lassen sich direkt für jeden Winkel berechnen mit Hilfe von Reihen, die in Potenzen des zugehörigen Arcus aufsteigen. Bezeichnen wir den Arcus zu einem Centriwinkel einfach mit x und dessen sin und cos mit $\sin x$ und $\cos x$, so lassen sich

diese Funktionen darstellen als Reihen von Potenzen von x. Dabei ist die Reihe für $\sin x$ so beschaffen, dafs sie für $-x$ statt x ihr Zeichen ändert (§. 36, 2), somit nur ungerade Potenzen von x enthält, während $\cos(-x)$ das Zeichen von $\cos x$ beibehält, also nur gerade Potenzen enthält. Die Reihen heifsen also, wenn die noch fraglichen Coefficienten mit a_0, a_1, a_2, a_3 ... bezeichnet werden:

$$\sin x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$
$$\cos x = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots$$

Zur Bestimmung der Coefficienten dieser Potenzen kann folgender Weg eingeschlagen werden.

Zunächst ist $a_0 = 1$, weil für $x = 0$ auch $\cos x = 1$ ist.

Dafs auch $a_1 = 1$, erkennt man, wenn man die erste Reihe in die Form bringt: $\frac{\sin x}{x} = a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \dots\dots$ Denn aus §. 32, 1 folgt, dafs $\sin x < x$ oder $\frac{\sin x}{x} < 1$ ist und dafs $\operatorname{tg} x > x$ oder $\frac{\sin x}{x} > \cos x$, also $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ ist; nun ist für $x = 0$ auch $\cos x = 1$, somit für $x = 0$ auch $\frac{\sin x}{x} = 1$. Daher heifsen die Reihen nun:

$$\sin x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$
$$\cos x = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots$$

Setzen wir $(x + h)$ für x, so folgt:

$$\sin x \cos h + \cos x \sin h = (x + h) + a_3 (x + h)^3 + a_5 (x + h)^5 + \dots$$
$$\cos x \cos h - \sin x \sin h = 1 + a_2 (x + h)^2 + a_4 (x + h)^4 + \dots,$$

oder indem für $\sin h$ und $\cos h$ die Reihen gesetzt und rechts die Glieder nach Potenzen von h geordnet werden:

$$\sin x (1 + a_2 h^2 + \dots) + \cos x (h + a_3 h^3 + \dots) = x + a_3 x^3 + \dots$$
$$+ (1 + 3 a_3 x^2 + 5 a_5 x^4 + \dots) h + \dots$$
$$\cos x (1 + a_2 h^2 + \dots) - \sin x (h + a_3 h^3 + \dots) = 1 + a_2 x^2 + \dots$$
$$+ (2 a_2 x + 4 a_4 x^3 + 6 a_6 x^5 + \dots) h + \dots$$

Sollen nun für jedes beliebige h, auch für $h = 0$, die Reihen zu beiden Seiten einer Gleichung übereinstimmen, so müssen in beiden die Coefficienten gleich hoher Potenzen von h einander gleich sein; denn für $h = 0$ bleibt z. B. in der ersten Gleichung: $\sin x = x + a_3 x^3 + \dots$ Läfst man dies beiderseits weg, dividiert dann durch h und setzt schliefslich $h = 0$, so bleibt:

$$\cos x = 1 + 3 a_3 x^2 + 5 a_5 x^4 + \dots$$
$$-\sin x = 2 a_2 x + 4 a_4 x^3 + 6 a_6 x^5 + \dots$$

Somit ist auch:

$$1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots = 1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + \ldots$$
$$-x - a_3 x^3 - a_5 x^5 - \ldots = 2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \ldots$$

Auch hier ergiebt sich leicht, dafs die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x übereinstimmen müssen, d. h. es ist:

$$-1 = 2a_2, \quad a_2 = 3a_3, \quad -a_3 = 4a_4, \quad a_4 = 5a_5, \quad -a_5 = 6a_6, \ldots\ldots$$

woraus sich alle Coefficienten und somit die Reihen selbst bestimmen lassen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$

Da hierin für x nur Werte zu nehmen sind, die kleiner als arc $45^0 = \frac{\pi}{4}$, also < 1 sind, so nehmen die Glieder dieser Reihe in dem Mafse ab, dafs eine Berechnung einer geringen, je nach dem Grad der Genauigkeit gröfseren oder kleineren Anzahl von Gliedern genügt.

§. 40. Berechnungen mittels Winkelfunktionen und goniometrische Gleichungen.

A. Arithmetische Anwendungen.

1. Die goniometrischen Tafeln können benutzt werden, um algebraische Ausdrücke zu berechnen.

a) Als man zwar schon goniometrische, aber noch keine logarithmische Tafeln hatte, wurden z. B. Produkte zweier Zahlen in folgender Weise in Summen verwandelt (prosthaphäretische Methode*). Sind die Faktoren a und b echte Brüche, so kann man direkt α und β bestimmen aus $a = \sin \alpha$ und $b = \cos \beta$. Alsdann ist

$$a \cdot b = \sin \alpha \cdot \cos \beta = \tfrac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

nach IV (S. 141).

Sind a und b keine Brüche, so genügt eine Division mit einer Potenz von 10, um dasselbe Verfahren anwenden zu können.

b) Die Tafeln für tg und ctg können als Reciprokentafeln benutzt werden, da $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. Dabei wird das in §. 39, 6 angegebene Verfahren angewendet.

Z. B.: $x = \frac{1}{36{,}45} = \frac{0{,}01}{0{,}3645}$ $\quad \operatorname{tg} \alpha = 0{,}3645$, $\quad \operatorname{cotg} \alpha_1 = 2{,}747$

$\operatorname{tg} \alpha_1 = \underline{0{,}3640}$ $\quad \underline{-5 \cdot \frac{11}{13} = -4}$

$5 \quad \operatorname{cotg} \alpha = 2{,}743$

$$x = 0{,}02743.$$

---

*) $\pi\varrho\acute{o}\sigma\vartheta\varepsilon\sigma\iota\varsigma$ = Zufügen = Addition; $\acute{\alpha}\varphi\alpha\acute{\iota}\varrho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$ = Wegnehmen = Subtraktion.

c) Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ giebt für x die Werte:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Für einen reellen Wert von x mufs $b^2 > 4ac$, also $\frac{4ac}{b^2} < 1$ sein. Daher läfst sich, wenn ac positiv ist, φ so bestimmen, dafs

$$\frac{2\sqrt{ac}}{b} = \sin\varphi. \qquad \text{Dann folgt:}$$

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp \sqrt{1 - \sin^2\varphi}) = -\frac{b}{2a}(1 \mp \cos\varphi)$$

$$x_1 = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \qquad x_2 = -\frac{b}{a}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Diese Auflösung ist dann mit Vorteil anzuwenden, wenn a, b und c vielzifferige Zahlen (Decimalbrüche) sind.

Ist aber ac negativ, so ist diese Methode nicht zulässig. Es sei

$$ax^2 + bx - c = 0, \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}.$$

Dann bestimme man φ so, dafs

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{ac}}{b},$$

also

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}) = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \frac{1}{\cos\varphi}\right) = -\frac{b}{2a}\,\frac{\cos\varphi \mp 1}{\cos\varphi}.$$

Es ist aber

$$\frac{b}{2a} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\sqrt{\frac{c}{a}}, \quad \text{somit } x = -\sqrt{\frac{c}{a}}\,\frac{\cos\varphi \mp 1}{\sin\varphi}$$

und (§. 37, 5)

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

2. Eine komplexe Zahl $a \pm bi$ (worin $i = \sqrt{-1}$) kann goniometrisch dargestellt werden, indem man r und φ so bestimmt, dafs

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad \text{also} \quad r^2 = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Alsdann ist

$$a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi).$$

Diese Form der komplexen Zahlen ist nun sehr geeignet, Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln derselben zu berechnen.

Es ist nämlich

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)(\cos\varphi_1 \pm i\sin\varphi_1) = \cos\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi\sin\varphi_1$$
$$\pm i(\cos\varphi\sin\varphi_1 + \sin\varphi\cos\varphi_1) = \cos(\varphi + \varphi_1) \pm i\sin(\varphi + \varphi_1).$$

Tritt noch ein weiterer Faktor $(\cos\varphi_2 \pm i\sin\varphi_2)$ hinzu, so folgt der Wert

$$\cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) \pm i\sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2).$$

Sind alle Faktoren, bzw. Werte von φ einander gleich, so erhält man:

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi.$$

Dies ist die sogenannte Moivre'sche Formel.

Da

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi} = \frac{\cos n\varphi \mp i\sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi}$$
$$= \cos(-n\varphi) \pm i\sin(-n\varphi),$$

so gilt die genannte Formel auch für negative Exponenten.

Umgekehrt folgt aus ihr:

$$\cos\varphi \pm i\sin\varphi = \left(\cos\frac{1}{n}\varphi \pm i\sin\frac{1}{n}\varphi\right)^n$$

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{1}{n}\varphi \pm i\sin\frac{1}{n}\varphi,$$

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\varphi \pm i\sin\frac{m}{n}\varphi,$$

d. h.: die Moivre'sche Formel hat auch Geltung für Wurzeln oder Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Es ist z. B.:

$$\sqrt[n]{a \pm bi} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} \pm i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Ist $a = 1$, $b = 0$, so folgt $r = 1$, $\varphi = k\,360^0$, wo k Null oder irgend eine ganze Zahl ist. Daher ist

$$1 = \cos 360k + i\sin 360k, \quad \sqrt[n]{1} = \cos\frac{360k}{n} + i\sin\frac{360k}{n}.$$

Daraus ergeben sich n verschiedene Werte für $\sqrt[n]{1}$, indem man nach einander $k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ setzt.

Würde man k noch höhere Werte $n, n+1, \ldots$ beilegen, so würden sich die Werte wiederholen, indem die Funktionen von 0^0 und 360^0, von $\frac{360^0}{n}$ und $\left(360 + \frac{360}{n}\right)$ u. s. w. übereinstimmen. Ist hierbei $n = 2m$, so giebt $k = 0$ und $k = m$ die beiden Werte $+1$ und -1, während die paarweise zusammengestellten Werte für $k = 1$ und $2m - 1$, 2 und $(2m-2)$, ... $(m-1)$ und $(m+1)$ sich jeweils nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles unterscheiden. Ist dagegen $n = 2m+1$, so giebt nur $k = 0$ einen reellen Wert 1 und es entsprechen einander in der angegebenen Weise die Werte für $k = 1$ und $(2m-2)$, 2 und $(2m-3)$, ... $(m-1)$ und m. — In gleicher Weise ergeben sich n Werte für $\sqrt[n]{-1} = \cos\left(\frac{2k-1}{n}\right)180^0 + i\sin\left(\frac{2k-1}{n}\right)180^0$, wo $k = 1, 2, \ldots. n$ gesetzt werden kann.

Für $\sqrt[n]{+p}$ erhält man n Werte, indem man in $\sqrt[n]{+p} = \sqrt[n]{p} \cdot \sqrt[n]{+1}$ die n Werte von $\sqrt[n]{+1}$ als Faktor zu dem auf bekanntem Wege sich ergebenden ersten Werte von $\sqrt[n]{p}$ hinzusetzt.

B. Goniometrische Gleichungen.

3. Ist die Gröfse eines Winkels durch eine Gleichung zwischen goniometrischen Funktionen desselben bestimmt, so sind letztere zunächst mittels goniometrischer Gleichungen (I—VII) durch eine einzige Funktion zu ersetzen, die übrigens auch zu dem halben oder doppelten fraglichen Winkel gehören mag; alsdann ist diese Gleichung nach den Regeln der Algebra aufzulösen. Jedem Zahlenwert der Funktion entsprechen dann zwei Winkel innerhalb 0^0 und 360^0.

Beispiele:

a) $a \sin x = b \cos x$. — Entweder quadriert man:

$$a^2 \sin x^2 = b^2 \cos^2 x$$

und substituiert für $\cos^2 x$ den Wert $(1 - \sin^2 x)$, oder wenn man annehmen darf, dafs nicht $\cos x = 0$ ist, dividiert man durch $a \cos x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}.$$

Im ersten Fall ist darauf zu achten, dafs durch das Quadrieren stets noch weitere Werte der Unbekannten in die Gleichung mit aufgenommen werden, die in der ursprünglichen nicht enthalten sind. Z. B. würde die Gleichung $a^2 \sin^2 x = b^2 \cos^2 x$ auch der Gleichung $a \sin x = - b \cos x$ entsprechen. Die Resultate sind daher darauf zu prüfen, ob sie der ursprünglichen Gleichung genügen.

b) $\quad a \operatorname{tg} x + b \sin x = 0, \quad \sin x \cdot \left(\frac{a}{\cos x} + b\right) = 0.$

Diese Gleichung ist erfüllt

für $\quad \sin x = 0, \quad$ woraus $\quad x_1 = 0, \quad x_2 = 180^0$

und für $\quad \frac{a}{\cos x} + b = 0, \quad$ woraus $\quad \cos x = - \frac{a}{b}$ folgt.

Ist z. B. $b = 2a$, so ist $\quad x_3 = 120^0, \; x_4 = 240^0$.

c) $a \sin x + b \cos x = c$. Statt $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ zu setzen, wird besser folgendes Verfahren eingeschlagen:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Man bestimme φ so, dafs $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ ist; alsdann ist

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

oder $\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c \cos \varphi}{a}$, $\sin (x + \varphi) = \frac{c \cos \varphi}{a}$.

Sind für a, b, c Zahlen gegeben, so wird zunächt φ, dann $(x + \varphi)$ und schliefslich x gefunden. — Ist

$$a = b, \quad \text{also:} \quad \sin x + \cos x = p,$$

so wird diese Gleichung auch gelöst durch Quadrieren und Anwendung der Formeln I und VI:

$$\sin 2x = (p + 1)(p - 1)$$

oder auch (§. 38, 2)

$$\sin (x + 45^0) = \frac{p}{\sqrt{2}}.$$

Da sich alle Funktionen von x rational durch $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ausdrücken lassen, indem (§. 38, 5)

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}, \quad \text{also} \quad \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \cos x,$$

woraus weiter

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

so kann die Funktion $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ öfters benutzt werden, um goniometrische Gleichungen aufzulösen. Für obige Gleichung ergiebt sich so z. B.:

$$2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + b - b \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = c + c \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (b + c) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = b$$

u. s. w.

Elftes Kapitel.

Ebene Trigonometrie*).

§. 41. Berechnung von Seiten und Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks.

1. Mit Hilfe der Tafeln für die Winkelfunktionen lassen sich bei einem Dreieck oder irgend einer Figur, von welcher die zur Konstruktion genügende Zahl von Strecken und Winkeln gegeben sind,

*) Die Trigonometrie ist wesentlich zu astronomischen Zwecken gebildet worden, so dafs die Behandlung der auf einer Kugel liegenden Dreiecke, die sogenannte sphärische Trigonometrie, notwendiger und demzufolge auch früher ausgebildet war als die ebene Trigonometrie. Als Urheber jener ist der Grieche Hipparch (150 v. Chr.) anzusehen, zugleich der Schöpfer einer wissenschaftlichen Sternkunde. Er sowohl als der früher (§. 17, 1) erwähnte Menelaus

die übrigen Strecken und Winkel berechnen. Solche Berechnungen von Stücken eines Dreiecks mittels der goniometrischen Funktionen ist der Gegenstand der Trigonometrie. Wenn das Dreieck ein rechtwinkliges ist, so geben die Winkelfunktionen im Verein mit dem pythagoreischen Lehrsatz und dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck sofort die Beziehungen zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken. Aus dem Verhältnis zweier gegebenen Seiten ergiebt sich eine Winkelfunktion irgend eines der beiden spitzen Winkel und mit Hülfe der Tafel somit dieser Winkel selbst. Das Verhältnis einer gegebenen und gesuchten Seite ist gleich der betreffenden Funktion eines Winkels und somit ist die fragliche Seite ebenfalls bestimmt.

2. Es sei gegeben die Kathete a und Hypotenuse c. Dann sind die Winkel α und β bestimmt durch: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$, und die andere Kathete durch $b = \sqrt{(c+a)(c-a)}$.

Beispiel:

$a = 9{,}12$	$l\,a$	0,95 999 − 1	$l(c+a)$	1,26 694
$c = 9{,}37$	$l\,c$	0,97 174	$l(c-a)$	0,39 794 − 1
$c + a = 18{,}49$	$l\sin\alpha$	0,98 825 − 1	$2\,l\,b$	0,66 488
$c - a = 0{,}25$		$\alpha = 76^0 44'$	$l\,b$	0,33 244
		$\beta = 13^0 16'$		$b = 2{,}15$

3. Die beiden Katheten a und b seien gegeben. Dann ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{cotg}\beta, \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$a = 9{,}12$	$l\,a$	0,95 999	
$b = 2{,}15$	$l\,b$	0,33 244	
	$l\operatorname{tg}\alpha$	0,62 755	$\alpha = 76^0 44' 5''$
		500 : 95 = 5	$\beta = 13^0 15' 55''$

Nun wird c, wenn α bestimmt ist, nach der folgenden Methode berechnet.

(100 n. Chr.) haben sich mit der Berechnung von Kreissehnen beschäftigt, und was diese Männer begonnen, führte Ptolemäus (150 n. Chr.) zu Ende, dessen grofses astronomisches Werk, Almagest genannt, zugleich die Grundlage der Trigonometrie enthält und über ein Jahrtausend mafsgebend blieb. Ptolemäus teilte den Kreisradius ein in 60 gleiche Teile mit sexagesimalen Unterabteilungen (vgl. I. Teil, S. 112) und drückte in solchen Teilen die Gröfse der verschiedenen Kreissehnen aus, dabei als Hauptsatz den benützend, welcher seinen Namen trägt (§. 26, 7). Von den Spuren, welche Inder und Araber in der Trigonometrie hinterlassen, war oben (S. 111) die Rede; aber stets blieb die sphärische Trigonometrie die Hauptsache und die ebene Trigonometrie wurde erst durch Regiomontanus (1463) zu der wichtigen Partie der Mathematik ausgebildet, die sie heute ist. Der rechnerische Teil erfuhr eine wesentliche Erleichterung durch Einführung der Logarithmen (1614). Die heutige Eleganz und Einfachheit der Trigonometrie verdankt man Euler (1707—1783).

4. Ist a und α gegeben, so ist

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}, \qquad b = a \operatorname{cotg} \alpha.$$

$a = 9{,}12$
$\alpha = 76^0 44' 5''$

$l \sin\alpha$	0,98 825 — 1	
$l\,a$	0,95 999	
$l \operatorname{cotg}\alpha$	0,37 245 — 1	
$l\,c$	0,97 174	$c = 9{,}37$
$l\,b$	0,33 244	$b = 2{,}15$

5. Ist gegeben a und β, so ist

$$c = \frac{a}{\cos\beta}, \qquad b = a \operatorname{tg} \beta.$$

$a = 9{,}12$
$\beta = 13^0 15' 55''$

$l \cos\beta$	0,98 825 — 1	
$l\,a$	0,95 999	
$l \operatorname{tg}\beta$	0,37 245 — 1	
$l\,c$	0,97 174	$c = 9{,}37$
$l\,b$	0,33 244	$b = 2{,}15$

6. Ist c und α gegeben, so ist $a = c \sin\alpha$, $b = c \cos\alpha$.

$c = 9{,}37$
$\alpha = 76^0 44' 5''$

$l \sin\alpha$	0,98 825 — 1	
$l\,c$	0,97 174	
$l \cos\alpha$	0,36 071 — 1	
$l\,a$	0,95 999	$a = 9{,}12$
$l\,b$	0,33 245	$b = 2{,}15$

7. Das gleichschenkelige Dreieck wird durch seine Axe in zwei rechtwinkelige zerlegt und diese werden, wie oben gezeigt, behandelt. — Das regelmäfsige Vieleck wurde schon in §. 30 und 31 behandelt.

§. 42. Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln des schiefwinkligen Dreiecks.

A. Projektionen zu einer Seite.

1. Zur Berechnung von Seiten oder Winkeln eines Dreiecks aus eben solchen Stücken leiten wir zuerst einige Beziehungen zwischen solchen Stücken ab, indem wir die Seiten des Dreiecks auf bestimmte Richtungen projizieren.

Die Höhe zu einer Seite erscheint als Projektion der benachbarten Seiten auf die zur ersteren Seite normale Richtung.

Es ist:

$h = a \cdot \sin\beta$ (in Fig. 171, b $= a \cdot \sin\delta = a \cdot \sin\beta$)

ferner: $h = b \cdot \sin\alpha$ (in Fig. 171, c $= b \cdot \sin\varepsilon = b \cdot \sin\alpha$)

also: $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ oder $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. — Ebenso würde die Benützung der beiden anderen Höhen ergeben:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

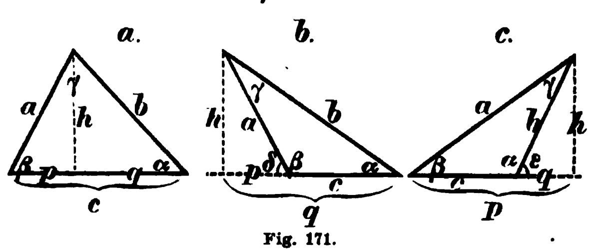


Fig. 171.

Kürzer lassen sich diese drei Gleichungen zusammenfassen in der Form:

$$\boldsymbol{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma} \qquad \text{IX.}$$

Dies ist der sogenannte Sinussatz:

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus ihrer gegenüberliegenden Winkel.

Zusatz. Dieser Satz schliefst auch für den besonderen Fall, dafs etwa $\sphericalangle \gamma = R$ ist, §. 29, 2 in sich, und er umfafst auch die Sätze in Teil I, §. 11, 8 und §. 35, 2, 3, ja er ergänzt die letzteren Sätze durch die bestimmte Angabe über den Wert des Seitenverhältnisses.

Anmerkung. Ein zweiter Beweis ergiebt sich unter Benützung des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises. Heifst dessen Durchmesser d, so ist (§. 29, 2, S. 112)

$$\frac{a}{d} = \sin\alpha \quad \text{oder} \quad d = \frac{a}{\sin\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

2. Eine Seite ist die Summe der Projektionen der andern.

Es ist in Fig. 171, a:

$p = a \cdot \cos\beta, \quad q = b \cdot \cos\alpha \quad$ und: $c = p + q$;

in Fig. 171, b:

$p = a \cdot \cos\delta = -a \cdot \cos\beta, \quad q = b \cdot \cos\alpha \quad$ und: $c = -p + q$;

in Fig. 171, c:

$p = a \cdot \cos\beta, \quad q = b \cdot \cos\varepsilon = -b \cdot \cos\alpha \quad$ und: $c = p - q$;

also in jedem Falle:

$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha.$$

Ebenso:

$$b = c \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\gamma$$
$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta,$$

d. h. der sogenannte Projektionssatz.

Zusatz. Die erste dieser Formeln giebt:

$$b \cdot \cos\alpha = c - a \cdot \cos\beta,$$

der Sinussatz giebt: $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$;
die Division beider Gleichungen liefert die (auch aus der Figur 171 direkt ablesbare) Gleichung:

$$\cot\alpha = \frac{c - a \cdot \cos\beta}{a \cdot \sin\beta} \left(= \frac{c-p}{h}\right) \quad \text{oder:}$$

X. $$\cot\alpha = \frac{c}{a \cdot \sin\beta} - \cot\beta.$$

3. Nach dem allgemeinen pythagoreischen Satze (§. 26, 2) ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq.$$

Wenn nämlich $\sphericalangle\, \alpha$ spitz (Fig. 171, a und b), so gilt das obere Zeichen und es ist $q = b\cos\alpha$; wenn aber $\sphericalangle\, \alpha$ stumpf ist (Fig. 171, c) so gilt das untere Zeichen und es ist $q = b\cos\varepsilon = -b\cos\alpha$. In jedem Fall gilt also die folgende trigonometrische Form des allgemeinen pythagoreischen Satzes:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \quad \text{ebenso:}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

XI. $$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.}$$

Dies ist der Cosinussatz: *In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten mal dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.*

Zusatz. Dieser Satz ergiebt sich auch durch Quadrieren und Addieren der im Zusatz zu 2 gegebenen Formeln:

$$b\cos\alpha = c - a\cos\beta, \qquad b\sin\alpha = a\sin\beta.$$

B. Projektionen zu einer Winkelhalbierenden.

4. Werden die Seiten eines Dreiecks auf die Halbierende eines Winkels α projiziert, so erscheint die Projektion der Gegenseite a dieses Winkels als Differenz der Projektionen der beiden andern Seiten. Ist z. B. $b > c$ und der Winkel von CB mit der zur Winkelhalbierenden normalen Richtung δ, so ist:

$$a\sin\delta = b\cos\frac{\alpha}{2} - c\cos\frac{\alpha}{2}.$$

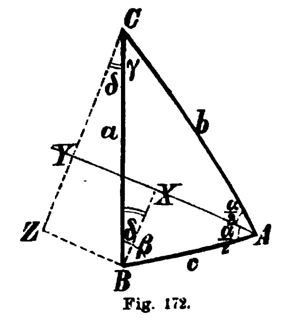


Fig. 172.

Die zur Winkelhalbierenden normale Projektion von a dagegen ist gleich der Summe der Projektionen von b und c auf diese Richtung:

$$a\cos\delta = b\sin\frac{\alpha}{2} + c\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Da $\delta + \gamma = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = \beta - \delta,$ so ist $\delta = \frac{\beta - \gamma}{2},$
also:

$$\left.\begin{aligned} a \sin \frac{\beta - \gamma}{2} &= (b - c) \cos \frac{\alpha}{2} \\ a \cos \frac{\beta - \gamma}{2} &= (b + c) \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{XII.}$$

Dies sind die Cagnoli'schen Formeln (meist nach Mollweide benannt)*). Die Division ergiebt aus ihnen:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2},$$

welche Formel auch in anderer Weise dargestellt wird, indem man

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg} \left(90^0 - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}$$

substituiert, also in der Form:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2} = (b - c) : (b + c).$$

Dies ist der sogenannte Tangens-Satz:

Die Tangens der halben Differenz zweier Winkel eines Dreiecks verhält sich zu der Tangens der halben Summe derselben wie die Differenz zur Summe der Gegenseiten.

Diese Formeln lassen sich auch aus dem Sinussatze ableiten mit Hülfe der Formeln VIII (S. 143).

§. 43. Berechnung von Seiten und Winkeln im Dreieck.

1. Es seien eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ gegeben. Alsdann ist auch der dritte Winkel α bestimmt durch: $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$. Die Formel IX ergiebt die Seiten b und c, nämlich:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \qquad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha},$$

wobei $\sin \alpha = \sin (\beta + \gamma)$ gesetzt werden kann.

Beispiel:

	$l \sin \beta$	0,91 752 — 1		
$a =$ 5,32	$l\, a$	0,72 591		
$\beta =$ 55°47′40″	$Cl \sin \alpha$	0,06 328		
$\gamma =$ 64°23′29″	$l \sin \gamma$	0,95 510 — 1		
$\beta + \gamma =$ 120°11′ 9″	$l\, b$	0,70 671	$b = 5{,}09$	
$\alpha =$ 59°48′51″	$l\, c$	0,74 429	$c = 5{,}55$	

*) Man merke sich, dafs (hier wie in VII) dem *sinus minus* gegenübersteht, dem *cosinus plus*, ebenso dafs die Cofunktionen einander entsprechen.

2. Es seien zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel α gegeben ($b > c$).

a) Wenn b und c Zahlen sind, deren Quadrate leicht ohne Logarithmen berechnet werden, so bedient man sich zur Berechnung der dritten Seite der Formel XI:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha};$$

zur Berechnung eines Winkels dient die Formel X:

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{b}{c \sin \alpha} - \operatorname{cotg} \alpha$$

oder

$$\operatorname{cotg} \gamma = \frac{c}{b \sin \alpha} - \operatorname{cotg} \alpha.$$

Beispiel:

$b = 15$
$c = 13$
$\alpha = 59^0 29' 23''$

$$\begin{array}{r}
b^2 = 225 \\
c^2 = 169 \\
\hline
b^2 + c^2 = 394 \\
2bc \cos \alpha = 198 \\
\hline
a^2 = 196 \\
a = 14
\end{array}$$

$2bc = 390$

$l\, 2bc$	2,59106
$l \cos \alpha$	0,70560 − 1
$l\, 2bc \cos \alpha$	2,29666

$l\, c$	1,11 394
$l \sin \alpha$	0,93 522 − 1
$l\, c \sin \alpha$	1,04 916
$l\, b$	1,17 609
$l \frac{b}{c \sin \alpha}$	0,12 693

$$\begin{array}{r}
\frac{b}{c \sin \alpha} = 1{,}3395 \\
\operatorname{cotg} \alpha = 0{,}5893 \\
\hline
\operatorname{cotg} \gamma = 0{,}7502 \\
\gamma = 53^0 7\tfrac{1}{3}'
\end{array}$$

Anmerkung. Werden die Formeln XII quadriert und addiert, so folgt:

$$a^2 = \left[(b + c) \sin \frac{\alpha}{2}\right]^2 + \left[(b - c) \cos \frac{\alpha}{2}\right]^2,$$

welche Formel die Ausrechnung von nur zwei Posten statt dreier verlangt. Dagegen läſst sich XI umwandeln in:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 2bc\,(1 + \cos \alpha) = (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

setzt man nun

$$2\sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2} = m,$$

so ist

$$a = \sqrt{(b + c + m)\,(b + c - m)}.$$

b) Wenn b und c mehrzifferige Zahlen sind, so geben die Formeln XII:

$$a \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = (b - c) \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$a \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = (b + c) \sin \frac{\alpha}{2}.$$

zunächst den Wert von $\frac{\beta - \gamma}{2}$, indem

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b - c) \cos \frac{\alpha}{2}}{(b + c) \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Da nun auch

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2},$$

so ist hieraus β und γ bestimmbar; a kann dann durch jede der beiden Formeln XII erhalten werden.

Beispiel:

$$b = 2{,}81$$
$$c = 2{,}55$$
$$\alpha = 59^0 45' 56''$$
$$\frac{\alpha}{2} = 29^0 52' 58''$$
$$b - c = 0{,}26$$
$$b + c = 5{,}36$$

$b - c)$	0,41 497 − 1
os $\frac{\alpha}{2}$	0,93 804 − 1
sin $\frac{\beta - \gamma}{2}$	0,35 301 − 1
in $\frac{\beta - \gamma}{2}$	0,92 488 − 1
$l\,a$	0,42 813

$l\,(b + c)$	0,72 916
$l \sin \frac{\alpha}{2}$	0,69 742
$l\,a \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$	0,42 658
$l \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$	0,99 845 − 1
$l\,a$	0,42 813

$$a = 2{,}68$$

$l \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}$	0,92 643 − 2

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 60^0\ 7'\ 2''$$
$$\frac{\beta - \gamma}{2} = 4^0 49' 31''$$
$$\beta = 64^0 56' 33''$$
$$\gamma = 55^0 17' 31''$$

Soll nicht β und γ berechnet werden, so findet man auch $l \sin \frac{\beta - \gamma}{2}$ oder $l \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$ direkt aus $l \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}$ nach §. 39, 6 und somit a. Es ist zu dem in der Tafel unter $l \sin$ neben $l \operatorname{tg} = 8{,}92\,565$ stehen-

den Werte 8,92411 in den beiden letzten Stellen $\frac{78 \cdot 2,5}{2,52} = 77$ zu addieren: $l \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = 0{,}92\,488 - 2$.

3. Es sind die drei Seiten gegeben.

a) Wenn die Zahlen rasch quadriert werden können, so giebt Formel XI:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Beispiel:

	Q	cos	l cos	
$a = 13$	169	$\frac{252}{420} = 0{,}6$	0,77 815 — 1	$\alpha = 53^\circ\ 7'49''$
$b = 14$	196	$\frac{198}{390} = \frac{33}{65}$	0,70 560 — 1	$\beta = 59^\circ 29' 23''$
$c = 15$	225	$\frac{140}{364} = \frac{5}{13}$	0,58 503 — 1	$\gamma = 67^\circ 22' 48''$
				$180^\circ\ 0'\ 0''$.

b) Wenn die gegebenen Zahlen mehrzifferig sind, so berechnet man zunächst den Radius ϱ des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises (§. 26, 6)

$$\varrho = \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s}},$$

worauf sich die Winkel ergeben aus:

Fig. 173.

XIII.

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s_1}{\varrho}, \quad \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{s_2}{\varrho}, \quad \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{s_3}{\varrho}.$$

Beispiel:

$a = 2{,}68$
$b = 2{,}81$
$c = 2{,}55$

	l	l cotg	
$2s = 8{,}04$			
$s = 4{,}02$	0,39 577 — 1 (C)		
$s_1 = 1{,}34$	0,12 710	0,24 061	$\frac{\alpha}{2} = 29^\circ 53'$
$s_2 = 1{,}21$	0,08 279	0,19 630	$\frac{\beta}{2} = 32^\circ 28' 15''$
$s_3 = 1{,}47$	0,16 732	0,28 083	$\frac{\gamma}{2} = 27^\circ 38' 45''$
$2\,l\,\varrho$	0,77 298 — 1		$\alpha = 59^\circ 46'$
$l\,\varrho$	0,88 649 — 1		$\beta = 64^\circ 56' 30''$
$C\,l\,\varrho$	0,11 351		$\gamma = 55^\circ 17' 30''$
			$180^\circ\ 0'\ 0''$

Anmerkung. Die hier angewendeten Formeln lassen sich auch aus dem Cosinus-Satze ableiten. Aus Formel XI folgt nämlich:

$$1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s \cdot 2s_1}{2bc},$$

somit nach den Formeln VII:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2ss_1}{bc}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{ss_1}{bc}}.$$

Ebenso:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2s_2s_3}{bc}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_2s_3}{bc}}.$$

Die Division ergiebt nun wieder:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{ss_1}{s_2s_3}} = s_1\sqrt{\frac{s}{s_1s_2s_3}} = \frac{s_1}{\varrho}.$$

4. Es seien zwei Seiten a und b und der Gegenwinkel α der ersteren gegeben. Alsdann ist:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha.$$

Da zu einem gegebenen positiven Sinus sowohl ein spitzer Winkel als auch dessen Nebenwinkel gehört, so ist die Aufgabe im allgemeinen zweideutig.

Ist jedoch $a > b$, so mufs auch $\alpha > \beta$, d. h. β ein spitzer Winkel sein. Unmöglich ist die Aufgabe, wenn $b \sin\alpha > a$ ist, da $\sin\beta < 1$ sein mufs.

Beispiel:

$a = 2{,}68$	$l\,b$	0,44 871	
$b = 2{,}81$	$l \sin\alpha$	0,93 650 — 1	$\beta_1 = 64^0 56' 40''$
$\alpha = 59^0 46'$	$C\,l\,a$	0,57 187 — 1	$\beta_2 = 115^0\ 3' 20''$
	$l \sin\beta$	0,95 708 — 1	

Die dritte Seite des Dreiecks kann nun nach 1 berechnet werden.

§. 44. Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks.

1. Da $h_1 = b \sin\gamma$, so ist der Flächeninhalt

$$J = \frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma. \qquad \text{XIV.}$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Seiten multipliziert mit dem sin des eingeschlossenen Winkels.

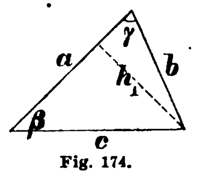


Fig. 174.

2. Sind die Winkel β und γ und eine Seite a gegeben, so ist

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)},$$

somit:

$$J = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}.$$

3. Der Fall, daſs alle drei Seiten gegeben, wurde schon §. 26, 3 behandelt. Übrigens folgt auch aus §. 43, 3 Anm.:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_2 s_3}{bc}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s s_1}{bc}}, \quad \text{so daſs } \sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s s_1 s_2 s_3},$$

also

$$J = \frac{bc}{2}\sin\alpha = \sqrt{s s_1 s_2 s_3}.$$

§. 45. Berechnung des In-, An- und Umkreises eines Dreiecks.

1. Für den Radius ϱ des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises, dessen Berührungspunkte die Abschnitte s_1, s_2, s_3 auf den Seiten bilden, welche im I. Teil §. 37, 3 bestimmt wurden, ist

$$s_2 = \varrho \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}, \quad s_3 = \varrho \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}, \quad s_2 + s_3 = a,$$

$$a = \varrho\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right), \text{ oder nach §. 38, 6:}$$

$$a = \varrho\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}, \qquad \varrho = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}},$$

$$\varrho = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Fig. 175.

Ebenso folgt für den Radius ϱ_1 des an a angeschriebenen Kreises:

$$a = s_2 + s_3 = \varrho_1\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right), \qquad \varrho_1 = \frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Wenn zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel α gegeben, so ergiebt sich $\varrho = s_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ oder

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(b + c - \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}\right).$$

Für $\alpha = 90^0$ ist hiernach $\varrho = \frac{1}{2}(b + c - a)$. (Vgl. I. Teil, S. 141, Nr. 27.)

Wenn alle drei Seiten gegeben sind, so ist nach §. 26, 6:

$$\varrho = \frac{J}{s} = \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s}}.$$

2. Nach der schon in §. 29, 2 gegebenen Erklärung ist $a = d \sin \alpha$, wenn d der Durchmesser des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises ist; somit

$$d = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)},$$

woraus weiter für den Fall, dafs zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, folgt:

$$d = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin \alpha}$$

und für den Fall, dafs alle drei Seiten gegeben, da $\sin \alpha = \frac{2J}{bc}$,

$$d = \frac{abc}{2J} = \frac{abc}{2\sqrt{s s_1 s_2 s_3}}.$$

§. 46. Berechnung weiterer Stücke im Dreieck.

1. Die Berechnung der Strecken (Höhen, Seitenabschnitte u. s. w.) eines Dreiecks aus dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises und den Winkeln läfst sich meistens leicht durchführen. Die dadurch erhaltenen Formeln können benützt werden zu Berechnungen beliebiger Stücke aus anderen gegebenen Stücken, indem erst der Durchmesser berechnet wird.

Es ist

$$a = d \sin \alpha, \quad b = d \sin \beta, \quad c = d \sin \gamma,$$
$$h_1 = b \sin \gamma = d \sin \beta \sin \gamma,$$
$$J = \frac{a h_1}{2} = \frac{d^2}{2} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

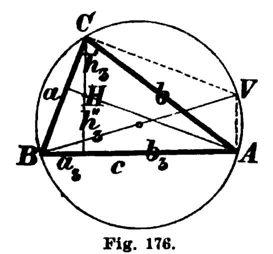


Fig. 176.

Die Projektion b_3 von b auf c ist:

$$b_3 = b \cos \alpha = d \sin \beta \cos \alpha.$$

Nun ist $AHCV$ ein Parallelogramm, also $CH = AV$ und $\sphericalangle BVA = \gamma$; somit ist der obere Höhenabschnitt $h'_3 = d \cos \gamma$; der untere Höhenabschnitt

$$h''_3 = b_3 \operatorname{tg}(90^0 - \beta) = d \sin \beta \cos \alpha \operatorname{cotg} \beta = d \cos \alpha \cos \beta.$$

2. Der Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises ist:

$$\varrho = \frac{d \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2d \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Ebenso

$$\varrho_1 = 2d \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

3. Die Winkelhalbierende zu α ergiebt sich nach dem Sinussatz:

$$w_1 = \frac{c \sin\beta}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

und da $c = d \sin\gamma$, ferner

$$\beta + \frac{\alpha}{2} = \beta + 90^0 - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^0 + \left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right),$$

so folgt:

$$w_1 = \frac{d \sin\beta \sin\gamma}{\cos\frac{\beta - \gamma}{2}}.$$

4. Für die Summe zweier Seiten ergiebt sich:

$$b + c = \frac{a \cos\frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2d \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Ebenso ist

$$b - c = \frac{a \sin\frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2d \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Aus §. 43, 3b folgt:

$$s = \varrho_1 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = 2d \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Anmerkung. Da auch

$$s = \frac{d}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

so folgt hieraus:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2};$$

ebenso da

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \varrho\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{\varrho} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

Diese Formeln gelten für alle Winkel α, β, γ, deren Summe 180^0 beträgt; sie lassen sich auch direkt mit Hilfe der Formeln des X. Kapitels ableiten.

§. 47. Berechnung des Geradenzugs und des Vielecks.

1. Wenn in einem Geradenzug die Geraden $\overline{12} = a_1$, $\overline{23} = a_2$, $\overline{34} = a_3 \ldots$ mit der Axe die Winkel w_1, w_2, $w_3 \ldots$ bilden (§. 37) und wenn wir unter $\sphericalangle\, a_1 a_2$ den Aufsenwinkel verstehen, welchen die

Verlängerung von $\overline{12}$ mit $\overline{23}$ bildet, so ist (I. Teil, §. 17, 1 und 4): $\sphericalangle w_2 = w_1 + a_1 a_2$. Wird der Winkel der Richtungen $\overline{21}$ und $\overline{23}$ mit α_2 bezeichnet, so ist: $\sphericalangle a_1 a_2 = \alpha_2 \pm 180^0$, da in letzterem Winkel

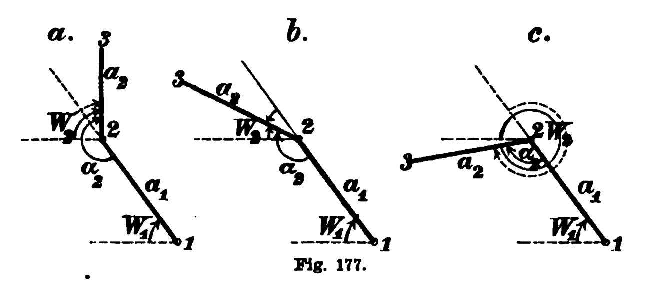


Fig. 177.

statt $\overline{12}$ die Gegenrichtung $\overline{21}$ als erster Schenkel betrachtet wird. Daher ist

$$w_2 = w_1 + \alpha_2 \pm 180^0,$$
$$w_3 = w_2 + \alpha_3 \pm 180^0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$w_n = w_{n-1} + \alpha_n \pm 180^0,$$

2. Für die Differenz der Abscissen, bzw. Ordinaten zweier aufeinander folgenden Punkte des Geradenzugs erhält man leicht die Gleichungen:

$$x_2 - x_1 = a_1 \cos w_1, \qquad y_2 - y_1 = a_1 \sin w_1,$$
$$x_3 - x_2 = a_2 \cos w_2, \qquad y_3 - y_2 = a_2 \sin w_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n - x_{n-1} = a_{n-1} \cos w_{n-1}, \qquad y_n - y_{n-1} = a_{n-1} \sin w_{n-1}.$$

Somit ist auch:

$$x_n = x_1 + a_1 \cos w_1 + a_2 \cos w_2 + \ldots . a_{n-1} \cos w_{n-1}$$
$$y_n = y_1 + a_1 \sin w_1 + a_2 \sin w_2 + \ldots . a_{n-1} \sin w_{n-1}.$$

3. Wird in einem geschlossenen Geradenzug oder Vieleck 1, 2, 3, ... n die Richtung $1n$ als positive Abscissenaxe und die Drehung im Sinne des Innenwinkels von $\overline{1n}$ nach $\overline{12}$ als positive Drehung aufgefafst, so ist in diesem Falle $w_1 = \alpha_1$, $x_n = a_n$, $y_n = 0$. Benutzt man nun die aus 1 sich ergebenden Werte von w_2, $w_3 \ldots . w_{n-1}$ und beachtet, dafs bei einer Änderung des Winkels um 180^0 sin und cos blos ihr Zeichen ändern, so folgt aus 2:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 \cos \alpha_1 - a_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \qquad - \ldots . a_{n-1} \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . \alpha_{n-1}) \\ 0 = a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \qquad - \ldots . a_{n-1} \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . \alpha_{n-1}) \end{array}\right\} \text{XV.}$$

Diese beiden Gleichungen dienen zusammen mit der Gleichung (I. Teil, §. 17, 6)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . \alpha_n = (n - 2)\, 180^0$$

zur Bestimmung von drei fehlenden Stücken, Seiten oder Winkeln eines Vielecks aus den übrigen Seiten und Winkeln.

Da jede Seite a_r als Abscissenaxe aufgefafst werden kann, so ergeben sich aus diesen Formeln noch weitere durch cyklische Vertauschung der Marken.

4. a) Ein fehlender Winkel ergiebt sich aus der letzteren Gleichung. Wenn noch aufserdem zwei Seiten unbekannt sind, so nimmt man eine derselben als Projektionsaxe a_n an. Die Gleichung für die zu dieser Axe normale Projektion enthält dann nur die andere unbekannte Seite a_r, woraus zunächst diese berechnet wird und darauf ihr Wert in die andere Gleichung substituiert.

b) Sind eine Seite und zwei anliegende Winkel zu berechnen, so nimmt man eine an die fragliche Seite anstofsende als Projektionsaxe, so dafs a_{n-1}, α_{n-1} und α_n die fehlenden Stücke sind. Aus den Gleichungen XV folgt dann:

$$\pm a_{n-1} \sin(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1}) = - a_1 \sin \alpha_1 + \ldots a_{n-2} \sin(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-2})$$
$$\pm a_{n-1} \cos(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1}) = a_n - a_1 \cos \alpha_1 + \ldots a_{n-2} \cos(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-2}),$$

woraus durch Quadrieren und Addieren a_{n-1}, durch Division

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1})$$

und somit α_{n-1} zu finden ist.

c) Liegen die beiden unbekannten Winkel an einer andern als der unbekannten Seite, so nimmt man diese andere Seite als Abscissenaxe $\overline{1n}$; die Gleichungen XV enthalten dann noch den unbekannten Winkel α_1 und die unbekannte Seite a_n. — Um einen Winkel zu eliminieren, setzt man alle Glieder der Gleichungen, die diesen Winkel enthalten, auf eine Seite, quadriert und addiert und vereinigt die entsprechenden Glieder, wobei unter Berücksichtigung von

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

und

$$\cos(x + y) \cos x + \sin(x + y) \sin x = \cos y$$

der betreffende Winkel herausfallen wird. Alsdann läfst sich die fragliche Seite aus dieser (quadratischen) Gleichung berechnen.

Um α_1 direkt zu berechnen, trennt man in der zweiten Gleichung XV α_1 und die übrigen Winkel nach der Formel

$$\sin(\alpha_1 + s) = \sin \alpha_1 \cos s + \cos \alpha_1 \sin s$$

und erhält so eine Gleichung von der Form $p \sin \alpha_1 + q \cos \alpha_1 = 0$

(vgl. §. 40, 3a). — Zur Berechnung eines anderen Winkels α_r nimmt dagegen die Gleichung die Form an

$$p \sin \alpha_r + q \cos \alpha_r = s \quad (\text{§. } 40, 3c).$$

5. Um den Flächeninhalt des Vielecks zu bestimmen, betrachten wir der Reihe nach die Seiten a_2, a_3, ... a_{n-1} als Grundseiten von Dreiecken, deren Gegenecken in 1 liegen. Die Höhen zu diesen Grundseiten werden berechnet als Ordinaten des Punktes 1 in Bezug auf die betreffende Grundseite als Abscissenaxe; d. h. es ist (nach 2):

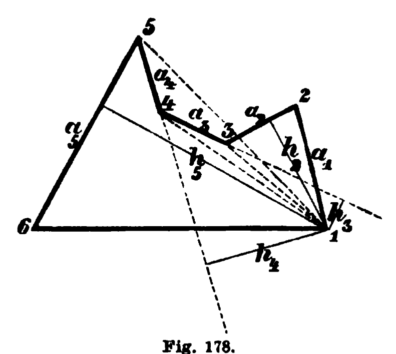


Fig. 178.

$$h_2 = a_1 \sin \alpha_2$$
$$h_3 = a_2 \sin \alpha_3 - a_1 \sin(\alpha_3 + \alpha_2)$$
$$h_4 = a_3 \sin \alpha_4 - a_2 \sin(\alpha_4 + \alpha_3) + a_1 \sin(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2) \quad \text{u. s. w.}$$

Fällt hierbei die Höhe, wie h_4, auf die äufsere Seite der Seitenstrecke a_4, so wird sie negativ; in der That ist dann aber auch das Dreieck 145 negativ zu nehmen, um durch Addition der genannten Dreiecke den Flächeninhalt des Vielecks zu erhalten; daher ist der doppelte Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} 2J = & a_2 a_1 \sin \alpha_2 + a_3 [a_2 \sin \alpha_3 - a_1 \sin(\alpha_3 + \alpha_2)] \\ & + a_4 [a_3 \sin \alpha_4 - a_2 \sin(\alpha_4 + \alpha_3) + a_1 \sin(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2)] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n-1} [a_{n-2} \sin \alpha_{n-1} - a_{n-3} \sin(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}) \cdots \\ & \qquad a_1 \sin(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots \alpha_2)] \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 2J = & a_1 [a_2 \sin \alpha_2 - a_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + \cdots a_{n-1} \sin(\alpha_2 + \cdots \alpha_{n-1})] \\ & + a_2 [a_3 \sin \alpha_3 - a_4 \sin(\alpha_3 + \alpha_4) + \cdots a_{n-1} \sin(\alpha_3 + \cdots \alpha_{n-1})] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n-1} a_{n-2} \sin \alpha_{n-1}. \end{aligned}\right\} \text{XVI.}$$

Für ein Viereck folgt z. B.:

$$2J = a_1 [a_2 \sin \alpha_2 - a_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3)] + a_2 a_3 \sin \alpha_3.$$

Zwölftes Kapitel.

Aufgaben der praktischen Geometrie.

§. 48. Bestimmung von Horizontalabständen.

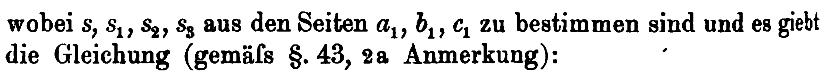
1. Wenn der Abstand zweier Punkte $AB = x$ bestimmt werden soll, ohne dafs die direkte Messung desselben zulässig ist,

während beide Grenzpunkte zugänglich sind, so werden von einem dritten Punkt C die Strecken $AC = b$ und $BC = a$, sowie $\sphericalangle ACB = \gamma$ gemessen und es ergiebt sich AB gemäfs §. 43, 2.

Wird noch auf CA die Strecke $CB_1 = a_1$ und auf CB $CA_1 = b_1$, sowie $A_1B_1 = c_1$ gemessen, so ist im Dreieck A_1B_1C:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s s_1}{a_1 b_1}}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s_2 s_3}{a_1 b_1}}$$

Fig. 179.



wobei s, s_1, s_2, s_3 aus den Seiten a_1, b_1, c_1 zu bestimmen sind und es giebt die Gleichung (gemäfs §. 43, 2a Anmerkung):

$$x^2 = \frac{(a-b)^2 s s_1 + (a+b)^2 s_2 s_3}{a_1 b_1}$$

die gesuchte Entfernung ohne Winkelmessung.

2. Ist nur ein Grenzpunkt A zugänglich und kann man a) von A nach B und C sehen und von C nach A und B, so wird $AC = b$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ gemessen und AB bestimmt nach §. 43, 1.

b) Der Satz von Menelaos (§. 17, 1a) bietet ein Mittel, diese Aufgabe ohne Winkelmessung zu lösen. Wird nämlich ein Signalstab in C_1 in Richtung von BA und A_1B_1 aufgestellt und $AC_1 = d$ und $CB_1 = a_1$, $CA = b$, $C_1A_1 = c$ und $B_1A_1 = c_1$ gemessen, so ist in dem Dreieck AB_1C_1 mit der Transversalen CA_1B

$$\frac{x}{d+x}\cdot\frac{c}{c_1}\cdot\frac{a_1}{b} = 1, \quad \frac{x}{d+x} = \frac{b c_1}{a_1 c}, \quad \frac{x}{d} = \frac{b c_1}{a_1 c - b c_1}, \quad x = \frac{b c_1 d}{a_1 c - b c_1}$$

c) Kann man von A nicht nach B sehen, dagegen von B_1 und C aus, so wird eine Standlinie $B_1C = a_1$ gemessen, ebenso $AC = b$ und $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle AB_1B = \beta_1$. Dann ist

$$BC = \frac{a_1 \sin\beta_1}{\sin(\beta_1 - \gamma)} = z$$

und

$$x^2 = z^2 + b^2 - 2bz\cos\gamma.$$

3. Sind beide Grenzpunkte A und B unzugänglich, so wird eine Standlinie $CD = a$ gemessen, von deren Grenzpunkten nach A und B gesehen werden kann. In den Grenzpunkten der Standlinie werden die Winkel der letzteren mit den Geraden nach A und B gemessen α, β, α_1, β_1. Die Seiten AC und BC des Dreiecks ABC werden dann bestimmt aus den Dreiecken ACD und BCD nach §. 43, 1 und dann AB nach §. 43, 2; dann ergiebt sich:

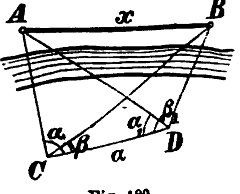


Fig. 180.

$$x^2 = \left(\frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)}\right)^2 + \left(\frac{a \sin \beta_1}{\sin(\beta + \beta_1)}\right)^2 - 2\frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)}\frac{a \cdot \sin \beta_1}{\sin(\beta + \beta_1)}\cos(\alpha - \beta).$$

Statt $\triangle ABC$ kann auch $\triangle ABD$ in Betracht gezogen werden.

4. Aus der bekannten Entfernung zweier Punkte $AB = c$ (Fig. 180) und den Winkeln α, β, α_1, β_1, welche von zwei weiteren Punkten C und D gemessen wurden zwischen den Sehlinien nach den anderen Punkten, soll die Lage dieser Punkte C und D gegen AB bestimmt werden (Hansen'sche Aufgabe).

Die in 3 aufgestellte Gleichung zwischen x und a giebt nun auch aus dem bekannten Werte $x = c$ den fraglichen Wert $CD = a$ und sodann kann auch AC, AD u. s. w. berechnet werden.

5. Aus der bekannten Lage dreier Punkte ABC,

$$BC = a, \quad AC = b, \quad \sphericalangle ACB = \gamma,$$

und aus den in einem vierten Punkt D gemessenen Winkeln der Sehlinien nach jenen drei Punkten

$$\sphericalangle ADC = \beta, \quad BDC = \alpha,$$

soll die Entfernung des Punktes D von A, B, C bestimmt werden (Snellius 1614, meist die Pothenot'sche Aufgabe genannt 1692). — Ist

$$DC = x, \quad \sphericalangle CAD = \alpha_1, \quad \sphericalangle CBD = \beta_1,$$

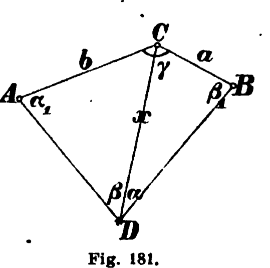


Fig. 181.

so ist

$$\alpha + \beta + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 360^0, \ \beta_1 = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha_1 = \delta - \alpha_1,$$

wenn

$$360^0 - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$$

gesetzt wird. Ferner folgt:

$$x = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin \beta} = \frac{a \sin \beta_1}{\sin \alpha} = \frac{a \sin(\delta - \alpha_1)}{\sin \alpha},$$

$$\frac{\sin(\delta - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}, \quad \frac{\sin \delta \cos \alpha_1 - \cos \delta \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta},$$

$$\sin \delta \operatorname{cotg} \alpha_1 - \cos \delta = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}, \quad \operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta \sin \delta} + \operatorname{cotg} \delta.$$

Bestimmt man einen Hilfswinkel φ so, daſs

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta \sin \delta},$$

so ist

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{cotg} \delta$$

oder (§. 38, 6):

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin \varphi \sin \delta}$$

woraus α_1 erhalten oder direkt $l \sin\alpha_1$ (§. 39, 6) bestimmt und hierauf x berechnet wird.

Beispiel.

$a =$ 41					
$b =$ 52	lb	1,71 600		$l \sin\varphi$	0,82 007 − 1
$\alpha =$ 43°36′10″	$l \sin\alpha$	0,83 863 − 1		$l \sin\delta$	0,94 916 − 1
$\beta =$ 59°57′48″		1,55 463			0,76 923 − 1
$\gamma =$ 139°14′50″	la	1,61 278		$l \sin(\varphi + \delta)$	0,56 316 − 1
242°48′48″	$l \sin\beta$	0,93 737 − 1		$l \operatorname{cotg}\alpha_1$	0,79 393 − 1
$\delta =$ 117°11′12″	$l \sin\delta$	0,94 916 − 1		$l \sin\alpha_1$	0,92 894 − 1
(62°48′48″ II)		1,49 931		lb	1,71 600
$\varphi =$ 41°21′39″	$l \operatorname{cotg}\varphi$	0,05 532		$Cl \sin\beta$	0,06 263
$\varphi + \delta =$ 158°32′51″				lx	1,70 757
(21°27′ 9″ II)			$x = 51.$		

Hieraus dann weiter $AD = 53$, $BD = 58$.

Graphisch wird die Aufgabe gelöst durch Konstruktion von Kreisen um a und b als Sehnen mit α bezw. β als zugehörigen Peripheriewinkeln (I. Teil, Übungen §. 14, 5). Die Aufgabe wird unbestimmt, wenn

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Es fallen dann beide Kreise in einen zusammen; dann ist

$$\delta = 180^0, \quad \operatorname{cotg}\delta = \pm\infty.$$

6. In einem Punkt S seien die Winkel der Strahlen nach vier Punkten $ABCD$ einer Geraden gemessen:

$$\sphericalangle ASB = \alpha, \quad BSC = \beta, \quad \sphericalangle CSD = \gamma$$

und aufserdem die beiden Strecken

$$AB = a, \quad CD = b;$$

man soll BC berechnen.

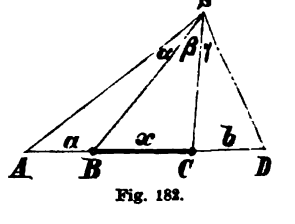


Fig. 182.

Da die Punkte und Strahlen perspektivisch sind, so folgt aus §. 21, 2:

$$\frac{a}{x} : \frac{a + x + b}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin\gamma}$$

oder

$$\frac{ab \sin\beta \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma} = (a + b)\,x + x^2,$$

woraus x zu berechnen ist.

§. 49. Bestimmung von Höhen.

1. Es ist die Höhe eines Punktes S über einem Punkt A zu bestimmen, von welchem aus eine Standlinie $AB = a$ nach der Lotlinie des Punktes S gerichtet ist.

a) Läuft die Standlinie $AB = a$ horizontal, so sind an beiden Grenzpunkten die Höhenwinkel α und β zu messen. Es ist dann

$$SB = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

und

$$x = SB \cdot \sin \beta,$$

also

$$x = \frac{a \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

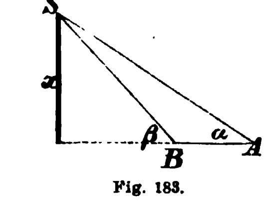


Fig. 183.

b) Läuft die Standlinie AB nicht horizontal, so wird aufser den Höhenwinkeln α und β auch der Neigungswinkel γ der Standlinie bestimmt. Es ist dann

$$SA = \frac{a \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad \text{also:}$$

$$x = SA \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Fig. 184.

2. Ist die Standlinie AB nicht nach der Lotlinie des Punktes S gerichtet, jedoch a) horizontal, so werden in ihren Grenzpunkten die Winkel α und β, welche die Standlinie mit den horizontalen Richtungen nach der Lotlinie bildet, gemessen und aufserdem ein Höhenwinkel γ.

Es ist

$$AF = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \measuredangle AFS = R, \quad \text{folglich}$$

$$x = AF \cdot \operatorname{tg} \gamma = \frac{a \sin \beta \operatorname{tg} \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Fig. 185.

Statt dessen können auch zwei Strecken

$$AB = a, \quad BC = b$$

einer horizontalen Standlinie gemessen werden und dazu die Höhenwinkel α, β, γ in deren Grenzpunkten. Alsdann ist

$$AF = x \operatorname{cotg} \alpha,$$

$$BF = x \operatorname{cotg} \beta,$$

$$CF = x \operatorname{cotg} \gamma.$$

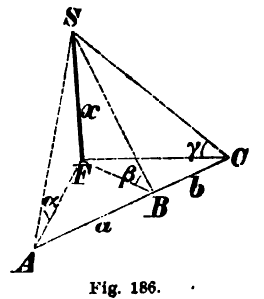


Fig. 186.

Nach §. 26, 4 folgt:

$$x^2 \operatorname{cotg}^2\alpha \cdot b + x^2 \operatorname{cotg}^2\gamma \cdot a = x^2 \operatorname{cotg}^2\beta(a+b) + ab(a+b)$$

$$x^2 = \frac{ab(a+b)}{a \operatorname{cotg}^2\gamma + b \operatorname{cotg}^2\alpha - (a+b)\operatorname{cotg}^2\beta}.$$

b) Ist die Standlinie nicht horizontal, so ist ihr Neigungswinkel γ zu messen und aufserdem die Horizontalwinkel

$$FAB_1 = \alpha, \quad FB_1A = \beta$$

und der Höhenwinkel

$$FAS = \delta.$$

Es ist

$$AB_1 = a\cos\gamma, \quad AF = \frac{AB_1 \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

folglich $x = AF \operatorname{tg}\delta$ oder:

$$x = \frac{a \sin\beta \cos\gamma \operatorname{tg}\delta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Fig. 187.

§. 50. Flächenteilung.

1. Es ist ein Dreieck ABC parallel zu einer gegebenen Richtung im Verhältnis $p:q$ zu teilen. Diese Richtung macht mit AB den Winkel δ. Aus §. 25, 4 folgt:

$$\frac{\overline{BX}\cdot\overline{BY}}{a\cdot c} = \frac{p}{p+q}, \quad \overline{BY} = \frac{\overline{BX}\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$$

$$\overline{BX}^2 = \frac{p}{p+q}\, ac \cdot \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta}.$$

Fig. 188.

2. Ein Viereck $ABCD$ ist parallel zu einer Richtung im Verhältnis $p:q$ zu teilen. Diese Richtung macht mit AD den Winkel ε. Wenn AD und BC einander in S schneiden, so ist

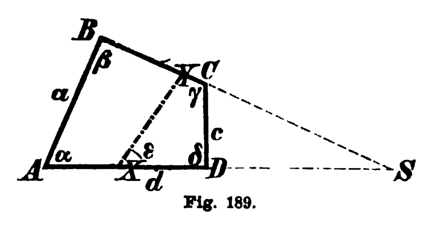


Fig. 189.

$$\triangle SXY = \tfrac{1}{2}\,\overline{SX}\cdot\overline{SY}\sin(\alpha+\beta) = \frac{q}{p+q}\cdot J + CDS = \frac{qJ + (p+q)CDS}{p+q}$$

$$= \frac{q(J+CDS) + p\cdot CDS}{p+q} = \frac{qa^2\cdot\sin\alpha\sin\beta + pc^2\cdot\sin\gamma\sin\delta}{2(p+q)\sin(\alpha+\beta)}$$

und da

$$\overline{SY} = \frac{SX \sin \varepsilon}{\sin(\alpha + \beta - \varepsilon)},$$

so ist

$$\overline{SX}^2 = \frac{\sin(\alpha + \beta - \varepsilon)}{(p + q) \sin \varepsilon \sin^2(\alpha + \beta)} (qa^2 \sin \alpha \sin \beta + pc^2 \sin \gamma \sin \delta)$$

wobei noch

$$\overline{SX} = \overline{DX} + \frac{c \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$$

substituiert werden kann.

3. Es ist ein Viereck $ABCD$ von einem in einer Seite gelegenen Punkt Y aus in einem gegebenen Verhältnis $p:q$ zu teilen. — Ist $YC = m$ und setzt man

$$\overline{SY} = m + \frac{c \sin \delta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{m \sin(\alpha + \beta) + c \sin \delta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

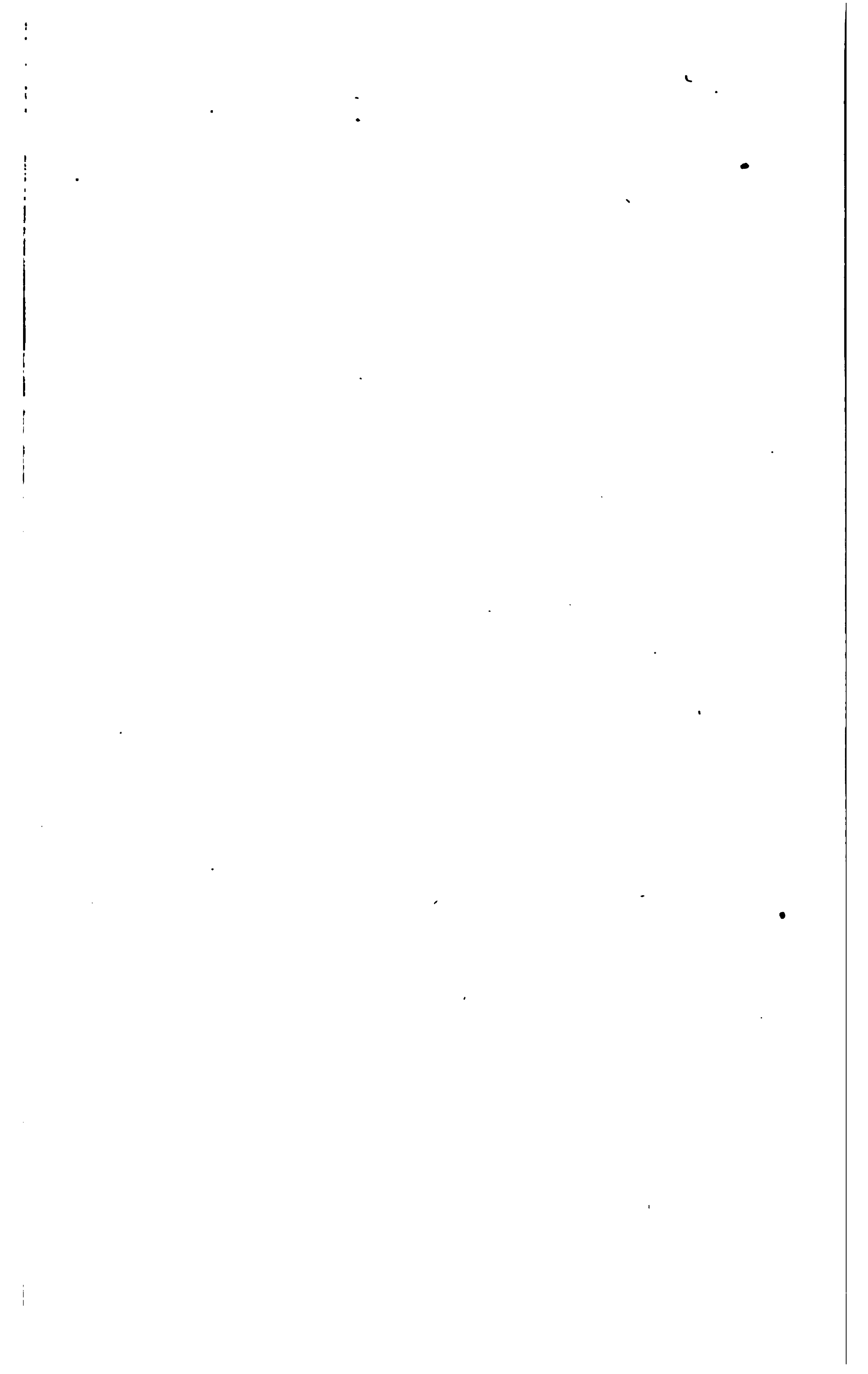
in die Formel in 2 ein, so folgt:

$$\overline{SX} = \frac{qa^2 \sin \alpha \sin \beta + pc^2 \sin \gamma \sin \delta}{(p + q) \sin(\alpha + \beta) (m \sin(\alpha + \beta) + c \sin \delta)},$$

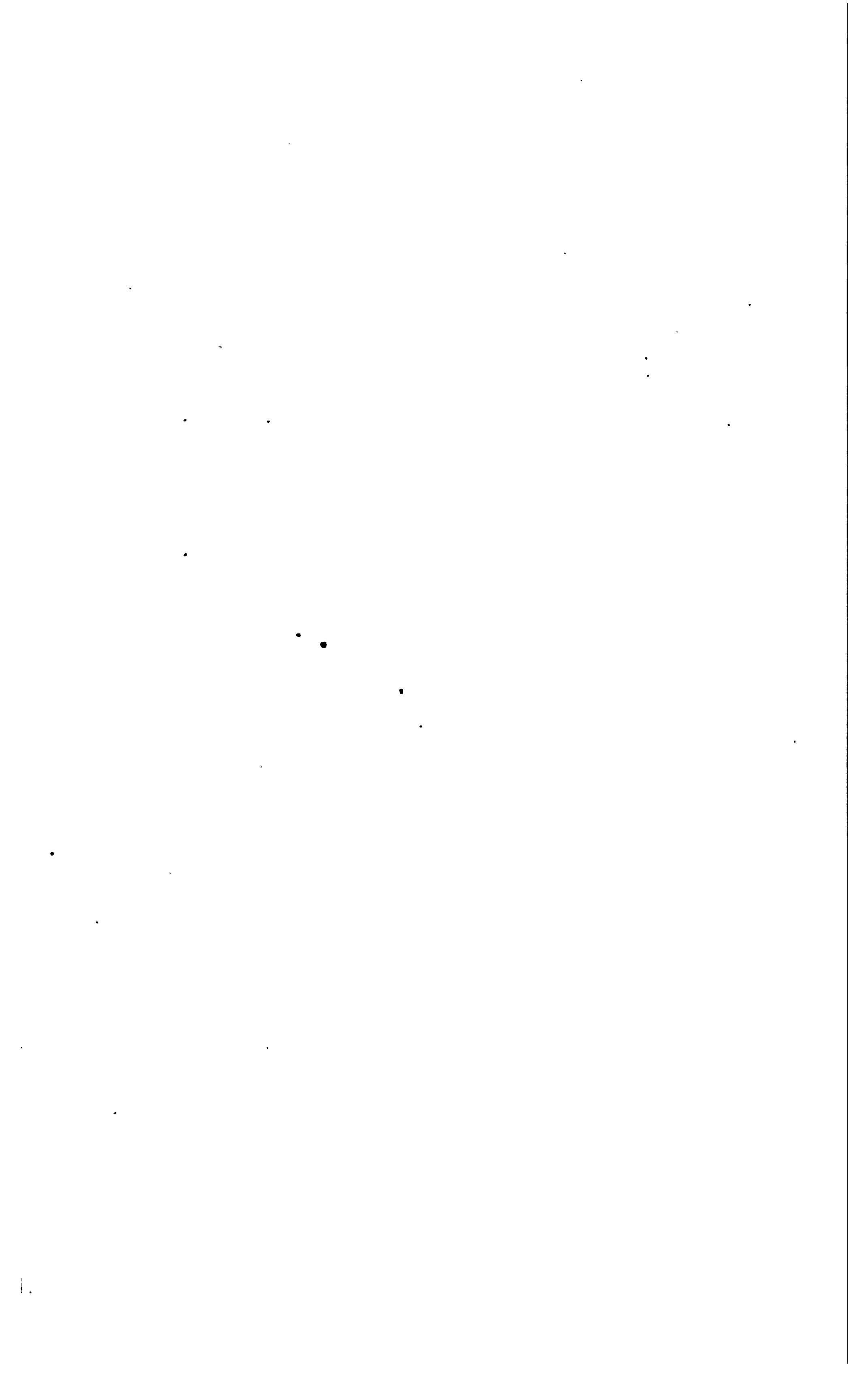
wo wieder

$$\overline{SX} = \overline{DX} + \frac{c \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$$

gesetzt werden kann.



Übungsaufgaben.



Aufgaben zum ersten Kapitel.

§. 1.

1. Zeichne drei Strecken $a = 21$ mm, $b = 56$ mm, $c = 35$ mm, gieb ein gemeinsames Mafs derselben an und erprobe es. §. 1.

2. Auf einer Strecke a kann eine andere b $x$mal abgetragen werden, dann der Rest c auf b $y$mal und der jetzt bleibende Rest d auf c $z$mal, wobei kein Rest bleibt. Man soll das Verhältnis von a zu b berechnen. — Beispiel: $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$.

3. Auf einer Geraden sei eine Strecke $AB = 20$ mm durch einen Punkt Q geteilt. Man soll für verschiedene Lagen von Q, so dafs $AQ = 5$, 16, 25, -4 mm wird, Art und Gröfse des Verhältnisses $V = AQ : QB$ berechnen. §. 2.

4. In der vorigen Aufgabe werde Q um 2 cm in der Geraden nach der einen oder andern Richtung verschoben; man soll zuerst ohne Rechnung die Art der Änderung von V angeben und dann das neue Verhältnis berechnen.

5. Auf einer Geraden seien von einem Punkt A aus nach einerlei Richtung drei weitere Punkte P, Q, R bzw. entfernt um 11, 23, 38 mm; welches sind die Werte der zwischen P, Q, R möglichen Teilverhältnisse?

6. Wo liegt auf der Strecke $AB = 20$ mm (bzw. auf deren Verlängerung) der Teilpunkt Q, dessen Teilverhältnis $AQ : QB = \frac{2}{3}$, 9, $-3\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{7}$ sein soll? Die Strecke AB ist zu zeichnen und die Resultate sind einzutragen.

7. Wo liegt der Endpunkt einer Strecke AB, wenn

$$AQ = 18\,(24)\text{ mm} \qquad \text{und} \qquad AQ : QB = 6\,(-7).$$

8. a) Welche Gröfse haben die drei Mittel zu zwei Strecken a und b, wenn letztere in Millimetern gegeben sind: α) 10 und 40? β) 20 und 180? γ) 10 und 90? §. 3.

b) Suche weitere durch Zahlen angebbare Strecken, deren drei Mittel sich wieder durch ganze Zahlen angeben lassen.

c) Berechne das harmonische Mittel zu folgenden Saitenlängen, welche harmonische Klänge geben: $1, \frac{1}{2}$; $1, \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$; $1, \frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$.

Aufgaben zum zweiten Kapitel.

§. 2. Lehrsätze.

§. 5. **1.** Zieht man von beliebigen Punkten einer Geraden je zwei Strahlen nach den Grenzpunkten einer zur ihr parallelen Strecke, so werden auf einer dritten Parallelen durch jedes Strahlenpaar gleich grofse Strecken begrenzt.

§. 6. **2.** Wenn drei Strahlen eines Punktes auf zwei Geraden proportionale Strecken begrenzen, so sind letztere Gerade parallel.

3. Von drei parallelen Strecken im Zweistrahl ist das Verhältnis der Differenz der ersten beiden zur Differenz der letzten gleich dem Verhältnis der zugehörigen Abschnitte auf einem Strahl.

4. Teilt eine von drei parallelen Strecken c im Zweistrahl die Abschnitte zwischen den beiden andern a und b im Verhältnis $p:q$, so ist

$$c = \frac{q \cdot a + p \cdot b}{p + q}.$$

5. Für jedes Dreieck ist das arithmetische Mittel der Entfernungen der Ecken von irgend einer Geraden gleich der Entfernung des Schwerpunkts von dieser Geraden.

6. Von drei Kreisen, welche zwei Punkte gemeinsam haben, begrenzen zwei die durch einen dieser Punkte gezogenen Geraden und der dritte teilt diese so, dafs das Teilverhältnis für alle das gleiche ist. — Andeutung: Man ziehe auch durch den andern gemeinsamen Punkt eine Gerade und die Verbindungsgeraden entsprechender Schnittpunkte.

§. 3. Berechnungen und Konstruktionen.

§. 7. **7.** Der Mefskeil, welcher benützt wird zum Messen des kleinen Abstands zweier horizontal (auf Böcken) liegenden Mefsstangen, ist ein Keil, dessen obere Breite a und dessen Länge l sei. Wie ist die Länge l einzuteilen, damit die Zahl des Teilstrichs, bis zu welchem der Mefskeil zwischen den Stangen einsinkt, zugleich den Abstand der letzteren giebt?

8. a) Trägt man auf einer Geraden zehn beliebige gleiche Teile ab, am Endpunkt normal zu ihr ein mm und verbindet man den Endpunkt des letzteren mit dem Anfangspunkt der Strecke, so lassen sich auf den Normalen der übrigen Teilpunkte $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ mm u. s. f. abmessen.

b) Man soll einen Transversalmafsstab konstruieren für $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{3}{200}$, $\frac{17}{450}$ d. w. G. (= der wahren Gröfse).

9. Durch einen Punkt soll eine Gerade derart gezogen werden, dafs sie auf den Schenkeln eines Winkels Strecken von gegebenem Verhältnis $p:q$ begrenzt.

10. Durch einen gegebenen Punkt ist eine Gerade so zu ziehen, daſs die zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels fallende Strecke durch den Punkt in gegebenem Verhältnis $p:q$ geteilt wird.

11. Durch einen Punkt soll eine Gerade so gelegt werden, daſs ihre Abstände von zwei gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältnis $p:q$ stehen.

12. Es sind zwei Strecken zu konstruieren, deren Summe s (bzw. Differenz d) und Verhältnis $p:q$ gegeben ist.

13. Zwei mit ihren Nullpunkten zusammengelegte Maſsstäbe (oder solche, die an diesen Punkten durch ein Charnier verbunden sind, Proportional-Zirkel) sollen benützt werden, um:

a) zu einer gegebenen Strecke a die Strecken $\frac{35}{81}a$, $\frac{27}{14}a$ u. s. f. zu finden. (Mache den Winkel beider Lineale so groſs, daſs bei 85 mm a als Transversale hineinpaſst und messe den Abstand bei 35 mm.)

b) zu drei Strecken a, b, c die vierte Proportionale x zu finden: $a:b=c:x$. (Trage a auf beide Maſsstäbe ab, öffne den Winkel derselben, bis b in den Endpunkten von a als Transversale in den Winkel paſst, trage c auf beide Maſsstäbe ab; der Abstand der Endpunkte von c ist x.)

c) das Produkt zweier Zahlen $a \cdot b$ zu bestimmen $(1:a=b:ab)$.

d) den Quotienten zweier Zahlen $a:b$ zu bestimmen

$$\left(b:1=a:\frac{a}{b}\right).$$

Aufgaben zum dritten Kapitel.

§. 4. Lehrsätze.

1. In einem Dreieck ist das Verhältnis zweier Höhen reciprok zu dem der zugehörigen Seiten. §. 8.

2. In einem Dreieck ist die Verbindungsgerade der Höhenfuſspunkte auf zwei Seiten antiparallel der dritten Seite.

3. In einem Dreieck teilt der Schnittpunkt der drei Höhen letztere so, daſs das Produkt der Abschnitte für alle den gleichen Wert hat.

4. Ist in einem rechtwinkeligen Dreieck eine Kathete die mittlere Proportionale zur Hypotenuse und zur andern Kathete, so ist letztere gleich der Projektion der ersteren Kathete auf die Hypotenuse.

5. Umkehrung dieses Satzes.

6. Im rechtwinkeligen Dreieck verhalten sich die Normalprojektionen der Katheten, wie die Quadrate der Katheten.

7. Zieht man durch irgend einen Punkt eines Kreisbogens zwei Parallelen zu den Tangenten der Grenzpunkte desselben, so ist die

von der zugehörigen Sehne begrenzte Strecke einer dieser Parallelen die mittlere Proportionale zu den Abschnitten der Sehne, die nicht zwischen den Parallelen liegen.

§. 9. **8.** Legt man durch zwei Punkte A und B beliebige Kreise, so sind die von einem dritten Punkt C der Geraden AB an diese Kreise gezogenen Tangenten alle einander gleich.

9. In einem Kreise verhalten sich die Quadrate zweier von einem Punkt ausgehenden Sehnen wie ihre Normalprojektionen auf den Durchmesser dieses Punktes.

10. Die Tangente, welche in einem Eck eines Dreiecks an den umgeschriebenen Kreis gezogen wird, teilt die Gegenseite im Verhältnis der Quadrate der anliegenden.

11. Alle Strecken von einem Punkte der Peripherie eines Kreises, welche einerseits von diesem Kreis, andrerseits von einer zum Durchmesser des ersteren Punktes normalen Geraden begrenzt werden, teilt jener Punkt so, dafs das Produkt der Abschnitte konstant ist.

12. Durchschneidet in vorangehender Aufgabe die Normale den Kreis, so ist das genannte Produkt gleich dem Quadrat der Sehne von dem erstgenannten Punkt nach dem Schnittpunkt der Geraden und des Kreises.

13. Zieht man in einem Sehnenviereck $ABCD$ zu der Tangente des Punktes A eine Parallele, welche von AB, AC und AD bzw. in B_1, C_1 und D_1 getroffen werde, so ist diese Parallele antiparallel zu BC, CD und BD in den zugehörigen Zweistrahlen aus A. — Es soll hierdurch nachgewiesen werden, dafs

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

(Vgl. §. 26, 7).

§. 5. Konstruktionen.

14. Es soll der Satz §. 9, 1a zur Konstruktion der vierten Proportionale der Strecken a, b, c benützt werden.

15. Es soll die mittlere Proportionale zu a und b gemäfs §, 9, 2 konstruiert werden.

16. Es ist eine Strecke a) innen oder b) aufsen so zu teilen, dafs eine zweite gegebene Strecke mittlere Proportionale zu beiden Abschnitten ist.

17. Es ist eine Strecke a innen oder aufsen so zu teilen, dafs das Produkt der Abschnitte gleich dem Produkte zweier gegebenen Strecken b und c ist. (Man nimmt, je nach dem $a \lesseqgtr b + c$ bzw. $a \gtrless b - c$ ist, a oder letztere Gröfse als Durchmesser.)

Aufgaben zum vierten Kapitel.

§. 6. Lehrsätze.

1. Ein Lineal SAA_1 ist um einen Punkt S drehbar, in A und A_1 sind zwei weitere Lineale AB und A_1B_1 der Art befestigt, dafs sie um diese Punkte sich drehen lassen. Die Längen AB und A_1B_1 entsprechen der Proportion $SA : S_1A_1 = AB : A_1B_1$. Der Endpunkt B ist durch ein Lineal mit einem Punkt C auf A_1B_1 verbunden, welcher so liegt, dafs $A_1C = AB$, $BC = AA_1$ ist (Pantograph, Storchschnabel). Man beweise die Richtigkeit folgender Aussagen: a) Die Punkte SBB_1 liegen auf einer Geraden; b) es verhält sich $SB : SB_1 = SA : SA_1$; c) beschreibt B_1 irgend eine Figur, so beschreibt B eine solche, welche mit ersterer perspektivisch ähnlich ist in Bezug auf S als Ähnlichkeitspunkt. Die homologen Strecken beider Figuren verhalten sich wie $SA_1 : SA$. §. 11

Wenn die vier Lineale gleich lang, jedes in 36 gleiche Teile geteilt sind und in jedem Teilpunkt das eine an dem andern drehbar befestigt werden kann, wie ist der Apparat zusammenzustellen, um zu einer Figur eine ähnliche zu zeichnen, deren Strecken zu denen der ursprünglichen sich verhalten wie 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 1 : 6, 2 : 3, 2 : 9, 3 : 4, 4 : 9, 4 : 3, 1 : 1?

2. Regelmäfsige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich. Sie liegen perspektivisch, wenn ein Seitenpaar in ihnen parallel ist.

3. Regelmäfsige Vielecke von gleicher und gerader Seitenzahl, von welchen zwei Seiten parallel sind, sind p. ä. in Bezug auf einen inneren und einen äufseren Ähnlichkeitspunkt.

4. Zieht man in einem Dreieck von dem Schnittpunkt einer Höhe mit einer Seite Normale zu den beiden andern Seiten, so ist die Verbindungsgerade der Fufspunkte der letzteren parallel zur Verbindungsgeraden der Fufspunkte der beiden andern Höhen.

5. Fällt man in einem Dreieck von dem Fufspunkt A_1 einer Höhe AA_1 Normale nach den Seiten, $A_1B_2 \perp AC$ und $A_1C_2 \perp AB$, sowie auf die beiden andern Höhen, $A_1C_3 \perp CC_1$, $A_1B_3 \perp BB_1$, so liegen die vier Fufspunkte dieser Normalen auf einer Geraden. (Da $\triangle A_1B_2C_3$ p. ä. BB_1C_1, so fällt nach dem vorhergehenden Satze B_2C_3 auf B_2C_2.)

6. In einem Viereck gehen die Verbindungsgeraden der Mitten der Gegenseiten und der Mitten der Diagonalen durch einen Punkt. (Je drei Punktpaare bilden p. ä. Dreiecke.)

7. Zieht man zu den Parallelen eines Trapezes eine Parallele, welche von den beiden Diagonalen begrenzt wird und durch die

Grenzpunkte zu je einer der andern Seite eine Parallele, die ebenfalls durch die Diagonale begrenzt wird, so bestimmen die vier Grenzpunkte ein Trapez, das dem ursprünglichen þ. ä. ist.

8. Ein Dreieck, in welchem zwei Schwerlinien einander gleich sind, ist gleichschenkelig.

9. Gleichschenkelige Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Winkel an der Spitze übereinstimmen, oder die an der Grundseite.

10. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis der beiden Katheten oder im Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse übereinstimmen.

11. In ähnlichen Dreiecken entsprechen einander die Höhen entsprechender Seiten, die Halbierenden entsprechender Winkel, die zugehörigen Abschnitte u. s. w.

12. Dreiecke, deren Seiten paarweise aufeinander normal stehen, sind ähnlich.

13. Zieht man durch den einen Schnittpunkt zweier einander schneidenden Kreise zwei Strahlen, welche jeden dieser Kreise noch in einem weiteren Punkt schneiden, so werden durch die beiden Schnittpunkte je eines Strahles und durch den zweiten Schnittpunkt beider Kreise Dreiecke bestimmt, welche einander ähnlich sind.

14. Es giebt für zwei Strecken AB und A_1B_1 (oder irgend zwei gleichwendige ähnliche Figuren) stets einen Punkt S (Situationspunkt) von der Lage, dafs durch eine Drehung um ihn beide Strecken þ. ä. werden zu demselben Punkt als Ähnlichkeitspunkt. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Kreise, welche durch den Schnittpunkt C der Geraden AB und A_1B_1 und durch AA_1, bzw. BB_1 gelegt werden. — Andeutung: Die Winkel ASA_1 und BSB_1 stimmen mit ACA_1 überein, woraus folgt $\sphericalangle ASB = A_1SB_1$; ebenso ist $\sphericalangle SAC = SA_1C$.

§. 11. u. 20. **15.** Es giebt für zwei Strecken AB und A_1B_1 (oder irgend zwei gegenwendige ähnliche Figuren) stets zwei zu einander normale Geraden q und q_1 von der Lage, dafs durch eine Umwendung um die eine oder andere Gerade beide Strecken þ. ä. werden zu dem Schnittpunkt der Geraden als Ähnlichkeitspunkt. — Andeutung: Zieht man in der Figur der vorhergehenden Aufgabe die Winkelhalbierenden zu ASA_1 und BSB_1, so treffen dieselben die Geraden AA_1 bzw. BB_1 in zwei Punkten X, Y, ebenso die Halbierenden der Nebenwinkel zu den genannten Winkeln in zwei Punkten X_1, Y_1. Beschreibt man über XX_1 und YY_1 als Durchmesser Kreise, so gehen beide durch S und durch einen zweiten Punkt S_1. Aus der harmonischen Teilung der Geraden A_1XAX_1 bzw. B_1YBY_1 folgt, dafs

$$\sphericalangle BS_1Y = YSB_1, \qquad \sphericalangle ASX = XS_1A_1,$$

ferner (§. 20, 1b)

$$S_1B:S_1B_1 = SB:SB_1 = SA:SA_1 = AS_1:S_1A_1 \quad \text{und} \quad = AB:A_1B_1$$

(nach der vorangehenden Aufgabe), woraus sich weiter ergiebt

$$\triangle ABS_1 \backsim A_1S_1B_1, \qquad \sphericalangle AS_1B = A_1S_1B_1.$$

Darnach ist XS_1Y eine Gerade; S_1Y_1 fällt in die Richtung von S_1X_1, da beide auf XS_1Y normal sind u. s. w.

16. a) Ein Dreieck ist p. ä. zu dem Dreieck der Mitten seiner Seiten. §. 11.

b) Dem Höhenpunkt des ersteren (I. Teil, §. 36, 3) entspricht in dem zweiten Dreieck der Mittelpunkt des dem ersteren umgeschriebenen Kreises.

c) Die Strecke zwischen beiden Punkten wird durch den Schwerpunkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt.

d) Zieht man in ersterem Dreieck Ecktransversalen durch einen Punkt und durch die Mitten der Gegenseiten jeweils Parallele zu diesen Ecktransversalen, so gehen diese Parallelen ebenfalls durch einen Punkt. Die Verbindungsstrecke beider Punkte wird durch den Schwerpunkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt.

e) Der einem Dreieck umgeschriebene Kreis liegt p. ä. zu dem durch die Mitten der Seiten gehenden Kreis; dabei ist der Schwerpunkt innerer Ähnlichkeitspunkt. Ihre Radien stehen im Verhältnis 2 : 1. §. 12.

f) Der Mittelpunkt des letzteren Kreises halbiert den Abstand des Mittelpunkts des umgeschriebenen Kreises und Höhenpunkts.

g) Der letztere Kreis geht auch durch die Fuſspunkte der Höhen des Dreiecks.

h) Der Höhenpunkt ist äuſserer Ähnlichkeitspunkt beider Kreise.

i) Der kleinere Kreis geht durch die Mitten der vom Höhenpunkt nach den Ecken gezogenen Strecken.

k) Der Mittelpunkt dieses Kreises halbiert die Verbindungsstrecken von den Seitenmitten nach den eben genannten Mittelpunkten.

l) Der Abstand des Mittelpunkts des umgeschriebenen Kreises von einer Seite ist gleich der Hälfte des obern Abschnitts der zugehörigen Höhe.

m) Die Mittelpunkte zweier obern Höhenabschnitte bestimmen mit den Mittelpunkten der zu den betreffenden Höhen gehörigen Seiten je ein Rechteck.

n) Verlängert man einen untern Höhenabschnitt um seine eigene Länge, so liegt der Endpunkt der Verlängerung auf dem umgeschriebenen Kreis.

o) Verlängert man die Strecke vom Fuſspunkt einer Höhe nach

dem Schwerpunkt um ihre doppelte Länge, so liegt der Endpunkt auf dem umgeschriebenen Kreis.

p) Die auf den Strahlen des Höhenpunkts zwischen beiden Kreisen liegenden Strecken werden durch den Höhenpunkt aufsen im gleichem Verhältnis 1 : 2 geteilt.

q) Die auf den Strahlen des Schwerpunkts zwischen beiden Kreisen liegenden Strecken werden durch den Schwerpunkt in gleichem Verhältnis geteilt.

17. a) Der Kreis durch zwei Ecken und den Höhenpunkt eines Dreiecks ist gleich dem umgeschriebenen Kreis des Dreiecks.

b) Beide Kreise liegen symmetrisch zu der Seite zwischen beiden Ecken als Axe.

c) Die Mittelpunkte der drei so bestimmten Kreise bilden ein Dreieck, welches mit dem gegebenen Dreieck diametral liegt zum Mittelpunkt des Kreises durch die Seitenmitten als Centrum.

18. a) Verbindet man in einem Dreieck ein Eck mit dem Punkt, in welchem die Gegenseite durch den ihr angeschriebenen Kreis berührt wird, so geht diese Gerade durch den Endpunkt des zur genannten Seite normalen Durchmessers des eingeschriebenen Kreises (§. 12, 1b).

b) Diese Verbindungsgerade ist parallel dem Radius des letzteren Kreises nach der Mitte der genannten Seite (s. I. Teil, §. 37, Zus. 2).

c) Die Ecktransversalen zu den Berührungspunkten der drei angeschriebenen Kreise auf den Seitenstrecken gehen durch einen Punkt (Nagel'schen), welcher mit dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und dem Schwerpunkt des Dreiecks auf einer Geraden liegt: der Schwerpunkt teilt die Strecke der beiden andern Punkte im Verhältnis 2 : 1 (dies folgt aus b und Nr. 16d.)

§. 7. Konstruktionen und Berechnungen.

§. 11. **1.** Zu einem gegebenen Vieleck V ist ein perspektivisch ähnliches V_1 zu zeichnen, wenn der (innere oder äufsere) Ähnlichkeitspunkt gegeben, dazu noch:

a) das einem bestimmten Eck von V homologe Eck von V_1;

b) das Seitenverhältnis von V und V_1 $1:2$; $1:1$; $p:q$;

c) eine mit einer bestimmten Seite von V homologe Seite von V_1.

2. Über einer gegebenen Strecke ist ein Vieleck zu konstruieren, welches einem gegebenen Vieleck ähnlich ist und in welchem die gegebene Strecke einer bestimmten Seite des letzteren entspricht.

3. Es sind die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, welches einem Dreieck, dessen Seiten die Längen 13, 14, 15 haben, ähnlich ist und in welchem eine Seiten von der Länge 39 (bzw. $33\frac{1}{2}$ oder 17) der Seite 13 des ersteren entspricht.

4. Der Schatten eines lotrechten Stabes von a m Länge ist b m auf horizontaler Ebene. Wie hoch ist ein Turm, dessen Schattenende die Entfernung c m vom Mittelpunkt des Grundrisses hat?

5. Zu zwei ähnlichen Punktreihen auf einem Träger ist der sich selbst entsprechende Punkt (Ähnlichkeitspunkt) zu bestimmen, mit Hilfe zweier ähnlichen Dreiecke über homologen Strecken.

6. Von zwei Kreisen seien die Radien r_1 und r_2 und die Entfernung d ihrer Mittelpunkte in mm gegeben: §. 12.

$$r_1 = 10,\quad 4,\quad 15,\quad 6,\quad 15$$
$$r_2 = 6,\quad 6,\quad 10,\quad 9,\quad 5$$
$$d = 24,\quad 10,\quad 5,\quad 10,\quad 4$$

Man soll die Lage ihrer Ähnlichkeitspunkte zeichnend und rechnend bestimmen.

7. Es ist durch einen gegebenen Punkt eine Sekante zu zwei Kreisen zu ziehen, deren Sehnen sich wie die zugehörigen Radien verhalten.

8. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von welchem eines der folgenden Stücke gegeben ist. §. 13.

a) eine Seite, b) eine Höhe, c) der Radius des umgeschriebenen Kreises, d) der Radius des eingeschriebenen Kreises

und aufserdem entweder

α) zwei Winkel, oder β) das Verhältnis zweier Seiten und ein Winkel, oder γ) die Verhältnisse der drei Seiten, oder δ) das Verhältnis einer Höhe und Seite und deren Gegenwinkel, oder ε) die Verhältnisse der drei Höhen.

9. Es ist ein Dreieck zu zeichnen, dessen drei Höhen gegeben sind.

10. Es ist ein Trapez zu zeichnen, von welchem eine Grundseite, die Winkel an ihr und das Verhältnis der zweiten Grundseite zu einer der nicht parallelen Seiten gegeben ist.

11. Es ist ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben ist ein Eck, die Mitte der Gegenseite und der Höhenpunkt. (Man bestimme den Schwerpunkt und den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises.)

12. Desgleichen, wenn gegeben ein Eck, der Höhenpunkt und a) das Centrum der Ecken, oder b) der Schwerpunkt.

13. Desgleichen, wenn gegeben ein Eck, der Schwerpunkt und das Centrum der Ecken.

14. Man soll in ein Dreieck ein zweites zeichnen, das einem weiteren gegebenen Dreieck ähnlich und dessen eine Seite einer gegebenen Geraden parallel ist.

15. Es ist in ein Dreieck ein Viereck zu zeichnen, so dafs zwei Ecken desselben auf eine Seite, die beiden andern auf die andere

Seite fallen, und das einem gegebenen Viereck ähnlich ist (etwa ein Rechteck mit gegebenem Seitenverhältnis).

16. Es soll in einen Sektor, bzw. in ein Segment ein Quadrat gezeichnet werden.

17. Man soll in einen Kreis oder Halbkreis ein Rechteck von gegebenem Seitenverhältnis zeichnen.

18. Es soll ein gleichschenkeliges Dreieck gezeichnet werden, wenn die Höhe zu einem Schenkel und die Mittellinie gegeben ist. (Nachdem das Dreieck, dessen Seiten die gegebenen Stücke sind, gezeichnet ist, kennt man von dem an die Mittellinie anzulegenden Dreieck einen Winkel und ein Seitenverhältnis $\frac{1}{2} : 1$.)

19. Man soll ein Dreieck zeichnen, von welchem gegeben ist eine Seite c, deren Gegenwinkel γ und das Verhältnis $p : q$ der diesen Winkel Halbierenden zu einem Abschnitt, welchen letztere auf der Seite c bildet. (Zu dem Eckpunkt des Abschnitts als Ä.-Punkt zeichnet man ein Dreieck aus dem Winkel $\frac{\gamma}{2}$ und dem Seitenverhältnis $p:q$, welches dem fraglichen Teildreieck perspektivisch ähnlich ist.)

Aufgaben zum fünften Kapitel.

§. 8. Konstruktionen und Berechnungen.

§. 15. **1.** Es ist ein rechter Winkel durch einen Teilstrahl so zu teilen, dafs das Teilverhältnis $1:2$ (oder $1:3$), ferner auch so, dafs der eine Teilwinkel sich zum andern wie $1:2$ (oder $1:3$) verhält.

2. In den so geteilten rechten Winkel ist eine Strecke von 20 mm Länge unter einem Winkel von 45^0 gegen die Schenkel einzutragen; die durch den Teilstrahl bestimmten Abschnitte sind zu berechnen.

3. In einem gleichschenkeligen Dreieck ist der Winkel an der Spitze zu teilen nach dem Teilverhältnis $v = \frac{3}{5}, -\frac{6}{5}$. Wie wird die Basis geteilt?

4. Es soll der geometrische Ort des Punktes bestimmt werden, dessen Entfernungen von den Schenkeln eines Winkels ab das Verhältnis haben $v = \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}$.

5. Es ist ein Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von den drei Seiten eines Dreiecks in gegebenen Verhältnissen stehen.

§. 16. **6.** In einem Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind, soll c durch einen Teilstrahl des Gegenwinkels im Verhältnis $p:q$ geteilt werden; ferner soll das Teilverhältnis des Winkels berechnet werden. Beispiel: $a = 13$, $b = 15$, $c = 14$, $p:q = 3:4$.

7. Auf den Schenkeln eines Winkels bilden zwei Transversalen die aneinander angrenzenden Abschnitte a, b bzw. a_1, b_1. Die Ver-

bindungsstrecke der Endpunkte von b und b_1 ist c. Wie weit ist der Schnittpunkt der beiden Transversalen von diesen Endpunkten entfernt?

§. 9. Lehrsätze.

1. In einem Dreieck mit einer Winkelteilenden ist das Teilverhältnis des Winkels gleich dem Doppelverhältnis aus den Abschnitten der Gegenseite und aus den anliegenden Seiten. §. 16.

2. Das Doppelverhältnis der Strecken von je einem zweier entsprechenden Punkte perspektivischer Reihen bis zum Schnittpunkt derselben ist für irgend ein Paar perspektivischer Teilpunkte konstant; es ist entgegengesetzt dem Teilverhältnis der durch den Scheitel geteilten Strecke der beiden erstgenannten Punkte.

2'. Das Doppelverhältnis der Winkel von je einem zweier entsprechenden Strahlen perspektivischer Büschel bis zum Scheitelstrahl derselben ist für irgend ein Paar perspektivischer Teilstrahlen konstant; es ist gleich dem Teilverhältnis des durch die Axe geteilten Winkels der beiden erstgenannten Strahlen.

3. Werden durch drei Strahlen eines Büschels irgend welche Transversalen begrenzt und geteilt, so ist das Doppelverhältnis einer so geteilten Strecke und der Strahlen nach den Grenzpunkten konstant für alle Transversalen.

3'. Werden nach drei Punkten einer Reihe von irgend welchen Scheiteln Geraden gezogen, so ist das Doppelverhältnis eines so erhaltenen geteilten Winkels und des Sinusverhältnisses der Winkel seiner Schenkel mit dem Träger der Reihe für alle Scheitel konstant.

4. Zieht man durch einen Punkt Ecktransversalen zu einem Dreieck und verwechselt die durch sie gebildeten Abschnitte je eines Winkels oder je einer Seite, so gehen die diesen Abschnitten entsprechenden Ecktransversalen ebenfalls durch einen Punkt. §. 17.

5. Errichtet man auf den Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks Quadrate und verbindet je ein Eck des Dreiecks mit dem Gegeneck des Quadrats, so schneiden einander beide Verbindungsgeraden auf der Hypotenusenhöhe. (Man benütze §. 5, 3, §. 8, 3a und §. 17, 2b'.)

6. Wenn von dreien durch einen Punkt gehenden Ecktransversalen eines Dreiecks zwei je $\frac{1}{3}$ der Seite von einem Eck aus abschneiden, so wird die dritte Ecktransversale durch den gemeinsamen Schnittpunkt halbiert.

7. Zieht man von einem Punkt der Peripherie des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises Normalen zu den Seiten, so liegen deren Fufspunkte in einer Geraden (Simson'sche Gerade). — And.: Man ziehe die Ecktransversalen des Punktes und benütze die entsprechenden ähnlichen Dreiecke, um die Seitenabschnitte in diesen Ecktransversalen und

Normalen auszudrücken. — Ein anderer Beweis ergiebt sich aus den Winkeln der Sehnenvierecke, welche der Punkt mit je einem Eck und den Fufspunkten auf den dieses Eck bildenden Seiten bestimmt.

8. Fällt man vom Fufspunkt der Höhe auf der Seite eines Dreiecks Normale auf die beiden andern Seiten und Höhen, so liegen die vier Punkte auf einer Geraden. (Spezieller Fall der vorhergehenden Aufgabe.)

9. Zieht man im Schnittpunkt der Ecktransversalen eines Dreiecks Normale zu diesen, so liegen deren Schnittpunkte mit den Gegenseiten in einer Geraden. — Andeutung. Man benütze §. 16, 1a mit dem Schnittpunkt als Projektionscentrum für jede Seite und ihren Teilpunkt und beachte, dafs nach I. Teil §. 18, 4b die Sinusverhältnisse neben dem Tripelverhältnis wegfallen.

10. Die durch einen Punkt gehenden Ecktransversalen eines Dreiecks teilen dessen Seiten so, dafs die Summe der Teilverhältnisse zweier von einem Eck ausgehenden Seitenstrecken gleich dem Teilverhältnis der Transversalen von demselben Eck. — Andeutung. Wende den Satz des Menelaus auf die beiden durch diese Transversale gebildeten Teildreiecke an, bestimme daraus die Verhältnisse der andern Seiten und addiere.

11. Von zwei Strahlen eines Punktes auf einer Diagonale eines Vierecks schneidet jeder ein Seitenpaar, welches nicht einen Grenzpunkt der Diagonale bildet, in zwei Punkten so, dafs das in fortlaufender Reihe der Teile geordnete Produkt der Teilverhältnisse $= +1$ ist, und umgekehrt: wenn letzteres der Fall ist, so schneiden einander die beiden Transversalen in einem Punkt der Diagonale.

12. Hierbei schneiden einander die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte je eines Seitenpaares, welches ein Eck der Diagonale bildet, auf der zweiten Diagonale des Vierecks (vgl. §. 22, 2).

13. Zieht man von den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks Tangenten an den eingeschriebenen Kreis, so schneiden diese Tangenten die Seiten des durch die Mittelpunkte bestimmten Dreiecks in drei Punkten einer Geraden. — Andeutung. Man wende für jede Seite des letzteren Dreiecks und ihren Teilpunkt §. 16, 1a an, indem man das gegenüberliegende Eck als Scheitel der projizierenden Strahlen betrachtet, ferner §. 17, 4a′ und berücksichtige, dafs die Seiten beider Dreiecke paarweise parallel sind.

14. Aus den Sätzen von Pascal und Brianchon sollen folgende abgeleitet werden:

a) Die Seiten eines Sehnendreiecks geben mit den jeweils gegenüberliegenden Seiten des zugehörigen Tangentendreiseits drei Schnittpunkte auf einer Geraden.	a′) Die Ecken eines Tangentendreiseits geben mit den jeweils gegenüberliegenden Ecken des zugehörigen Sehnendreiecks drei Verbindungsgerade durch einen Punkt.
b) Verbindet man die Berührungs-	b′) Schneidet man zwei Tangenten

punkte zweier Tangenten je mit zwei Punkten der Peripherie, so schneiden einander diese Verbindungsgeraden in zwei weiteren Punkten eines Strahles des Schnittpunktes der Tangenten.

durch irgend zwei weitere Tangenten, so gehen die beiden Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte durch einen Punkt der Berührungssehne der beiden ersteren Tangenten.

c) Je zwei Nebenecken eines Sehnenvierecks liegen auf einer Nebenseite des zugehörigen Tangentenvierseits (vier Punkte auf einer Geraden).

c′) Je zwei Nebenseiten eines Tangentenvierseits schneiden einander in einem Nebeneck des zugehörigen Sehnenvierecks (vier Gerade durch einen Punkt).

d) Verbindet man die Berührungspunkte eines Tangentenpaares je mit einem weiteren Punkt der Peripherie, so schneiden diese Verbindungsgeraden die Tangenten in zwei Punkten einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Berührungssehne und der Verbindungsgeraden beider Punkte geht (sechs Gerade durch diesen Schnittpunkt).

d′) Schneidet man ein Tangentenpaar je mit einer weiteren Tangente, so gehen die Geraden, welche die Berührungspunkte des ersteren Tangentenpaares mit diesen Schnittpunkten verbinden, durch einen Punkt der Geraden, welche die Scheitel beider Tangentenpaare verbindet (sechs Punkte auf dieser Geraden).

Aufgaben zum sechsten Kapitel.

§. 10. Lehrsätze.

1. Wird eine Strecke AB durch P und Q harmonisch geteilt, so ist: §. 18.

a) $$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}\right),$$

b) $$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PB} - \frac{1}{BQ}\right).$$

2. Werden gleiche Strecken einer Geraden $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 \ldots\ldots$ auf eine zweite Gerade nach A, B, C, D projiziert (Perspektive einer Säulenhalle) und trifft der zu ersterer Geraden parallele Strahl die zweite Gerade im Punkte F (Fluchtpunkt), so ist:

a) $$\frac{2}{PB} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PC}, \quad \frac{2}{PC} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PD}, \ldots\ldots$$

b) $$\frac{1}{PB} - \frac{1}{PA} = \frac{1}{PC} - \frac{1}{PB} = \frac{1}{PD} - \frac{1}{PC} \ldots\ldots$$

3. Jeder Winkel des Dreiecks der Seitenmitten eines gegebenen Dreiecks wird durch die zugehörige Seite und Schwerlinie des letzteren harmonisch geteilt. Auf den beiden anderen Schwerlinien entstehen vier harmonische Punkte.

4. Bestimmt man auf den drei Seiten eines Dreiecks ABC die den Schnittpunkten $A_1B_1C_1$ einer Transversale harmonisch zugeordneten Punkte $A_2B_2C_2$, so a) liegen auch die Punkte $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ je auf einer Geraden; b) gehen die Ecktransversalen durch $A_1B_2C_1$, $A_1B_1C_2$, $A_2B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ je durch einen Punkt; c) liegen die Mittelpunkte der Strecken zwischen je zwei Teilpunkten einer Seite auf einer Geraden. (Benütze §. 18, 8b und die Umkehrung des Satzes von Menelaus.)

5. Wie lautet der dem Satze 4 dual entsprechende?

§. 19. **6.** In einem Trapez bilden die beiden Mittelpunkte der parallelen Seiten mit dem Schnittpunkt der Diagonalen und dem der nicht parallelen Seiten vier harmonische Punkte.

7. Zieht man in einem Dreieck drei Ecktransversalen durch einen Punkt, so wird jede Seite von einer solchen und der Verbindungsgeraden der Punkte, in welchen die beiden andern Seiten geschnitten werden, harmonisch geteilt.

8. Verbindet man in einem Dreieck die Schnittpunkte einer Transversalen mit den Ecken, so erhält man auf jeder dieser Verbindungsgeraden vier harmonischen Punkte.

9. Verbindet man in einem Dreieck die Punkte, in welchen die Ecktransversalen eines Punktes die Seiten schneiden, so erhält man in jedem dieser Punkte vier harmonische Strahlen.

10. Zieht man zwischen den Schenkeln eines Winkels einen Parallelstrahlenbüschel und verbindet die Schnittpunkte der Schenkel und je zweier der Parallelen untereinander, so liegen die Schnittpunkte je zweier dieser Verbindungsgeraden auf einer Geraden, welche die Parallelstrecken halbiert.

11. In einem vollständigen Vierseit liegen die Mittelpunkte der Nebenseiten auf einer Geraden. (Wende den Satz der Aufgabe 4c auf das Dreiseit der drei Nebenseiten an. Oder: In dem Dreiseit dreier Seiten des Vierseits gehen die Verbindungsgeraden der Seitenmitten durch die Mittelpunkte der Nebenseiten. Wendet man auf ersteres Dreieck mit der vierten Seite des Vierseits als Transversalen den Satz von Menelaus an, so entspricht die Halbierung aller Strecken den Abschnitten, welche die fraglichen Mittelpunkte in dem Dreieck der Seitenmitten bilden).

§. 20. **12.** Jede auf einem Durchmesser eines Kreises normale Sehne wird von zwei Geraden, welche einen beliebigen Punkt der Peripherie mit den Grenzpunkten des Durchmessers verbinden, harmonisch geteilt.

13. Jeder Kreis durch zwei zugeordnete Pole eines Kreises schneidet letzteren rechtwinkelig.

14. Schneidet ein Kreis einen zweiten rechtwinkelig, so wird

jeder Durchmesser des einen durch die Peripherie des andern harmonisch geteilt.

15. Durch zwei Paare zugeordneter Pole eines Kreises läfst sich ein Kreis legen.

16. Die Centrale zweier einander ausschliefsenden Kreise wird durch die äufseren und inneren gemeinsamen Tangenten harmonisch geteilt.

17. Von einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf einem zweiten Kreis liegt, wird jeder Durchmesser durch die gemeinsame Sehne und die Peripherie des zweiten Kreises harmonisch geteilt. (Durch die Verbindungsgerade eines Schnittpunkts beider Kreise mit dem Mittelpunkt des ersteren und dem äufseren Teilpunkt des Durchmessers entsteht ein Zweistrahl mit Antiparallelen.)

18. Es seien durch einen Punkt der Geraden, welche die Berührungspunkte zweier Tangenten verbindet, eine zweite Gerade gezogen, welche die Tangenten in zwei Punkten schneidet.

a) Verbindet man diese Punkte mit den Berührungspunkten, so schneiden diese Verbindungsgeraden einander auf der Polare des erstgenannten Punktes und den Kreis in zwei Punkten eines Strahles durch jenen Punkt. — Andeutung: Die Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden mit dem Kreis bestimmen ein Sehnenviereck, von welchem der letztgenannte Schnittpunkt ein Nebeneck; die Verbindungsgerade desselben mit einem zweiten Nebeneck mufs durch den Schnittpunkt der Tangenten gehen und die Berührungssehne mit dem andern Nebeneck harmonisch teilen, woraus folgt, dafs dieses mit dem erstgenannten Punkt zusammenfällt.

b) Zieht man von beiden Punkten ebenfalls Tangenten an den Kreis, so liegt deren Schnittpunkt auf der Polare des erstgenannten Punktes und ihre Berührungssehne geht durch diesen Punkt. — Andeutung: Die vier Tangenten bestimmen ein Tangentenvierseit, von welchem die zweite Gerade eine Nebenseite; durch ihren Schnittpunkt mit einer zweiten Nebenseite müssen auch die Berührungssehnen gehen.

19. Wenn zwei projektivische Punktreihen nicht perspektivisch sind, so giebt es durch irgend einen Punkt höchstens zwei Verbindungsgeraden entsprechender Punkte. Es können nur je zwei solcher Verbindungsgeraden parallel sein. §. 21.

20. Wenn zwei projektivische Strahlenbüschel nicht perspektivisch sind, so giebt es auf einer Geraden höchstens zwei Schnittpunkte entsprechender Strahlen. Es können nur in zwei Paaren entsprechender Strahlen letztere parallel sein.

21. In zwei konjektivischen Gebilden mit zwei Doppelelementen wird deren Abstand (Winkel) durch irgend zwei Paare entsprechender Elemente stets in demselben Doppelverhältnis geteilt.

22. Punkte einer Geraden bilden eine involutorische Reihe, wenn für je zwei entsprechende Punkte das Produkt der Abstände von einem bestimmten Punkt konstant ist.

23. Alle Punktpaare, welche eine Strecke (Winkel) harmonisch teilen, bilden eine involutorische Reihe (Büschel), in welcher die Grenzpunkte der Strecke (Schenkel des Winkels) Doppelelemente sind.

24. Alle Kreise, welche durch zwei feste Punkte gehen, bestimmen auf einer Sekante eine involutorische Reihe, für welche der Schnittpunkt der Verbindungsgerade beider Punkte mit der Sekante Mittelpunkt ist.

25. Wenn zwei projektivische Reihen einer Geraden eine involutorische Reihe bilden, so ist das Verhältnis der Abstände zweier Punkte AB der einen Reihe vom Mittelpunkt M der Involution gleich dem Verhältnis der Abstände jedes dieser Punkte von dem Punkte, der dem andern zugeordnet ist:

$$MA : MB = AB_1 : BA_1.$$

26. Für drei Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1 einer involutorischen Reihe ist:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1 \qquad \text{oder } (ABC\ C_1A_1B_1) = -1.$$

27. a) Die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks schneiden eine Gerade in drei Punktpaaren einer involutorischen Reihe. — Andeutung: Sind AA_1, BB_1, CC_1 die Schnittpunkte, so ergeben die vier auf der Seite a liegenden Punkte, dafs AA_1BC $\barwedge$ $AA_1C_1B_1$ $\barwedge$ $A_1AB_1C_1$ (§. 21, 3 Zus.), woraus folgt, dafs AA_1 einander in doppelter Zuordnung entsprechen.

b) Wie heifst der entsprechende Satz vom vollständigen Vierseit?

28. Die Punkte einer Geraden und deren Schnittpunkte mit den Polaren der Punkte in Bezug auf einen (von der Geraden nicht berührten) Kreis bilden eine involutorische Reihe. Schneidet die Gerade den Kreis, so sind die Schnittpunkte Doppelpunkte; schneidet sie ihn nicht, so hat die Reihe keinen Doppelpunkt. — Andeutung: Man vergleiche die zu beiden Reihen perspektivischen Büschel, deren Scheitel im Mittelpunkt des Kreises, bzw. im Pol der Geraden liegt.

29. Die Strahlen eines Punktes und die Verbindungsgeraden des Punktes mit den Polen dieser Strahlen in Bezug auf einen (nicht durch den Punkt gehenden) Kreis bilden einen involutorischen Büschel. Liegt der Punkt aufserhalb des Kreises, so sind seine Tangenten Doppelstrahlen, liegt er innerhalb, so hat der Büschel keine Doppelstrahlen. — Andeutung: Mit Hilfe der Polare des Punktes ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückzuführen.

§. 11. Konstruktionen und Berechnungen.

1. Auf einer Strecke $AB = 20$mm liegt ein Punkt Q so, daſs $AQ = 5$, 10, 18mm; man soll die Lage des zu Q harmonisch zugeordneten Punktes R durch Rechnung und Konstruktion bestimmen; ebenso wenn $AQ = -15$, oder wenn $BQ = 4$ ist. §. 18.

2. Eine Strecke $AB = 30$mm soll harmonisch geteilt werden im Verhältnis $2:1$, (oder $3:2$, $p:q$). In welchem Verhältnis wird dann die Strecke der Teilpunkte durch die Grenzpunkte der ursprünglichen Strecke geteilt?

3. Eine Strecke $AB = a$ (60mm) soll durch zwei Punkte harmonisch geteilt werden, so daſs die Strecke dieser Punkte durch die Grenzpunkte der ersteren Strecke im Verhältnis $5:4$, $(10:3$, $p:q)$ geteilt wird.

4. Eine Strecke AB ist durch Q, R harmonisch geteilt im Verhältnis $v = \frac{3}{2}$ (0,25, -2); es ist $AQ = 15$mm; wie groſs ist QR?

5. Wenn auf einer Geraden von einem Punkt aus nach derselben Richtung hin zwei Punkte um 21, bezw. 28mm entfernt sind, in wie vielfacher Weise läſst sich zu den drei Punkten der vierte harmonische Punkt finden und wo liegt derselbe jeweils?

6. Wenn zu jeder möglichen Zusammenstellung der in der vorhergehenden Aufgabe resultierenden Punkte selbst wieder jedesmal der vierte harmonische Punkt gesucht wird, wo liegen diese Punkte? — Verallgemeinerung des Resultates!

7. In welchem Verhältnis ist AB durch Q und R harmonisch zu teilen, damit Q in die Mitte von AR fällt?

8. Es giebt zwischen zwei Lichtquellen einen Punkt, welcher von beiden gleich stark beleuchtet ist und ebenso einen Punkt in der Verlängerung der Verbindungsgeraden der Lichtquellen. Es soll aus dem Gesetz, daſs die Stärke des Lichtes proportional mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, bewiesen werden, daſs beide Punkte die Strecke zwischen den Lichtquellen harmonisch teilen.

9. Zu zwei Strecken a und b soll das harmonische Mittel konstruiert werden.

10. Es sind vier harmonische Punkte zu konstruieren, wenn einer derselben A gegeben ist und drei Gerade b, q, r, auf welchen die drei anderen Punkte liegen sollen. — Andeutung: Die Verbindungsgerade von br mit A sei a; konstruiere zu den Strahlen abr den zu r harmonisch zugeordneten Strahl q_1; sein Schnittpunkt mit q ergiebt Q. §. 19.

11. Man soll vier harmonische Strahlen konstruieren, wenn einer derselben a gegeben ist und drei Punkte B, Q, R, durch welche

die drei anderen Strahlen gehen sollen. — Andeutung: Verfahre analog der vorhergehenden Lösung.

12. Es ist auf einer Geraden $AM = MC$ gegeben. Durch einen Punkt P soll die Parallele zu AC konstruiert werden mit Anwendung des Lineals allein.

13. Es sind zwei parallele Gerade gegeben. Es soll mit Anwendung des Lineals allein eine Strecke auf einer dieser Geraden a) halbiert werden; b) wiederholt angetragen werden; c) in n Teile geteilt werden.

14. Es ist mit dem Lineal allein ein Winkel zu verdoppeln, auf dessen einem Schenkel ein normaler Scheitelstrahl gegeben ist.

15. Es soll mit dem Lineal allein zu einem halbierten Winkel die Halbierende des Nebenwinkels konstruiert werden.

16. Eine Strecke AB wird von einem Scheitel S aus auf eine parallele Gerade nach A_1B_1 projiciert. Der Schnittpunkt von A_1B mit AB_1 sei auf AB nach C projiciert, der Schnittpunkt von A_1B mit CB_1 nach D, der von A_1B mit DB_1 nach E u. s. f.. Der wievielte Teil von AB ist dann die Strecke von B nach C, D, E u. s. f.?

§. 20. **17.** Es ist ein Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von zwei gegebenen Geraden sowohl, als von zwei gegebenen Punkten in gegebenem Verhältnis $p:q$, bezw. $r:s$ stehen.

18. Ein Dreieck ist zu konstruieren, von welchem die durch eine Winkelhalbierende auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte gegeben sind und dazu noch:

a) ein an dieser Seite anliegender Winkel;

b) die Winkelhalbierende selbst;

c) die Summe der beiden anderen Seiten;

d) ihre Differenz.

Andeutung: Man konstruiere über dem Abstand des Teilpunktes und des ihm harmonisch zugeordneten Punktes einen Halbkreis. Denkt man sich c und d gelöst und die gegebene Strecke eingetragen, so zeigt sich, dafs von dem Bestimmungsdreieck die drei Seiten gegeben sind, da das fragliche Eck desselben symmetrisch ist mit einem gegebenen Eck in Bezug auf eine der Winkelhalbierenden als Axe.

19. Mit einem Kreis sei eine der folgenden Figuren gegeben; man soll die zugehörige Polarfigur zeichnen.

a) Das eingeschriebene regelmäfsige Dreieck, Viereck u. s. w.;

b) ein gleichseitiges Dreieck über einem Durchmesser;

c) ein gleichseitiges Dreieck über einem Radius;

d) ein Dreieck, dessen eine Seite Sehne, während die anderen Seiten Tangenten sind.

e) ein Parallelogramm;

f) ein vollständiges Viereck.

20. Es sei AB eine Strecke und Q, R seien zwei Teilpunkte auf derselben. Man soll in mm aufzeichnen und das Doppelverhältnis $(ABQR)$ berechnen, wenn in einerlei Richtung gemessen: §. 21.

a) $AB = 20\text{mm}, \quad AQ = 6, \quad AR = 16;$

b) $AQ = 12, \quad QB = 8, \quad BR = 4;$

c) $RA = 6, \quad AQ = 7, \quad AB = 20;$

d) $QA = 6, \quad QB = 24, \quad AR = 21.$

21. Auf einer Geraden seien vier Punkte $ABCD$ gegeben, so dafs

α) $AB = 6, \quad BC = 4, \quad CD = 5\text{mm},$

β) $AB = -12, \quad BC = 30, \quad CD = -10\text{mm}.$

Es sollen die Doppelverhältnisse berechnet werden, nach welchen die Strecken zwischen irgend zweier dieser Punkte durch die beiden anderen geteilt werden.

22. Wenn das Doppelverhältnis einer durch zwei Punkte geteilten Strecke $\triangle$ ist, so ergiebt sich für je drei weitere Strecken dieser Punkte das gleiche Verhältnis; für je vier andere soll nachgewiesen werden, dafs das Doppelverhältnis

$$\frac{1}{\triangle}, \quad 1 - \triangle, \quad \frac{1}{1 - \triangle}, \quad \frac{\triangle - 1}{\triangle}, \quad \frac{\triangle}{\triangle - 1}.$$

23. Es sei die Lage von drei Punkten ABC gegeben und der Wert des Doppelverhältnisses $\triangle$, welches durch C und einen weiteren Punkt D auf der Strecke AB hervorgebracht wird, und zwar sei:

α) $AC = 6, \quad AB = 24\text{mm}$ und $\triangle = \frac{1}{6};$

β) $AC = 6, \quad AB = 15, \quad \triangle = -\frac{1}{6};$

γ) $AC = -3, \quad AB = 6, \quad \triangle = \frac{1}{12};$

δ) $AC = -3, \quad AB = 15, \quad \triangle = -\frac{1}{12};$

man soll jedesmal die Lage der gegebenen Punkte in mm aufzeichnen; dann soll die Lage des Punktes D abgeschätzt, konstruiert, berechnet werden.

24. Die Strecke $AB = 30\text{mm}$ sei durch zwei Punkte Q und R geteilt. Man soll die Lage dieser Teilpunkte finden, wenn bekannt ist:

α) $QR = 14\text{mm}, \quad \triangle = (ABQR) = 8;$

β) $QR = 46\text{mm}, \quad \triangle = \frac{1}{24};$

γ) $QR = 24\text{mm}, \quad \triangle = -\frac{1}{9};$

δ) $QR = 34\text{mm}, \quad \triangle = -16;$

ε) $AB = a, \quad QR = b, \quad (ABQR) = \triangle.$

Welche Beziehung mufs im Falle ε) zwischen a, b, $\triangle$ stattfinden, damit überhaupt reelle Punkte Q und R sich finden lassen?

25. Man soll projektivische Punkte zweier Reihen konstruieren, wenn zwei Punktpaare AA_1 und BB_1 und zu dem Schnittpunkt C_1 beider Punktreihen der projektivische Punkt C gegeben ist. — Andeutung: Von den fünf gegebenen Seiten des Brianchon'schen Sechsseits fallen zwei in eine Gerade (AB und CC_1). Nimmt man A als Scheitel des Büschels $a_1 b_1 c_1$, und den Schnitt von AA_1 und BB_1 als Scheitel des Büschels abc, so ist $B_1 C$ Axe derselben.

26. Wie heifst die der Aufgabe 25 entsprechende Aufgabe und deren Lösung für Strahlenbüschel?

27. Man soll zu zwei projektivischen Punktreihen oder Strahlenbüscheln, von welchen drei Elementenpaare gegeben sind, die Elemente finden, welche in beiden Reihen bezw. Büscheln dem gemeinsamen Element (Schnittpunkt, Scheitelstrahl) beider Träger entsprechen. — Andeutung: Nach §. 21, 5 oder durch die Umkehrung der in vorhergehender Aufgabe gegebenen Folge der Konstruktionen.

28. Es sollen projektivische Punktreihen konstruiert werden, wenn ein Elementenpaar AA_1 und die Elemente B und C_1 gegeben sind, welche dem gemeinsamen Element $(B_1 C)$ beider Träger projektivisch sind. — Andeutung: BC_1 ist Axe zweier perspektivischen Büschel von A und A_1.

29. Von zwei projektivischen Reihen auf einer Geraden sei die eine Reihe von einem beliebigen Punkt S durch ein Strahlenbüschel projiziert.

a) Es soll der Scheitel S_1 eines zweiten Büschels gefunden werden, von welchem die zweite Punktreihe durch einen dem ersten gleichwendigen, kongruenten Büschel projiziert wird (§. 14, 4).

b) Liegen die Scheitel beider Büschel auf einerlei Seite oder auf den Gegenseiten des Trägers, wenn die Punktreihen gleichgerichtet sind? Wie liegen die Scheitel, wenn die Punktreihen gegengerichtet?

c) Was für eine Linie bildet der geometrische Ort des Schnittpunktes entsprechender Strahlen in beiden so konstruierten Büscheln?

d) Wie erhält man mit Hilfe dieser Linie weitere entsprechende Punktpaare?

e) Wie erhält man möglicher Weise die Doppelpunkte beider Reihen?

f) Wie ergiebt sich aus dieser Konstruktion, dafs bei gegengerichteten Punktreihen stets zwei Doppelpunkte, bei gleichgerichteten deren 2, 1 oder 0 vorhanden? (Vgl. b. und c.)

30. Man bestimme in zwei projektivischen Strahlenbüscheln eines einzigen Punktes die sich selbst entsprechenden Strahlen. — Andeutung: Mittels einer Geraden führe man die Aufgabe auf die vorhergehende zurück.

31. Es sind von einer involutorischen Reihe zwei Elementenpaare AA_1 und BB_1 gegeben. Es soll a) der Mittelpunkt der Involution, b) beliebige andere entsprechende Punkte konstruiert werden (mittels Kreise durch einen Punkt aufser der Geraden und je zwei entsprechende Punkte).

32. Es ist von einer involutorischen Reihe der Mittelpunkt M und ein Elementenpaar AA_1 gegeben. Es sollen weitere Punkte (auch Doppelpunkte) konstruiert werden.

33. Es sind in einer involutorischen Reihe zwei Punktpaare AA_1 und BB_1 gegeben. Es soll zu einem Punkt C der entsprechende C_1 durch das Lineal allein gefunden werden (mittels eines vollständigen Vierecks, siehe Aufgabe §. 10, 27a).

Aufgaben zum siebenten Kapitel.

§. 12. Lehrsätze.

1. Liegen zwei Parallelogramme zwischen zwei Parallelen, so schneiden ihre Diagonalen einander paarweise auf der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der Seiten, welche nicht auf beiden Parallelen liegen (zweideutig). §. 22.

2. Beweise den Satz der Übungen §. 9, 12 mittels perspektivischer Beziehung.

3. In einem vollständigen Viereck ist das Dreieck der drei Nebenecken perspektivisch zu dem Dreieck dreier Ecken des Vierecks mit dem vierten Eck als Centrum.

4. In einem vollständigen Vierseit ist das Dreiseit der drei Nebenseiten perspektivisch zu dem Dreiseit dreier Seiten des Vierseits mit der vierten Seite als Axe.

5. In jedem von zwei Kreisen haben die Polaren des inneren und äufseren Ähnlichkeitspunktes den gleichen Abstand. §. 23.

6. Der Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei Kreise rechtwinkelig schneidet, liegt auf der Potenzgeraden der letzteren.

7. Werden zwei Kreise von zwei anderen rechtwinkelig geschnitten, so ist die Centrale des einen Paares Potenzgerade des anderen.

8. Werden zwei Kreise von zwei anderen berührt, so liegt der Ähnlichkeitspunkt des einen Paares auf der Potenzgeraden des anderen Paares und zwar der äufsere bei gleichartiger, der innere bei ungleichartiger Berührung.

9. Werden drei Kreise von zwei anderen gleichartig berührt, so ist die Potenzgerade der letzteren äufsere Ähnlichkeitsaxe der ersteren.

10. Wenn zwei Kreise einen dritten rechtwinkelig schneiden, so bestimmen die vier Schnittpunkte ein vollständiges Viereck, von welchem die nicht durch die gemeinsamen Sekanten gebildeten Nebenecken die Ähnlichkeitspunkte der beiden ersteren Kreise sind. — Andeutung: Beschreibt man zwei Kreise durch je zwei der vier Schnittpunkte von den Schnittpunkten der zugehörigen Tangenten des dritten Kreises als Mittelpunkten, so werden diese von den ersten beiden Kreisen berührt.

11. Man nennt eine Linie invers zu einer anderen Linie in Bezug auf einen Punkt als Inversionscentrum, wenn die Strahlen dieses Punktes von beiden Linien so begrenzt werden, dafs das Produkt der von dem Punkt gebildeten Abschnitte, die Inversionspotenz, konstant ist.

a) Die inverse Linie zu einer Geraden ist ein Kreis durch das Inversionscentrum.

b) Die inverse Linie zu einem Kreis, welcher durch das Inversionscentrum geht, ist ein Kreis.

c) Die inverse Linie eines Kreises, welcher nicht durch das Inversionscentrum geht, ist ein Kreis; für beide Kreise ist das Inversionscentrum Ähnlichkeitspunkt.

12. a) Von einer Raute $ABCD$, deren Seiten a durch Gelenkverbindung gegen einander beweglich sind, werden zwei einander gegenüberliegende Ecken BD so bewegt, dafs ihre Entfernungen von einem Punkt P unverändert $= b$ bleiben. Es ist nachzuweisen, dafs die drei Punkte PAC stets auf einer Geraden (der Mittelnormale zu BD) liegen, und dafs bei der Drehung von PB und PD um P die Punkte A und E inverse Linien beschreiben, zu welchen P Inversionscentrum und $(b^2 - a^2)$ Inversionspotenz ist.

b) Beschreibt hierbei A einen Kreisbogen um einen Punkt K, so beschreibt C einen Kreis um einen Punkt auf PK.

c) Wird der Radius des ersteren Kreises $AK = PK$ genommen, so beschreibt C eine zu PK normale Gerade (Geradführung).

§. 13. Konstruktionen.

§. 22. **1.** Es ist ein Parallelogramm $a_1 b_1 c_1 d_1$ in Fig. 108 gegeben; ferner eine Gerade (s), welche die Seiten des Parallelogramms schneidet. Es soll durch einen gegebenen Punkt (A') eine Parallele zur letzteren Geraden gezogen werden mit Hilfe eines Lineals allein. Andeutung: Betrachte die Gerade als Projektionsaxe, den Punkt als Fluchtpunkt zweier Parallelen; projiziere die Diagonale beliebig u. s. w.

2. Es sollen drei Strahlenbüschel, deren Scheitel auf einer Geraden liegen als Parallelstrahlenbüschel projiziert werden.

§. 23. **3.** Es ist zu einem gegebenen Punkt bei gegebener Potenz p^2 die inverse Linie zu konstruieren:

a) zu einer gegebenen Geraden;
b) zu einem Kreis durch jenen Punkt;
c) zu einem Kreis, welcher nicht durch jenen Punkt geht.

4. Es ist durch einen Punkt P ein Strahl zu ziehen, welcher von den Schenkeln eines Winkels so begrenzt wird, dafs das Produkt der durch den Punkt bestimmten Abschnitte p^2 ist. (Vgl. §. 13, 3.)

5. Es ist durch einen Schnittpunkt zweier Kreise eine Gerade zu ziehen, welche von den Kreisen begrenzt und in dem Punkt geteilt wird, so dafs das Produkt der Abschnitte p^2 ist.

6. Auf einem quadratischen Blatt von 150 mm Seite sind die Mittelpunkte K_1, K_2, K_3 dreier Kreise von der einen Seite um 31, 50, 98 mm, von der anstofsenden um 47, 79, 62 mm entfernt anzunehmen, ihre Radien bezw. zu 18,5, 10,5, 29 mm. Es sollen die acht berührenden Kreise gezeichnet werden. §. 24.

7. Es ist ein berührender Kreis in eine Fläche zu zeichnen, welche begrenzt ist
a) von drei Kreisbögen;
b) von zwei Kreisbögen und einer Geraden (Spitzbogen);
c) von einem Kreisbogen und zwei Geraden.

Aufgaben zum achten Kapitel.

§. 14. Lehrsätze.

1. Dreiecke mit gemeinsamer Grundseite verhalten sich wie die Strecken, welche auf der Verbindungsgeraden ihrer Spitzen durch die Grundseite gebildet werden. §. 25.

2. Der eine der Sätze in §. 25, 3a sei bewiesen; man soll daraus den anderen folgern. — Andeutung: Verwandle beide Dreiecke mit derselben Grundseite in rechtwinkelige und lege sie mit der Grundseite aufeinander.

3. Beweise den Satz von Ceva (§. 17, 1b') durch Vergleichung von Dreiecksinhalten. — Andeutung: Wende Übungssatz 1 auf je zwei Dreiecke an, welche durch je zwei Ecken des gegebenen Dreiecks und den Schnittpunkt der Transversalen bestimmt sind.

4. Wenn die durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks gehenden Transversalen α, β, γ, ihre unteren Abschnitte bezw. α', β', γ' und ihre oberen Abschnitte α'', β'', γ'' sind, welchen Wert haben die Summen:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma}$$

und

$$\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\beta''}{\beta} + \frac{\gamma''}{\gamma}?$$

Andeutung: Man vergleiche Teile des Dreiecks je mit dem ganzen Dreieck.

Es soll bewiesen werden, dafs dieselben Summen erhalten werden, wenn S ein beliebiger Punkt ist.

5. In einem $\triangle ABC$ seien die Transversalen $AA_1, ..$ so gezogen, dafs jede, stets im selben Sinne gerechnet, von der Gegenseite $\frac{1}{n}$ abschneidet. Die Schnittpunkte je zweier auf einander folgenden Transversalen seien Q, R, S. Man beweise, dafs die Dreiecke AB_1Q, BC_1R, CA_1S einander gleich sind (berechne $AQ : AA_1$ mittels der durch eine Parallele von B_1 zu BC erhaltenen Abschnitte) und berechne das Verhältnis der Dreiecke QRS und ABC.

6. Was folgt (aus §. 25, 4) für die Lage der Gegenseiten des gemeinsamen Winkels zweier Dreiecke, welche gleichen Inhalt haben?

7. Beweise, dafs der Satz in §. 25, 4 auch für Dreiecke gilt, in welchen zwei Winkel einander zu $2R$ ergänzen.

8. Wählt man auf den Seiten a, b, c eines Dreiecks Punkte, welche dieselben (im selben Sinne geordnet) in Abschnitte a' und a'', b' und b'', c' und c'' teilen und verbindet man die Teilpunkte, so verhält sich der Inhalt des entstehenden Dreiecks zu dem des ursprünglichen wie

$$(a' \cdot b' \cdot c' + a'' \cdot b'' \cdot c'') : (a \cdot b \cdot c).$$

Andeutung: Vergleiche die abgeschnittenen Dreiecke einzeln mit dem ursprünglichen Dreieck und ersetze die Seiten des letzteren durch die Summe ihrer Abschnitte.

Zusatz. Was wird aus dem Satze, α) wenn

$$a' = \frac{1}{p} \cdot a, \quad b' = \frac{1}{q} \cdot b, \quad c' = \frac{1}{r} \cdot c$$

ist? (Beispiel: $p = 2$, $q = 3$, $c = 4$.)

β) wenn $p = q = r$ ist?

γ) wenn die nach den gewählten Punkten gehenden Ecktransversalen durch einen Punkt gehen?

δ) wenn einzelne der gewählten Punkte auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten liegen? (Benütze Nr. 7.)

9. Der pythagoreische Satz soll mit Benutzung von §. 25, 5 bewiesen werden.

---

§. 26. **10.** Von den beiden in ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck beschriebenen Quadraten ist das über der Hypotenuse stehende $\frac{1}{9}$ und das andere $\frac{1}{8}$ des Quadrates der Hypotenuse.

11. Die Seite des in ein gleichseitiges Dreieck beschriebenen Quadrates ist gleich dem Überschuſs der vierfachen Höhe des Dreiecks über den Umfang.

12. a) Die Fuſspunkte der Normalen von einem Punkt auf die Seiten eines Dreiecks teilen diese so, daſs die Summe der Quadrate von drei nicht aneinander angrenzenden Abschnitten gleich ist der Summe der Quadrate der übrigen. b) Umgekehrt: Die Normalen, welche die Seiten in solche Abschnitte teilen, gehen durch einen Punkt.

13. Die Formel für den Inhalt eines Trapezes (§. 26, 1e), soll gefunden werden unter Benützung a) der Mittellinie, b) einer Diagonale, c) einer Hilfslinie, welche von einem Eck aus parallel zu einer der nicht parallelen Seiten gezogen wird.

14. Der Inhalt eines Vierecks, dessen Diagonalen zu einander normal sind, ist gleich dem halben Produkte der Diagonalen. — Andeutung: Berechne die Teildreiecke oder benütze das umgeschriebene Parallelogramm, dessen Seiten den Diagonalen parallel sind.

Zusatz. Wie ändert sich der Satz, wenn die Diagonalen einen Winkel $= \frac{1}{3} R$ oder $\frac{1}{2} R$ oder $\frac{2}{3} R$ bilden?

15. Welchen Wert nimmt a^2 im allgemeinen pythagoreischen Satze an, wenn α) $\sphericalangle bc = \frac{2}{3} R$? β) $\sphericalangle bc = \frac{4}{3} R$? γ) wenn $a = c$ ist?

16. In einem Dreieck sei $\sphericalangle ab = 2 \cdot \sphericalangle ac$; dann ist: $c^2 - b^2 = ab$. Andeutung: Setze in §. 26, 4b $p = w_3$. — Rein geometrischer Beweis durch Verlängern von a um b und Anwendung von §. 8, 2.

17. a) Die zur Dreiecksseite c gehörige Schwerlinie sei $= m$ und die Entfernung ihres Fuſspunktes von dem zugehörigen Höhenfuſspunkt sei $= d$. Dann ist zu beweisen, daſs:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 + m^2\right]$$

und

$$a^2 - b^2 = 2 \cdot c \cdot d.$$

Andeutung: Bestimme a und b nach dem allgemeinen pythagoreischen Satze aus den durch m gebildeten Teildreiecken.

b) Wie läſst sich m durch a, b, c ausdrücken? oder c durch a, b, m?

c) Welcher Satz folgt bei Anwendung der ersten Formel in a) auf das Parallelogramm, wenn dabei m die halbe Diagonale bedeutet?

d) Wende den ersten Satz in a) an auf zweimal zwei auf einander folgende Seiten eines beliebigen Vierecks und benütze dabei die Verbindungsstrecken, welche von der Mitte einer Diagonale zu den beiden gegenüberliegenden Ecken und zur Mitte der anderen

Diagonale gehen (Satz von Euler). — Spezialisierung für das Parallelogramm?

18. Schneiden einander zwei Sehnen rechtwinkelig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Abschnitte gleich dem Quadrat des Durchmessers.

19. Der Flächeninhalt eines Kreisvierecks ist gleich dem Produkt einer Diagonale mit der Summe der Produkte je zweier einerseits der Diagonale liegenden Seiten, dividiert durch den doppelten Kreisdurchmesser.

20. Der Flächeninhalt eines Vierecks, in und um welches ein Kreis beschrieben werden kann, ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt seiner Seiten.

21. Es soll bewiesen werden, dafs in jedem Dreieck:

a) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3},$$

und entsprechendes für ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3;

b) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3};$$

c) $$\frac{2}{h_1} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}$$

und entsprechend für $\frac{2}{h_2}$ und $\frac{2}{h_3}$;

d) $$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r.$$

e) $$J = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3}.$$

§. 15. Konstruktionen und Berechnungen.

§. 25. **1.** Ein Dreieck soll durch Gerade, welche von einem Eck ausgehen, in drei Teile geteilt werden, welche sich wie $2:3:4$ verhalten.

2. Es soll ein Dreieck konstruiert werden, so dafs es einem gegebenen ähnlich und $n$mal (zwei, dreimal) so grofs ist als dieses.

3. Ein Dreieck ABC soll in ein inhaltsgleiches verwandelt werden, welches einem gegebenen δ ähnlich ist. — Andeutung: Ziehe über AB ein $\triangle\, \varepsilon \backsim \delta$ und verwandle ABC so, dafs es mit ε die Winkel an AB gemeinsam hat.

4. Man soll ein Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels so verwandeln, dafs a) die denselben einschliefsenden Seiten nun gleich werden; b) die Gegenseite des Winkels einer gegebenen Geraden l parallel wird. — Andeutung zu b): Ziehe durch ein Eck die Parallele zu l.

5. Ein Dreieck habe die Seiten $a = 25$, $b = 29$, $c = 36$ und parallel zu c sei im Dreieck eine Strecke $c' = 12$ (oder 8 oder 26)

gezogen. Der wievielte Teil des Dreiecks wird durch c' abgeschnitten?

6. Ein dem Dreieck abc in voriger Nummer ähnliches Dreieck habe den Inhalt $= 90$ (oder 160 oder 705,6). Wie grofs sind dessen Seiten, wenn der Inhalt von $abc = 360$ ist?

7. Zwei Dreiecke d und δ haben einen Winkel gleich und die zwei denselben einschliefsenden Seiten seien bei d gleich 21 und 20, bei δ aber in Summe $= 71$ (Differenz $= 31$); der Inhalt von d sei $= 126$, der von $\delta = 306$. Wie grofs sind in δ die den betreffenden Winkel einschliefsenden Seiten? (Quadratische Gleichung.)

8. Das Dreieck d in voriger Nummer soll durch eine Parallele zur dritten nicht angegebenen Seite in zwei (oder drei) gleiche Teile geteilt werden; wie grofs werden die Seitenabschnitte?

---

9. Welchen Inhalt hat ein Rechteck, dessen Seiten bezw. sind a) 19 und 21? b) $8\frac{3}{4}$ und $6\frac{2}{3}$? c) 17,2 und 9,5? §. 26.

10. Seite und Diagonale eines Rechteckes seien bezw. a) 9 und 41; b) 6,6 und 13; c) $2\frac{1}{2}$ und $3\frac{5}{8}$. Wie grofs ist sein Inhalt?

11. Der Umfang eines Rechteckes sei $= 52$, seine Grundseite sei dreimal so grofs als seine Höhe. Welchen Inhalt hat es?

12. Wie grofs ist der Inhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen a) Katheten sind $= 34{,}5$ und 8,2; b) Hypotenuse und Kathete bezw. sind $= 8{,}9$ und 8?

13. Von zwei inhaltsgleichen Rechtecken ist das eine 117 m lang und 35 m breit, das andere 65 m lang; wie breit ist dieses?

14. Welchen Inhalt hat ein Rhombus, dessen Diagonalen $= 90$ und 56 sind?

15. Die Parallelseiten eines Trapezes seien $= 24$ und 11, ihr Abstand $= 8{,}8$ (bezw. $39\frac{3}{4}$, 16,45 und $32\frac{1}{5}$); welchen Inhalt hat es?

16. Wie grofs ist die eine Parallelseite eines Trapezes, wenn die andere $= 17$ cm, wenn der Abstand beider $= 15$ cm und wenn der Inhalt $= 210$ qcm ist?

17. Höhe und Parallelseiten eines Trapezes verhalten sich wie $2 : 3 : 5$, der Inhalt ist $= 512$; wie grofs sind die Parallelseiten selbst?

18. Man soll den Inhalt eines Dreiecks finden, dessen Seiten sind:

α) 10, 17, 21; β) 25, 29, 36; γ) 56, 25, 39; δ) 33, 25, 52.

19. Von einem viereckigen Feld $ABCD$ ist die Seite $AB = 13$ m, $BC = 40$ m, $CD = 15$ m, $DA = 44$ m und die Diagonale $AC = 37$ m. Wie viel Ar umfafst das Feld?

20. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks sei $= 100$ qm; wie grofs ist dessen Seite?

21. Wenn die alten Römer den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks $= \frac{1}{2} a^2$ rechneten (wobei a die Seite), welchen Fehler machten sie hierbei? oder welchen Fehler begeht man, wenn man (nach Heron) jenen Inhalt $= \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{10} a^2$ setzt?

22. Der Inhalt eines Dreiecks soll durch die drei Höhen ausgedrückt werden. — Andeutung: Setze in die heronische Formel $a = \frac{2J}{h_1}$ u. s. w.

23. Man soll den Inhalt eines Trapezes durch seine vier Seiten ausdrücken. — Andeutung: Ziehe durch ein Eck die Parallele zu einer der nicht parallelen Seiten und berechne die Höhe des hierdurch abgeschnittenen Dreieckes.

24. Von einem Kreisvierecke sei aus den vier Seiten a, b, c, d (z. B. $a = 104$, $b = 56$, $c = 49$, $d = 39$)

a) eine Diagonale zu berechnen,

b) der Radius des umgeschriebenen Kreises zu berechnen.

25. Beweise die in §. 26, 7 Zusatz über das Verhältnis der Diagonalen eines Sehnenvierecks abgeleitete Formel auf folgende Art:

a) Berechne den Inhalt des Vierecks als Summe zweier durch die Diagonalen gebildeten Dreiecke zweimal (nach §. 26, 5) und setze die beiden Ausdrücke für das Viereck gleich; oder: Verlängere zwei Gegenseiten und berechne aus den entstehenden ähnlichen Dreiecken die äufseren Abschnitte der Sekanten und deren Verhältnis.

26. Der Inhalt eines Sehnenvierecks soll gefunden werden:

a) indem man aus dem bekannten Produkt und Verhältnis der Diagonalen zuvor diese selbst berechnet;

b) indem man zwei Gegenseiten verlängert bis zum Schnitt, den Inhalt des grofsen und des kleinen Dreiecks durch die ganzen Sekanten und deren äufsere Abschnitte sowie die Sehnen ausdrückt u. s. w.

27. Welchen Inhalt hat ein Sehnenviereck, dessen Seiten sind:

α) 3, 7, 9, 11; β) 68, 55, 43, 14; γ) 80, 91, 195, 300.

---

§. 27. **28.** Es sollen die Werte der folgenden Ausdrücke konstruiert werden, wenn darin $a, b, c, \ldots$ beliebige Strecken, p und q aber beliebige Zahlen bedeuten:

a) $\frac{a \cdot c}{a - b}$; b) $\frac{a \cdot c}{-a + b + c}$; c) $\frac{a \cdot c + b \cdot d}{f}$; d) $\frac{a \cdot c + b \cdot c}{f}$;

e) $\frac{a^2 + b \cdot c}{f}$; f) $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot f}$; g) $\frac{a \cdot b^2 \cdot c}{d \cdot e \cdot f}$.

29. Ebenso:

a) $\frac{a \cdot b \cdot c}{a^2 + b \cdot c}$ $\left(\text{z.B. als} = \frac{a \cdot b}{\frac{a^2}{c} + b} \text{ oder } = \frac{b \cdot c}{a + \frac{b \cdot c}{a}} \text{ oder} = a - \frac{a^3}{a + \frac{b \cdot c}{a}}\right)$;

b) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot c$ $\left(\text{z. B. als} = \frac{u^2}{v^2} \cdot c = \frac{u \cdot c}{v} \cdot \frac{u}{v} = m \cdot \frac{u}{v}\right)$;

c) $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$ $\left(\text{z. B.} = \frac{a^2 + \frac{b^3}{a}}{a + \frac{b^2}{a}} \quad \text{oder} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 + b^2}\right)$;

d) $\frac{a^4 - a^2b^2 + ab^3}{a^3 + b^3}$ $\left(\text{z. B.} = \frac{a^2 - b^2 + \frac{b^3}{a}}{a + \frac{b^3}{a^2}}\right)$;

e) $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c}$ (Vgl. §. 26, 3). f) $\sqrt[4]{a^4 + a^2b^2}$ $\left(\text{z. B.} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.

30. Ebenso:

a) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{p}{q} \cdot a^2}$ (insbesondere für $p = 5$ und $q = 4$);

c) $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$; d) $\sqrt{ab + cd} = \sqrt{a\left(b + \frac{cd}{a}\right)}$ e) $\sqrt{a^2 + bc}$.

(Warum ist der letzte Ausdruck die Diagonale eines gleichschenkeligen Trapezes, dessen Schenkel a und dessen Parallelseiten b und c sind?);

f) $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ (vgl. Aufg. §. 14, 15β);

g) $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ (vgl. Aufg. §. 14, 15α); h) $\sqrt{a^2 + b^2 \mp 2ac}$ (vgl. §. 26, 2)

i) $a \cdot \sqrt{5}$ (Beachte, dafs $5 = 5 \cdot 1 = 2^2 + 1 = 3^2 - 2^2$ u. s. w.)

k) $\sqrt{a^2 + a^2\sqrt{2}}$; l) $a\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$; m) $a \cdot \sqrt{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$;

n) $\frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{2}$; o) $\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$; p) $\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{2}}$;

q) $\sqrt{\frac{a^4}{b^2} - \frac{2a^2c}{b}}$; r) $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \pm \frac{b^2}{4}}}$; s) $\sqrt{ab + \frac{acf}{b} - 2f^2}$.

31. Ebenso, wenn x, y, z in den folgenden Gleichungssystemen die Unbekannten bedeuten:

a) $\begin{Bmatrix} x + y = a \\ x - y = \frac{b \cdot c}{a} \end{Bmatrix}$; b) $\begin{Bmatrix} x + y = \frac{a + b + c}{2} \\ x \cdot y = \frac{b \cdot c}{2} \end{Bmatrix}$;

c) $\begin{Bmatrix} x = \frac{(a+b) \cdot c}{2y} - b \\ y = \frac{(x - b) \cdot c}{a - b} \end{Bmatrix}$; d) $\begin{Bmatrix} x \cdot y = a \cdot b \\ y = \sqrt{\frac{4x^2}{3}} \end{Bmatrix}$; e) $\begin{Bmatrix} y + z = a - x \\ y \cdot z = b \cdot x \\ y^2 + z^2 = x^2 \end{Bmatrix}$.

Mit einer Unbekannten.

§. 28. **32.** Man soll parallel mit den Seiten eines Rechteckes und in gleichen Abständen von ihnen Gerade ziehen, so daſs das entstehende Rechteck einen gegebenen Umfang hat.

33. Wie muſs eine Gerade parallel zu einer Rechteckseite gezogen werden, a) damit der Umfang des abgeschnittenen Rechtecks halb so groſs als der des gegebenen wird? b) damit das abgeschnittene Rechteck dem gegebenen ähnlich wird? c) damit die Diagonale des Rechtecks im Verhältnis seiner Seiten geteilt wird?

34. Ein Rechteck soll in ein rechtwinkeliges Dreieck mit gegebener Hypotenuse verwandelt werden.

35. Man soll eine Strecke a so um x verlängern, daſs das Rechteck aus a und $(a+x)$ gleich einem gegebenen Quadrat wird.

36. Auf einer Strecke liegt eine zweite. Wo muſs der Punkt liegen, welcher beide Strecken in demselben Verhältnis teilt?

Mit zwei Unbekannten.

37. In einem Dreieck soll eine Ecktransversale so gezogen werden, daſs beide Teildreiecke denselben Umfang haben.

38. In einem stumpfwinkeligen gleichschenkeligen Dreieck soll eine Parallele zur Grundseite so gezogen werden, daſs sie die mittlere Proportionale zwischen dem Schenkel und seinem oberen Abschnitte wird.

39. In einem gleichseitigen Dreieck soll zur einen Seite eine Normale so gezogen werden, daſs ihr Quadrat gleich dem Rechteck der Abschnitte ist, in welche a) die zweite Seite, b) die verlängerte dritte Seite durch die Normale geteilt wird.

40. In einem Dreieck ABC soll parallel zu $BC = a$ eine Gerade QR so gezogen werden, daſs:

a) $AQ = RC$; b) $QR = RC$; c) $QR^2 = AQ \cdot AB$;
d) $QB + RC = p$; e) $AQ + AR = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$;
f) $QB \pm RC = p$ (insbesondere auch $= QR$); g) $AQ \pm RC = QR$;
h) $RC - AQ = QR$; i) $AQ - QB = \pm QR$; k) $AQ \pm RC = p$;
l) $QR \pm BC = AQ \pm AR$; m) der Umfang des abgeschnittenen Trapezes eine gegebene Gröſse $2p$ habe.

41. Man soll ein gleichschenkeliges Trapez konstruieren aus den beiden Parallelseiten und aus der Summe von Diagonale und Schenkel. — Andeutung: Benütze den ptolemäischen Satz.

Rein quadratische Gleichungen.

42. Es soll ein Dreieck in ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck verwandelt werden.

43. Welche Beziehung mufs zwischen den Seiten eines rechteckigen Stückes Papier stattfinden, damit dasselbe beim Halbieren stets ein dem ganzen ähnliches Rechteck giebt? Konstruktion!

44. In einem Trapez soll zu den Parallelseiten eine Parallele so gezogen werden, dafs sie die mittlere Proportionale zwischen jenen Seiten ist.

45. Durch einen Punkt im Inneren eines Kreises soll eine Sehne so gezogen werden, dafs sie durch jenen Punkt im Verhältnis $1:2$ geteilt wird. (Vgl. §. 13, 3b.)

46. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Inhalt $= f^2$ gegeben ist.

47. Man soll in einen Halbkreis ein Quadrat so einschreiben, dafs zwei Ecken auf dessen Durchmesser, zwei auf dem Bogen liegen. (Vgl. Aufgabe §. 7, 16.)

48. Von einem aufserhalb eines Kreises gegebenen Punkte aus soll eine Sekante so gezogen werden, dafs deren äufserer Abschnitt zum inneren sich verhalte a) wie $1:1$; b) wie zwei gegebene Strecken a und b. (Vgl. §. 13, 3b.)

49. Man soll die Fläche eines Trapezes durch eine Parallele zu den Parallelseiten (a und b) halbieren. — Andeutung: Die Höhe des Trapezes sei $= h$, die des einen Teiltrapezes setze $= x$ und die Parallele $= y$.

50. Es soll a) ein gleichseitiges Dreieck oder b) ein regelmäfsiges Sechseck als geometrisches Mittel zwischen zwei gegebenen Quadraten konstruiert werden.

Gemischt quadratische Gleichungen.

51. Man soll ein rechtwinkeliges Dreieck konstruieren, dessen Seiten eine arithmetische Reihe bilden, wenn die eine Kathete $= a$ gegeben ist.

52. Man soll ein Antiparallelogramm konstruieren, in welchem die Diagonalen zu den nicht parallelen Seiten normal sind, wenn letztere $= a$ und noch die kleinere der Parallelseiten $= b$ gegeben sind.

53. In ein Quadrat soll ein gleichseitiges Dreieck so eingeschrieben werden, dafs beide Figuren ein Eck gemeinsam haben. — Andeutung: Beachte, dafs die Gegenseite des gemeinsamen Eckes

parallel der Diagonale ist, (und setze den durch sie auf der Quadratseite gebildeten Abschnitt $= x$.)

54. Eine Strecke a soll in einem Punkte so geteilt werden, daſs das Quadrat des einen Abschnittes das Dreifache des Quadrates des anderen Abschnittes ist.

55. Zwei Strecken a und b sind so zu legen, daſs die Grenzpunkte der einen die andere Strecke harmonisch teilen. — Andeutung: Man betrachte den Abstand des einen Grenzpunktes von der Mitte der anderen Strecke als Unbekannte.

56. Von vier harmonischen Punkten sind die beiden äuſseren gegeben. Die inneren sind so zu bestimmen, daſs sie gleiche Abstände von den äuſseren haben.

57. Die Abstände zweier harmonisch zugeordneten Punktpaare a und b sind gegeben. Es ist die gegenseitige Lage dieser Punkte zu bestimmen.

58. Es sind zwei Strecken AB und A_1B_1 einer Geraden durch ein Punktpaar XY harmonisch zu teilen. — Andeutung: Lege um AB und A_1B_1 Kreise, die einander schneiden; die gemeinsame Sekante derselben giebt die Mitte von XY.

Aufgaben zum neunten Kapitel.

§. 16.

§. 29. **1.** Ein Zweistrahl $S(ab)$ werde von Parallelen AB, A_1B_1 ... durchschnitten, welche normal zum einen Strahle a sind. Wenn nun

$$AB = 24, \quad A_1B_1 = 6, \quad A_2B_2 = 15$$

und wenn die Hypotenuse $SB = 40$ ist, wie groſs sind SB_1 und SB_2? Wie groſs ist $\sin ab$?

2. Wie groſs ist $\sin\alpha$ und $\sin\beta$, wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck a, b, c, gegeben sind, nämlich bezw.:

a) 3, 4, 5; b) 5, 12, 13; c) 4,8, 5,5, 7,3; d) $2uv$, $u^2 - v^2$, $u^2 + v^2$.

3. Wie groſs sind cos, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ bei denselben Werten von a, b, c wie in Nr. 2.

4. Zeichne mit Winkelmesser Halbstrahlen, von welchen jeder mit dem folgenden 10^0 bildet.

a) Zu den entstehenden Winkeln von 10^0, 20^0, .. 80^0 zeichne beliebige Gegenkatheten, miſs deren Länge und die der zugehörigen Hypotenuse ab und bestimme so $\sin 10^0$, $\sin 20^0$, ... — Entsprechend die übrigen Funktionen. — Vergleiche die gefundenen Werte mit den folgenden genaueren Werten:

	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
sin	0,174	0,342	0,500	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985
cos	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,500	0,342	0,174
tg	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,748	5,671
cotg	5,671	2,748	1,732	1,192	0,839	0,577	0,364	0,176

b) Durchschneide die Halbstrahlen vom Scheitel aus mit einem Kreisbogen, dessen Radius 1 dm; wähle diese Strecke je als Hypotenuse, gieb die Katheten in Decimetermafs an und berechne sin und cos. — Wie gelangt man entsprechend zu tg α und cotg α?

5. Zu einer gewissen Zeit wirft ein vertikaler Stab einen horizontalen Schatten so lang, dafs Tangens des Höhenwinkels der Sonne $= 2{,}82$ ist. Wie hoch ist nun ein Turm, der zu gleicher Zeit einen horizontalen Schatten $= 174{,}3$ m wirft? (Höhe des Strafsburger Münsters.)

6. Stelle die Werte der Funktionen für Winkel $= 0, \frac{R}{5}, \frac{R}{3}, \frac{R}{2}, \frac{2R}{3}, R$ in einer Tabelle zusammen.

7. Man soll die übrigen Funktionen berechnen, wenn gegeben ist:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; b) $\cos\alpha = 0{,}8$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$;

d) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{209}{120}$; e) $\sin\beta = s : \sqrt{1+s^2}$; f) $\cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

g) $\operatorname{tg}\beta = 2 : \left[\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right]$; h) $\operatorname{cotg}\beta = \frac{u^2 - v^2}{2uv}$.

8. Stelle die Werte der Funktionen, jede durch jede andere ausgedrückt, in einer Tabelle zusammen.

9. Wenn $50 \cdot \sin^2\alpha + 75 \cdot \sin\alpha = 63$, wie grofs ist $\sin\alpha$? wie grofs sind die drei anderen Funktionen?

10. Wie grofs sind sin und cos eines Winkels, wenn sich:

a) der erstere zum letzteren wie $1 : \sqrt{3}$ verhält? (Wie grofs ist der Winkel selbst?)

b) das Quadrat des ersteren zu dem des letzteren wie $1600 : 81$ verhält?

11. Man soll die folgenden Ausdrücke so umformen, dafs sie nur noch eine Funktion enthalten, nämlich

a) nur $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha, \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}, \quad \frac{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 1}{\cos^2\alpha - 1};$$

b) nur $\cos\alpha$:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha \cdot (1 - \cos\alpha)};$$

c) nur $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha},\quad \frac{\cos^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha+\sin^2\alpha}{1+\operatorname{cotg}\alpha},\quad \operatorname{cotg}\alpha+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)}.$$

12. In einem Halbkreis, dessen Durchmesser 1 ist, bilde eine Sehne mit dem Durchmesser den Winkel α. Man ziehe die zu diesem Peripheriewinkel gehörige Sehne, sowie die Tangenten in den Grenzpunkten des Durchmessers und verlängere die Sehnen bis zu ihren Schnittpunkten mit den Tangenten. a) Man drücke alle Strecken der Figur in Funktionen von α aus. b) Man leite die Zusammenhangs-Gleichungen der Funktionen von α aus dieser Figur ab.

13. In einem Kreis, dessen Radius 1 ist, möge der Winkel zweier gegengerichteten Radien MA und MC in drei beliebige Teile α, β, γ geteilt sein. Man ziehe die Tangente in A, verlängere die Schenkel von β bis zu dieser Tangente, errichte im Schnittpunkt des ersten dieser Schenkel die Normale zu diesem bis zum zweiten Schenkel und von hier die Normale zur Tangente. a) Man drücke alle Strecken dieser Figur in Funktionen der drei Winkel aus. b) Man zeige, dafs $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

14. Die Richtigkeit der folgenden identischen Gleichheiten ist zu erweisen:

a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$; b) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{1-2\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$;

c) $(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{cotg}^2\alpha+2)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1$;

d) $\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha$;

e) $2\cdot(\sin^6\beta+\cos^6\beta)-3\cdot(\sin^4\beta+\cos^4\beta)+1=0$.

f) $\sin\gamma\cdot(1+\operatorname{tg}\gamma)+\cos\gamma\cdot(1+\operatorname{cotg}\gamma)=\dfrac{1}{\sin\gamma}+\dfrac{1}{\cos\gamma}$.

15. Man soll folgende Bestimmungsgleichungen lösen:

a) $\operatorname{cotg}x=2\cdot\cos x$; b) $\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x=2$;

c) $\sin x+\cos x=1$; d) $2\cdot\sin^2x-3\cdot\cos x=0$;

e) $\sin^2x+\frac{1}{4}=2\cdot\cos x$; f) $\sin x=a\cdot\sin y$ und $\operatorname{tg}x=b\cdot\operatorname{tg}y$.

16. Man soll die drei anderen Funktionen des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ finden, wenn gegeben ist:

a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$; b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$; c) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2-\sqrt{3}$.

17. Durch den gegebenen Wert $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$ soll man die vier Funktionen des $\sphericalangle\,\alpha$ ausdrücken. — Werden die Ausdrücke rational oder nicht?

18. Es ist zu beweisen, dafs:

a) $\left(\cos\frac{\alpha}{2} \pm \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 \pm \sin\alpha$. — Hieraus:

b) $2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}$;

$2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}$.

Zusatz. Berechne hiermit $\sin 15^0$ und $\cos 15^0$, sowie $\sin 9^0$ und $\cos 9^0$.

c) $(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)(\sin\alpha - 1 + \cos\alpha) = \sin 2\alpha$.

d) $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha) = \cos 2\alpha$;

e) $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2 \cdot \operatorname{cotg} 2\alpha$.

f) $\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$; g) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot \sin\alpha - \sin 2\alpha}{2 \cdot \sin\alpha + \sin 2\alpha}$;

h) $\frac{2 \cdot \operatorname{cotg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}\alpha)$.

---

19. Der Radius eines Kreises sei $= 10$; wie grofs ist a) s_6? b) s_4? c) s_3? d) s_{10}? e) s_5? §. 30.

20. Die Seite eines eingeschriebenen regelmäfsigen Vieleckes sei $= 8$; wie grofs ist der Radius des betreffenden Kreises, wenn jene Seite angehört einem a) Sechseck? b) Viereck? c) Dreieck? d) Zehneck? e) Fünfeck? f) Achteck?

21. Der Umfang eines eingeschriebenen Quadrates sei $= 40$; wie grofs ist der des zugehörigen Achtecks?

22. Der Umfang eines regelmäfsigen Secksecks sei $= 48$; wie grofs ist der zugehörige grofse und kleine Radius? Und wie grofs sind die Radien für ein Zwölfeck von gleichem Umfang?

23. a) Wie grofs ist jede Diagonale eines regelmäfsigen Fünfecks, im Radius r des Umkreises ausgedrückt?

b) Beweise, dafs je zwei nicht vom selben Eck ausgehende Diagonalen einander in stetiger Proportion so schneiden, dafs der gröfsere Abschnitt gleich der Fünfeckseite ist.

c) Beweise wie in §. 1, 5, dafs Seite und Diagonale eines regelmäfsigen Fünfecks inkommensurabel sind.

Andeutung: Nach b erhält man eine unbeschränkte Anzahl einander ähnlicher gleichschenkeliger Dreiecke, indem man vom Schnitt beider Diagonalen eine Parallele zu einer Seite bis zur andern Seite zieht, von da eine Parallele zur Diagonale bis zur andern Diagonale u. s. w.

24. Wie grofs ist, im Radius r des Umkreises ausgedrückt, die Seite des regelmäfsigen Sternfünfeckes?

25. Welchen Wert hat die Summe der Quadrate der drei von einem Eck ausgehenden Diagonalen eines regelmäſsigen Sechsecks?

26. Löse die Aufgaben 19 und 20 auch für umgeschriebene Vielecke.

27. Welches Verhältnis haben die drei Diagonalen eines regelmäſsigen Achteckes?

28. a) Wird in Figur 141 (S. 112) von C aus mit CA der Kreis beschrieben und AF bis zum Kreise verlängert, bis D, so ist BD die regelmäſsige Fünfecksseite und DF ist gleich dem Radius.

b) Aus a) folgere den Beweis des Satzes: Wird in einen Kreis ein Trapez gezeichnet, dessen Parallelseiten der Durchmesser und s_{10} sind, so sind die nicht parallelen Seiten $= s_6$ und die Diagonale ist $= s_{10} + r$.

c) Wende auf das Trapez in b) den ptolemäischen Satz an; zu welcher Folgerung führt derselbe?

d) Beweise das Ergebnis von §. 30, 1 Zus. a durch Anwendung von Aufg. §. 14 Nr. 16 auf das $\triangle ABD$ in a).

29. Welche Beziehung findet statt zwischen den Flächen eines regelmäſsigen a) ein- und umgeschriebenen Vierecks? b) Dreiecks? c) eingeschriebenen Drei- und Sechsecks? d) eingeschriebenen Sechs- und umgeschriebenen Dreiecks? [Folgerung aus c) und d)?]

---

§. 31. **30.** a) Welche Fläche hat ein regelmäſsiges Fünfeck, welches einem Kreise vom Radius 8 eingeschrieben ist? — b) In welche Teile teilt eine Diagonale das Fünfeck?

31. a) Wie groſs ist der Erdradius, wenn der Umfang zu 40 000 Kilometern angenommen wird? b) Wenn man wie üblich den Radius des Erdäquators zu 860 und seinen Umfang zu 5400 geogr. Meilen annimmt, stimmen diese Zahlen zusammen?

§. 32. **32.** Welche Aufgaben lassen sich mittels der Hauptformeln in §. 32, 1 lösen? — Beispiel: $r = 4{,}2$; $u = 26{,}3894$; $i = 55{,}4177$ (bzw. 40,5; 254,469).

33. Von einem Kreise sei der Radius $= r$ (oder Umfang $= u$) gegeben; wie groſs ist die Seite a) eines Quadrates, b) eines regelmäſsigen Dreiecks, welches mit dem Kreise gleichen Inhalt hat? — Beispiel: $r = 7$ (oder $u = 100$).

34. a) Der Durchmesser eines Halbkreises sei in zwei beliebige Teile geteilt und über diesen als Durchmessern seien wieder Halbkreise beschrieben. Wie groſs ist deren gesamte Bogenlänge?

b) Wenn aber der Durchmesser in beliebig viele gleiche Teile geteilt und wie in a) verfahren wird, wie groſs ist die Summe der Halbkreislängen?

35. a) Es werde auf dem Durchmesser eines Kreises ein Punkt

P so gewählt, dafs der eine Teil $= \frac{r}{5}$ $\left(\text{oder } = r \text{ oder } = \frac{r}{13}\right)$ sei und in P werde die normale Sehne gezogen. Wenn nun um jeden der entstehenden vier Sehnenabschnitte als Durchmesser ein Kreis beschrieben wird, welche Summe geben deren Umfänge?

b) Welche Summe geben die Inhalte der in a) entstandenen vier Kreise? Auch für den Fall zu lösen, dafs der Teilpunkt P den Durchmesser im Verhältnis $q:s$ teilt.

36. Eine Kreisfläche soll durch eine konzentrische Kreislinie a) halbiert, b) in stetiger Proportion so geteilt werden, dafs der Kreisring (oder der innere Kreis) die mittlere Proportionale wird. Man soll den Radius des teilenden Kreises berechnen und konstruieren.

37. Wie konstruiert man einen Kreis, dessen a) Umfang, b) Inhalt gleich der Summe (Differenz) zweier anderen Kreise ist?

38. Die annähernde Rektifikation einer Kreislinie läfst sich so durchführen, dafs man den Durchmesser AB in fünf gleiche Teile teilt, als Verlängerung in B einen solchen Teil anfügt $= BC$, dann auf der von A ausgehenden Tangente drei solche Teile abträgt $= AD$; dann hat das Dreieck ACD nahezu gleiche Länge wie die Kreislinie. — Ist diese Annäherung genauer als die von Kochansky (§. 32, 2)?

39. a) Um ein Quadrat in einen inhaltsgleichen Kreis zu verwandeln, trugen indische Mathematiker vom Mittelpunkt des Quadrats die halbe Diagonale auf die Parallele zur Seite auf, teilten den Uberschufs der halben Diagonale über die halbe Seite in drei gleiche Teile und beschrieben vom Mittelpunkt den Kreis durch den nächsten Teilpunkt. Welchen Wert hätte hiernach π?

b) Albrecht Dürer (1525) sagt, diese Aufgabe a) sei annähernd dadurch zu lösen, dafs man die Diagonale in zehn gleiche Teile zerlege und 8 als Durchmesser nehme. Es ist nachzuweisen, dafs diese Konstruktion auf den Wert $\pi = 3\frac{1}{8}$ führt (der bei Vitruvius vorkommt).

40. Nicolaus von Cusa (1464) löst die Aufgabe, zu einem Kreis ein gleichseitiges Dreieck von gleichem Umfang zu konstruieren, indem er ein Quadrat in den Kreis beschreibt, um die Summe des Radius und der Quadratseite als Durchmesser einen Kreis und in diesen das gleichseitige Dreieck zeichnet. Welchen Wert würde π hiernach haben?

---

§. 33.

41. Welche Geschwindigkeit hat, d. h. welchen Weg durchläuft in einer Sekunde (Sternzeit) ein Punkt des Erdäquators? (vgl. Nr. 31).

42. Welche Zeit vergeht, bis das Ende eines Minutenzeigers einen Weg beschreibt, der gleich seiner Länge ist?

43. Eine Bahnrichtung bilde mit einer anderen einen Winkel

von 45^0 und beide sollen durch einen Kreisbogen von 865 m Radius in einander übergeführt werden. Wie lang wird der Bogen?

44. Welche Aufgaben lassen sich mit der Formel in §. 33, 1b lösen, wenn man je eine der vorkommenden Gröfsen als unbekannt, alle übrigen als bekannt ansieht? — Bilde entsprechende Aufgaben aus den folgenden zusammengehörigen Werten von r, $\sphericalangle \beta$, b, nämlich: 6; $29^0 22'$; 3,18 oder 150, $25^0 12' 37''$; 66.

45. Welchen Inhalt hat ein Kreissegment, dessen Berührungswinkel 36^0 (45^0, 60^0) und dessen Sehne s ist?

46. a) Es soll der Inhalt des im I. Teil, Aufgabe, §. 11, Nr. 124 beschriebenen Ovals bestimmt werden für den Fall, dafs das Dreieck gleichseitig, der grofse Radius R, der kleine r ist.

b) Durch die Ecke eines aus zwei Quadraten zusammengesetzten Rechtecks, dessen Seiten a und $2a$ sind, werden Kreisbögen gezeichnet, sodafs ein Oval entsteht. Die Mittelpunkte der Bögen liegen in den Mitten der längeren Seiten und in den Mittelpunkten der Quadrate. Es soll der Flächeninhalt des Ovals berechnet werden.

47. Drei gleiche Kreise berühren einander paarweise. Wie grofs ist die zwischen den Kreisen liegende Fläche?

48. Wie grofs ist der Centriwinkel desjenigen Sektors, a) dessen Umfang gleich der Kreislänge ist? b) dessen Inhalt gleich dem Quadrate des Radius ist?

49. Drei Kreise schneiden einander so, dafs jeder durch die Mitte der beiden anderen geht. Wie grofs sind die einzelnen hierbei entstehenden Flächenteile?

50. Wenn in der Formel §. 33, 2a je zwei Gröfsen gegeben sind, wie wird die dritte berechnet?

51. Wie grofs ist die Summe der Kreisabschnitte, welche entstehen, wenn man um das Dreieck, dessen Seiten 13, 14, 15 sind, einen Kreis beschreibt?

52. Eine Kreisfläche soll durch konzentrische Kreise a) in n gleiche Teile geteilt, b) in n solche Teile geteilt werden, dafs dieselben, von innen aus gerechnet, das Verhältnis $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ zu eineinander haben.

53. Wenn man bei einem eingeschriebenen regelmäfsigen a) Dreieck, b) Viereck, c) Sechseck je über einer Seite als Durchmesser nach aufsen einen Halbkreis beschreibt, wie grofs ist die entstehende mondförmige Figur?

54. a) Durch die Grenzpunkte einer Strecke seien zwei Kreisbögen mit den Radien r und r_1 auf einerlei Seite der Geraden beschrieben; die zu der Sehne gehörigen Centriwinkel seien α und α_1. Welche Fläche hat das entstandene Möndchen?

b) Man weise nach, dafs diese Fläche gleich der des Vierecks der vier Radien nach den Grenzpunkten der Sehne ist, wenn

$$r_1^2 : r^2 = \alpha : \alpha_1.$$

c) Man berechne diese Fläche für den Fall, dafs dieses Verhältnis $= 1 : 2$ und aufserdem r_1 gegeben ist.

55. Berechne die Fläche (Arbelos = Schusterkneif), welche in Nr. 34 zwischen den Halbkreisen liegt. — Wann ist im Falle zweier eingezeichneten Halbkreise die Arbelosfläche ein Maximum?

56. Auf einer Strecke $AD = s$ liege eine Strecke $BC = t$. Beschreibe über AB und AC Halbkreise nach der einen, über BD und CD Halbkreise nach der anderen Seite. Wie grofs ist die Fläche der entstehenden Figur (Pelekoid = beilförmige Fläche)? — Ist die Fläche abhängig von der Lage von t? von der Gröfse von t? — Wie verhält sich die Pelekoidfläche zur Fläche des Kreises über AD als Durchmesser? — Wie läfst sich hiernach die Fläche durch entsprechend liegende Halbkreise in 2, 3, n Teile zerlegen?

Aufgaben zum zehnten Kapitel.

§. 17.

1. a) Konstruiere Punkte, deren Koordinaten in mm gegeben sind, nämlich: §. 34.

Punkt	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Abscisse	+ 9	— . 9	— 9	+ 9	— 12	— 6	— 15
Ordinate	+ 15	+ 15	— 15	— 15	+ 6	+ 18	— 12

2. Man bestimme mittels des Winkelmessers die Winkel, welche die nach den vorstehend bestimmten Punkten gehenden Strahlen mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bilden.

3. In welchem Quadranten sind die Abscissen und Ordinaten bezw. a) positiv und negativ? b) negativ und positiv? c) negativ und negativ?

4. Welche Gröfse haben die Funktionen derjenigen Winkel, welche die nach den Punkten in Nr. 1 gehenden Fahrstrahlen mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bilden?

5. Welches Vorzeichen hat jede der folgenden Funktionen: §. 35.

a) $\sin 150^0$ b) $\cos 105^0$ c) $\sin 252^0$ d) $\operatorname{tg} 120^0$

$\cos 240^0$ $\cos 300^0$ $\cos 144^0$ $\operatorname{cotg} 252^0$

$\sin 198^0$ $\sin 337\frac{1}{2}^0$ $\cos 352^0$ $\operatorname{tg} 330^0$

e) cotg 205^0	f) tg 315^0	g) cos $199^0 24'$
cotg 165^0	cotg $157\frac{1}{2}^0$	tg $333^0 19'$
tg 234^0	tg 135^0	sin $283^0 50''$.

6. Es ist z. B. $\sin 250^0 = -\sin 70^0 = -\cos 20^0$.

Drücke ebenso in zweifacher Weise die folgenden Funktionen durch solche von Winkeln des ersten Quadranten aus:

a) $\sin 138^0$; b) $\cos 257^0$; c) $\operatorname{tg} 301^0$; d) $\operatorname{cotg} 146^0$;
e) $\sin 256^0 28'$; f) $\cos 277^0 42'$; g) $\operatorname{tg} 123^0 45'$; h) $\operatorname{cotg} 341^0 58'$.

7. Es ist auch z. B.

$$\sin 250^0 = -\sin 70^0 = -\sin 110^0 = +\sin 290^0 =$$
$$= -\cos 20^0 = +\cos 160^0 = +\cos 200^0 = -\cos 340^0.$$

Drücke ebenso in achtfacher Weise die in Nr. 6 gegebenen Funktionen aus.

8. a) In welchen Quadranten ist $\sin \alpha$ positiv? Ebenso $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$?

b) In wie vielen Quadranten hat also eine Funktion übereinstimmende Vorzeichen?

9. Für welchen Winkel eines anderen Quadranten hat jede der folgenden Funktionen denselben Wert:

a) $\sin 28^0$; b) $\cos 76^0$; c) $\operatorname{tg} 82^0$; d) $\operatorname{cotg} 12^0$; e) $\sin 238^0$;
f) $\operatorname{cotg} 170^0$; g) $\sin \alpha$.

10. Welchem Quadranten gehört ein Winkel an, dessen a) sin und cos negativ? b) cotg und sin negativ? c) cos und tg negativ? d) sin positiv und tg negativ?

11. Wie lassen sich die Funktionen der folgenden Winkel als Funktionen kleinerer Winkel ausdrücken?

a) 395^0; b) 449^0; c) 487^0; d) $567^0 18'$; e) 700^0; f) $618^0 23' 57''$; g) 1000^0.

12. Bestimme mit Hilfe der in §. 29 und 30 gegebenen Werte die Funktionen von

a) $120^0, 210^0, 300^0$; b) $150^0, 240^0, 330^0$; c) $135^0, 225^0, 315^0$;
d) $108^0, 198^0, 288^0$; e) $165^0, 255^0, 345^0$; f) $126^0, 216^0, 306^0$;
g) $144^0, 234^0, 324^0$; h) $112\frac{1}{2}^0, 202\frac{1}{2}^0, 292\frac{1}{2}^0$; i) $157\frac{1}{2}^0, 247\frac{1}{2}^0, 337\frac{1}{2}^0$;
k) $105^0, 195^0, 285^0$; l) $165^0, 255^0, 345^0$.

---

§. 38. **13.** Zeichne den Kreis über dem Durchmesser $AB = 1$ und trage zwei Winkel α und β ($\alpha > \beta$) an, so dafs a) beide in A beiderseits von AB, b) beide in A einerseits von AB, c) $\sphericalangle \alpha$ in A und $\sphericalangle \beta$

in B, beide einerseits AB, d) $\sphericalangle\, \alpha$ in A und $\sphericalangle\, \beta$ in B, auf verschiedenen Seiten von AB liegen. Vervollständige je das entstehende Viereck und leite mittels des ptolemäischen Satzes die Formeln IV und V ab. (Vgl. §. 29, 7, Anm.)

14. Berechne $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ für a) $\sphericalangle\, \alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$; b) $\alpha = 45^0$, $\beta = 30^0$. — c) Entsprechend berechne die Funktionen von 105^0, 120^0, 150^0.

15. Es soll die Formel für $\cos(\alpha + \beta)$ aus dem Werte von $\sin(\alpha + \beta)$ allein durch Rechnung gefunden werden.

16. Mittels der Formeln IV und V (S. 141)soll man die Ergebnisse in §. 36, 1 erproben.

17. Man soll die folgenden Werte durch Funktionen der einfachen Winkel ausdrücken:

a) $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$; b) $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$; c) $\dfrac{\cos(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$; d) $\dfrac{\cos(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$;

e) $\dfrac{\sin(a+b) \pm \cos(a-b)}{\sin(a-b) \pm \cos(a+b)}$; f) $\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$;

g) $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$;

h) Dividiere noch die Werte von f) und g) durch $\cos^2 a \cdot \cos^2 b$ und vereinfache sie möglichst;

i) $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)}$; k) $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)}$; l) $\sin^2(a+b) \pm \cos^2(a-b)$.

18. Zu welchem Ergebnis führt die Formel für $\cos(\alpha - \beta)$, wenn

a) $\sin\alpha = \sin\beta$ und $\cos\alpha = \cos\beta$ ist?

Zu welchem Ergebnis führt die Formel für $\cos(\alpha - \beta)$, wenn

b) $\sin\alpha = -\sin\beta$ und $\cos\alpha = \cos\beta$ ist?

19. Beweise die Richtigkeit der folgenden Formeln:

a) $\sin(\varkappa - \lambda) \cdot \cos\lambda + \cos(\varkappa - \lambda) \cdot \sin\lambda = \sin\varkappa$;

b) $\cos(\varkappa - \lambda) \cdot \cos\lambda - \sin(\varkappa - \lambda) \cdot \sin\lambda = \cos\varkappa$;

c) $\sin(\varkappa + \lambda) \cdot \cos\varkappa - \cos(\varkappa + \lambda) \cdot \sin\varkappa = \sin\lambda$;

d) $\cos(\varkappa + \lambda) \cdot \cos\varkappa + \sin(\varkappa + \lambda) \cdot \sin\varkappa = \cos\lambda$;

e) $\cos(\varkappa + \lambda) \cdot \sin\lambda - \cos(\varkappa + \mu) \cdot \sin\mu = \sin(\varkappa + \lambda) \cdot \cos\lambda$
$\qquad - \sin(\varkappa + \mu) \cdot \cos\mu$.

20. Berechne die Sinus- und Cosinuswerte der Winkel

$$(\varkappa + \lambda + \mu), \quad (\varkappa + \lambda - \mu), \quad (\varkappa - \lambda - \mu)$$

in Funktionen der Winkel $\varkappa$, λ, μ.

21. Berechne $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ und $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$ für a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{7}$; b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$, $\operatorname{tg}\beta = 10$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$.

22. Aus den Formeln in §. 38, 4 sollen die in §. 38, 2 abgeleitet werden.

23. Für den Fall, dafs $\sphericalangle(\alpha + \beta + \gamma) = 2R$, gelten die folgenden Gleichheiten:

a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$.

b) $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$.

c) $1 - 2 \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

d) $\operatorname{cotg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} = \operatorname{cotg}\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma} = \operatorname{cotg}\gamma + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\alpha}$.

24. Man soll die folgenden Funktionen durch Funktionen der einfachen Winkel ausdrücken:

a) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$; b) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; c) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$; d) $\frac{\sin 2\alpha}{1 \pm \cos 2\alpha}$;

e) $\frac{\cos 2\alpha}{1 \pm \sin 2\alpha}$; f) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$; g) $2\operatorname{cotg} 2\alpha$; h) $\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha}$;

i) $\frac{4 \cdot \operatorname{cotg} 2\alpha}{\sin 2\alpha}$; k) $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin\alpha} - 2 \cdot \cos(\alpha + \beta)$.

25. Beweise, dafs:

a) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)$;

26. Beweise die Richtigkeit der folgenden Gleichheiten:

a) $2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + 2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta = 1 + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta$.

b) $\operatorname{tg}(45^0 + \gamma) - \operatorname{tg}(45^0 - \gamma) = 2 \cdot \operatorname{tg} 2\gamma$.

c) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2(45^0 - \gamma)}{1 + \operatorname{tg}^2(45^0 + \gamma)} = \sin 2\gamma$.

27. Wie grofs ist: a) $\sin x$, wenn $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3} - 2$? b) $\cos 105^0$, wenn $\sin 210^0 = -\frac{1}{2}$? c) $\sin x$ und $\cos x$, wenn $\operatorname{tg} 2x = -\frac{24}{7}$?

28. Berechne die Funktionen von $3w$ und $4w$, ausgedrückt durch Funktionen des einfachen Winkels w.

29. Beweise, dafs:

a) $\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$; b) $\cos^3\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$.

30. Für $\sphericalangle w = 18^0$ ist $\sin 2w = \cos 3w$. Entwickle diese Gleichheit in Funktionen des einfachen Winkels w.

31. Verwandle in Produkte von Funktionen:

a) $\sin 90^0 + \sin 30^0$; b) $\sin 60^0 - \sin 30^0$; c) $\cos 75^0 + \cos 45^0$;
d) $\cos 42^0 - \cos 78^0$; e) $\sin 120^0 - \sin 60^0$; f) $\cos 105^0 - \cos 15^0$;
g) $\sin 135^0 + \sin 45^0$; h) $\cos 240^0 - \cos 120^0$. i) $\frac{\sin 46^0 + \sin 22^0}{\sin 14^0 - \sin 10^0}$;
k) $\frac{\sin 90^0 + \sin 34^0}{\cos 59^0 + \cos 3^0}$; l) $\frac{\sin 60^0 - \sin 40^0}{\cos 50^0 30' - \cos 10^0 30'}$.

32. Beweise, dafs für irgend zwei Winkel $(a + b)$ und $(a - b)$ der Quotient aus a) der Summe und der Differenz der Sinus, b) der Summe und der Differenz der Cosinus, c) der Summe der Sinus und der Summe der Cosinus, d) der Summe der Sinus und der Differenz der Cosinus jener Winkel bzw. den Wert: $\operatorname{tg} a : \operatorname{tg} b$, $\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} b$ hat. — Beweise ferner, dafs:

e) $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\sin b + \sin a}$; f) $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{\sin 2a - \sin 2b}$.

33. Für die Winkel α, β, γ eines Dreiecks ist (vgl. Nr. 23):

a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$;

b) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$.

Andeutung zu a). Wende auf $\sin 2\alpha + \sin 2\beta$ Formel VIII (S. 143) an und setze $\sin 2\gamma = -2 \cdot \sin \gamma \cdot \cos(\alpha + \beta)$.

Andeutung zu b). Wende auf $\cos \alpha + \cos \beta$ Formel VIII an und setze $\cos \gamma = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}$.

34. Die Formel: $2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ soll abgeleitet und benützt werden, wenn §. 39.

$$\cos 3^0 = 0{,}99863, \quad \sin 4^0 = 0{,}069756, \quad \sin 1^0 = 0{,}017452$$

gegeben, um von 4^0 an die sin der Winkel von 3^0 zu 3^0 zu berechnen.

35. Es seien $\cos 1^0 = 0{,}99985$, $\sin 30^0 = 0{,}5$, $\sin 29^0 = 0{,}48481$ gegeben; es sollen die sin von 28^0, 27^0, 26^0 der Reihe nach berechnet werden mittels der Formel: $2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$.

36. Es seien die sin und cos der Winkel bis 30^0 gegeben. Es sollen die Formeln:

$$\sin(30^0 + \alpha) = \cos \alpha - \sin(30^0 - \alpha),$$
$$\cos(30^0 + \alpha) = \cos(30^0 - \alpha) - \sin \alpha$$

abgeleitet und benützt werden, um sin und cos gröfserer Winkel zu berechnen.

---

§. 18. Übungen im Gebrauche der Tafeln.

I. Aufsuchen der Funktionen (und ihrer Logarithmen) zu gegebenen Winkeln.

a) Ohne Interpolation.

§. 39.

1. sin 30°

2. cos $63^\circ 40'$

3. tg $46^\circ 20'$

4. cotg $88^\circ 10'$

5. l sin $5^\circ 41' = 0{,}99\,577 - 2$

6. l tg $32^\circ 57' = 0{,}81\,169 - 1$

7. l cos $43^\circ 26' = 0{,}86\,104 - 1$

8. l cotg $30^\circ\ 4' = 0{,}23\,739$

9.* l cos $67^\circ 24' = 0{,}58\,467 - 1$

10. l tg $87^\circ 43' = 1{,}39\,932$

11. l sin $53^\circ 31' = 0{,}90\,527 - 1$

12. l cotg $0^\circ 3' = 3{,}05\,915.$

b) Mit Interpolation.

13. sin $21^\circ 43' = 0{,}37\,002$

14. tg $62^\circ 54' = 1{,}9542$

15. cos $74^\circ 7' = 0{,}27\,368$

16. cotg $43^\circ 52' = 1{,}0404$

17. l sin $28^\circ 11' 20'' = 0{,}67\,429 - 1$

18. l cos $26^\circ 52' 37'' = 0{,}95\,035 - 1$

19. l tg $44^\circ 17' 25'' = 0{,}98\,924 - 1$

20. l cotg $4^\circ\ 1' 45'' = 1{,}15\,219$

21. l tg $57^\circ 25' 32'' = 0{,}19\,457$

22. l cos $78^\circ 42' 34'' = 0{,}29\,178 - 1$

23. l cotg $45^\circ\ 0' 38'' = 0{,}99\,984 - 1$

24. l sin $87^\circ 59' 20'' = 0{,}99\,973 - 1.$

25. l sin $77^\circ 16' 43''$ **26.** l tg $2^\circ 38' 47''$ **27.** l cotg $4^\circ 5'\ 6''$

28. l cos $57^\circ 58' 20''$ **29.** l sin 100° **30.** l cos 139°

31. l tg $162^\circ 37'$ **32.** l cotg $93^\circ\ 8'$ **33.** l sin $157^\circ 9' 36''$,

34. l cos $101^\circ\ 2'\ 3''$.

II. Aufsuchen der Winkel zu gegebenen Funktionen (und deren Logarithmen).

a) Ohne Interpolation.

35. sin $x = 0{,}64\,279$ ($\sphericalangle\, x = 40^\circ$ oder 140°)

36. cos $x = 0{,}99\,324$ ($6^\circ 40'$ oder $353^\circ 20'$)

37. tg $x = 0{,}98\,270$ ($44^\circ 30'$ oder $224^\circ 30'$)

38. cotg $x = 8{,}7769$ ($6^\circ 30'$ oder $186^\circ 30'$)

39. sin $x = -0{,}19\,366$ ($\sphericalangle\, x = 191^\circ 10'$ oder $348^\circ 50'$)

40. tg $x = -0{,}78\,598$ ($\sphericalangle\, x = 141^\circ 50'$ oder $321^\circ 50'$)

41. cos $x = -0{,}97\,692$

42. cotg $x = -3{,}2041$

43. $\sin \quad y = \quad 0{,}72\,937$ 46. $\operatorname{tg} \quad y = -15{,}605$

44. $\operatorname{cotg} \quad y = \quad 0{,}17\,333$ 47. $\operatorname{cotg} y = - \quad 1{,}4019$

45. $\cos \quad y = -0{,}58\,307$ 48. $\sin \quad y = \quad 0{,}15\,069.$

49. $l \sin \quad x = 0{,}45\,674 - 1$ ($\sphericalangle\, x = 16^0 38'$ oder $163^0 22'$)

50. $l \cos \quad x = 0{,}74\,887 - 1$ ($\sphericalangle\, x = 55^0 53'$ oder $304^0 7'$)

51. $l \operatorname{cotg} x = 0{,}56\,492$ ($\sphericalangle\, x = 15^0 14'$ oder $= 195^0 14'$)

52. $l \operatorname{tg} \quad x = 1{,}53\,183$ ($\sphericalangle\, x = 88^0 19'$ oder $= 268^0 19'$)

b) Mit Interpolation.

53. $l \sin x = 0{,}22\,005 - 1$ ($\sphericalangle\, x = \quad 9^0 33' 14''$ oder?)

54. $l \operatorname{tg} \quad x = 0{,}29\,994$ ($\sphericalangle\, x = 63^0 22' 38''$ oder?)

55. $l \operatorname{cotg} x = 0{,}55\,401 - 1$ 56. $l \cos x = 0{,}83\,737 - 1.$

57. $\sin x = \frac{3}{5}$; 58. $\cos x = \frac{13}{85}$; 59. $\operatorname{cotg} x = -\frac{24}{143}$; 60. $\operatorname{tg} x = \frac{724}{189}$.

III. Bestimmung von Winkeln aus Gleichungen.

§. 40.

61. $\sin \alpha \cdot \sin 72^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5}.$ 62. $\sin 54^0 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4}.$

63. $\cos 54^0 \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4}\sqrt{5}.$ 64. $\operatorname{tg} 18^0 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}.$

65. $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 60^0 = 2.$ 66. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 60^0 = 2.$

67. $\sin 18^0 + \sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$ 68. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = 4.$

69. $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} 54^0.$ 70. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha.$

71. $2 \sin \alpha = \sqrt{6\,(1 + \cos \alpha)}.$ 72. $\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 1 + \cos \alpha.$

73. $\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 1 + \cos \alpha.$

74. Bestimme in den Aufgaben §. 16, 15 (S. 210) auch die Winkel höherer Quadranten, welche den Gleichungen genügen.

75. $\sin (x + y) - \cos x \cdot \sin y = \cos y.$

76. $\sin (x + y) + \cos (x - y) = \cos (x + y).$

77. $\sin x \cdot \sin (y - x) = a.$ 78. $\sin (x - y) = \cos (x + y) = \frac{1}{2}.$

79. $\operatorname{tg} (x + y) = p,$ $\operatorname{tg} (x - y) = q.$ 80. $\sin 2x = 2 \sin x.$

81. $\sin 2x = 2 \cos x.$ 82. $a \operatorname{cotg} 2x = b\,(1 + \operatorname{tg} x),$ ($a = b$ oder $a = \sqrt{3} - 1,\ b = 1$). 83. $a\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x) = b\,\frac{1 + \sin 2x}{\sin 2x}$ ($a = b$).

84. Man soll die Teile eines Winkels w bestimmen, wenn a) ihre Sinus, b) ihre Cosinus, c) ihre Tangenten ein gegebenes Verhältnis haben.

85. $\sin x + 10\sqrt{3} \cos x = 5{,}5\sqrt{3}.$

86. $12{,}54 \sin \alpha - 1{,}32\sqrt{3} \cos \alpha = 4{,}29.$

87. $135 \sin \alpha + 125 \cos \alpha = 7{,}07\,105.$

88. $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

89. $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

90. $\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$

Aufgaben zum elften Kapitel.

§. 19. Das rechtwinkelige Dreieck.

§. 41. **1.** a) Wenn von den Stücken a, b, c, α, β eines rechtwinkeligen Dreiecks irgend zwei gegeben sind, welche und wie viele Einzelaufgaben kann es hiernach geben?

b) Welche dieser Aufgaben ist unbestimmt? Auf wie viele verschiedene Aufgaben lassen sich die übrigen zurückführen?

2. In der folgenden Tabelle sind je drei zusammengehörige Stücke eines rechtwinkeligen Dreiecks angegeben. Wähle beliebige zwei aus und berechne das dritte ohne Benützung von Logarithmen*).

Nr.	a	b	c	α	β
1.	5		10	30°	60°
2.	44		55	53°10′	36°50′
3.		2,4	8	62°30′	17°30′
4.		81,7	95	30°40′	59°20′
5.		36	40	25°50′	64°10′
6.		8,37	31	74°20′	15°40′
7.	116		145	53°10′	36°50′
8.	70,2		135	31°20′	58°40′
9.	1	5		11°20′	78°40′
10.	37	18,5		63°30′	26°30′
11.	235	94		68°10′	21°50′
12.	23,4	210,6		6°20′	83°40′
13.	45	5		83°40′	6°20′
14.	15	3,6		76°30′	13°30′
15.	136	85		58°	32°
16.	36,8	46		38°40′	51°20′

3. Wähle aus der folgenden Zusammenstellung pythagoreischer Dreiecke je zwei das Dreieck bestimmende Stücke aus, be-

---

*) Die Werte der Winkelfunktionen sind dabei, auf zwei Stellen nach dem Komma genau, aus der Tafel der Funktionen selbst zu entnehmen.

rechne die fehlenden und vergleiche die gefundenen Werte mit den in der Tafel enthaltenen.

Nr.	a	b	c	α	β	J
1.	3	4	5	36° 52′ 11″	53° 7′ 49″	6
2.	12	5	13	67 22 50	22 37 10	30
3.	7	24	25	16 15 37	73 44 23	84
4.	12	35	37	18 55 29	71 4 31	210
5.	140	51	149	69 59 —	20 1 —	3570
6.	115	252	277	24 31 47	65 28 13	14490
7.	325	228	397	54 56 53	35 3 7	37050

4. Wie grofs ist die Hypotenuse, wenn die Halbierende des einen Winkels von 50° gleich 12 ist?

5. Eine $2^1/_2$ km lange Strafse führt in gleicher Steigung auf einen 100 m hohen Hügel; welche Gröfse hat ihr (Erhebungs- oder) Höhenwinkel?

6. Wie viel Prozent Steigung hat ein Weg, welcher unter einem Steigungswinkel von 4°30′ angelegt ist?

7. Wenn die Katheten $a = 16$ und $b = 63$ sind, wie grofs sind a) die Halbierenden ihrer Gegenwinkel? b) die Teile von α, welche die Ecktransversale nach der Mitte von a bildet?

8. Wie hoch ist ein auf einer Ebene stehender Turm, wenn er in einer Entfernung von 215 m unter einem Winkel = 12°23′ erscheint? (Von der Höhe des Beobachters ist abzusehen!)

9. Ein Ort habe a^0 geographische Breite. Wie grofs ist a) der Radius seines Parallelkreises? b) ein Längengrad desselben? — Beispiel: Berlin $a = 52°30'16''$.

10. Wie vielmal so grofs als die Bäume sind „der Bäume gigantische Schatten“, wenn die Sonne noch 4° hoch steht?

11. Der Gipfel des Pik von Teneriffa erscheint am Horizont, wenn man sich $24\frac{4}{9}$ km entfernt und 10 m über der Meeresfläche befindet. Welches ist die ungefähre Höhe des Berges? (Umfang der Erde = 40000 km.) — Andeutung: Berechne nicht cos des ganzen, sondern sin des halben ∢.

12. Auf einem Abhang konstanter Neigung steht ein Beobachter in A, weiter unten ein hoher Gegenstand BC, dessen Spitze C die horizontale Sehlinie AL überragt. Wenn nun $\sphericalangle CAL = \gamma$ und $\sphericalangle LAB = \beta$, sowie $AB = l$ gemessen ist, wie hoch ist BC? — Beispiele: $\sphericalangle \gamma = 11°$, $\sphericalangle \beta = 26°$, $l = 41$ m.

13. Die Spitze des Strafsburger Münsterturmes erscheint in einer horizontalen Entfernung von a Metern unter einem gewissen Er-

hebungswinkel, und dieser verdoppelt (verdreifacht) sich, wenn man um b Meter näher herankommt. Wie grofs ist der Winkel? und wie hoch der Turm? $a = 1$ km; $b = 510{,}23$ m (bzw. 684,96 m).

14. Man soll von einem rechtwinkeligen Dreieck die fehlenden Stücke berechnen, wenn von demselben bekannt ist, dafs:

a) $a + b = 79$, $\sphericalangle\, \alpha = 14^0 15'$;
b) $a - b = 1$, $\sphericalangle\, \alpha = 46^0 23' 50''$;
c) $c - a = 7$, $\sphericalangle\, \alpha = 8^0\, 0' 36''$;
d) $a + b + c = 132$, $\sphericalangle\, \alpha = 79^0 36' 40''$;
e) $h_c = 8$, $\sphericalangle\, \alpha = 19^0 52'$;
f) $a : b = b : c$; (es sind nur die Winkel zu berechnen.)
g) $\varrho = 2$, $\sphericalangle\, \alpha = 63^0 7' 8''$;
h) $\varrho = 15$, $a + b + c = 176$.

15. Man soll beweisen, dafs in jedem rechtwinkeligen Dreieck die folgenden Gleichheiten gelten:

a) $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b + c}{a}$;

b) $a \cdot \cos \alpha = b \cdot \cos \beta = c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$;

c) $(b + c) \cdot \cos \alpha + (c + a) \cdot \cos \beta = a + b + c$;

d) $a - b = (c - b) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - (c - a) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$;

e) $2 \cdot c \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} = c + a$; f) $2 \cdot c \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} = c - a$;

g) $1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{2c}{a + b + c}$; h) $2 \cdot \operatorname{cotg} \beta : \sin 2\alpha = c^2 : b^2$;

i) $a + b = c\sqrt{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$; k) $a - b = c\sqrt{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

16. Sind a, b, c und a_1, b_1, c_1 die Seiten zweier pythagoreischen Dreiecke, so erhält man ein neues aus $(ab_1 + ba_1)$, $(bb_1 - aa_1)$, cc_1, in welchem ein Winkel gleich der Summe der betreffenden Winkel in jenen Dreiecken ist (Vieta). Dies ist zu beweisen. — Es ergeben sich ferner solche Dreiecke aus dem ersteren mit dem verdoppelten Winkel aus den Seiten $2ab$, $(b^2 - a^2)$, c^2, mit dem dreifachen Winkel $(3ab^2 - a^3)$, $(3a^2b - b^3)$, c^3, dem vierfachen Winkel $(4ab^3 - 4a^3b)$, $(b^4 - 6a^2b^2 + a^4)$, c^4 u. s. w.

§. 20. Das gleichschenkelige Dreieck und regelmäfsige Vieleck.

1. Es möge a den Schenkel, b die Grundseite und α den Basiswinkel bedeuten. Man soll nun aus der folgenden Tabelle zusammen-

gehöriger Werte einzelne Aufgaben bilden und zwar je nachdem a) a und b, b) a und β, c) b und α, d) b und h, e) a und h, f) h und β gegeben sind.

Nr.	a	b	α	β	h	J
1.	14,3	11	67°22′49″	45°14′22″	13,2	72,6
2.	53	56	58° 6 33	63 46 54	45	1260
3.	1,7	1,6	61 55 40	56 8 40	1,5	1,2
4.	1,13	0,3	82 22 19	15 15 22	1,12	0,168
5.	96,5	168	29 29 18	121° 1 24	47,5	3990
6.	233	210	63 12 55	53 34 10	208	21 840
7.	425	832	11 49 —	156 22 —	87	36 192

2. Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks sei in drei gleiche Teile geteilt; in welchem Verhältnis stehen die Abschnitte der Grundseite?

3. a) Eine Strecke erscheint, von einem Punkte ihrer Mittelnormalen aus betrachtet, unter einem Sehwinkel α, von einem um a näheren Punkte unter dem Sehwinkel β. Wie lang ist die Strecke? — Beispiel: $a = 17{,}3$; $\sphericalangle \alpha = 13^0$; $\sphericalangle \beta = 27^0 35'$.

b) Auf eine Strecke $= 2a$ sei in ihrer Mitte und in einem Grenzpunkte je die Normalstrecke $= b$ errichtet und von den Endpunkten der letzteren aus werde $2a$ betrachtet. In welcher Beziehung stehen die Gesichtswinkel zu einander, unter welchen die Strecke erscheint?

4. Wie weit mufs man den 2 cm breiten Finger vom Auge entfernt halten, um damit den Vollmond zu bedecken, der eine scheinbare Breite von 31′7″ hat?

5. An einen Kreis vom Radius r gehen zwei Tangenten $= t$, welche einen Tangentenwinkel $= \tau$ bilden; der zugehörige Centriwinkel sei γ, sein Bogen $= b$, die Berührungssehne $= s$. Welche dieser Stücke müssen bekannt sein, damit man die übrigen zu berechnen vermag? — Man löse solche Aufgaben für die folgende Gruppe zusammengehöriger Werte: $r = 20$, $t = 2{,}237$; $\tau = 82^0 35' 50''$, $\gamma = 97^0 24' 10''$, $b = 34$, $s = 2{,}982$.

6. Eine Sehne und die mit ihr parallele Tangente, welche durch die Schenkel des zugehörigen Centriwinkels begrenzt wird, verhalten sich wie 3 : 5. Wie grofs ist der Centriwinkel?

7. Der Umfang eines regelmäfsigen a) Fünfecks, b) Neunecks, c) Fünfzehnecks betrage u ($= 100$); wie grofs sind die Diagonalen des bezüglichen Vielecks?

8. Albrecht Dürer giebt an, die Seite des einem Kreis ein-

geschriebenen Siebenecks sei annähernd gleich der halben Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Dreiecks. Wie weit ist dies genau?

9. Der Umfang eines Kreises sei u (= 60); wie groſs ist der Umfang des demselben umgeschriebenen regelmäſsigen Hundertseits?

10. Wie groſs ist der Inhalt eines regelmäſsigen Fünfecks, wenn dessen Diagonale = 6,8 ist?

11. Welchen Inhalt hat ein Kreissegment, wenn dessen Bogen = 7 und Höhe = 2 ist?

12. Eine Kreissehne von der Länge $2s$ teile den dazu normalen Durchmesser im Verhältnisse von $p:q$. Wenn nun jeder Grenzpunkt des Durchmessers mit den Grenzpunkten der Sehne verbunden wird, welche Winkel bilden die beiden Geradenpaare? und in welchem Verhältnis wird die Kreisfläche geteilt, wenn $2s = 16$ und $p:q = 3:5$ ist?

13. Wenn ein Kreissektor durch seine Sehne halbiert wird, welche Gleichung bestimmt den Centriwinkel?

14. Beweise für das gleichschenkelige Dreieck die folgenden Gleichheiten (vgl. Aufg. §. 19, Nr. 15):

$$\text{a)}\quad a + b - b\cos\alpha - a\,.\cos\beta - 2a\,.\cos\alpha = 0;$$

$$\text{b)}\quad (2a - b)\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = b\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 2\varrho.$$

15. Wenn in einem Dreieck $\cos\beta = \frac{\sin\alpha}{2\cdot\sin\gamma}$, so ist dasselbe gleichschenkelig. — Andeutung: Benütze den Nebenwinkel von α.

16. Wenn in einem Dreieck $a\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha + b\,.\,\mathrm{tg}\,\beta = (a+b)\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}$, so ist $\sphericalangle\,\alpha = \beta$.

§. 21. Übungen über die Hauptsätze des schiefwinkeligen Dreiecks.

§. 42. **1.** Beweise den Sinussatz mit Benützung des Satzes in §. 17, 3a.

2. Wenn die Winkel eines Dreiecks a) 45°, 60°, 75°, b) 15°, 45°, 120°, c) 30°, 60°, 90° messen, welches Verhältnis haben diese Winkel? und die bezüglichen Gegenseiten? (Probweise Messung.)

3. Wenn sich die Winkel eines Dreiecks verhalten wie a) 1:2:3, b) 2:3:4, c) 4:5:6, welche Gröſse haben die Winkel? und wie verhalten sich die Seiten?

4. Wenn die Seiten eines Dreiecks das Verhältnis a) 2:3:4, b) 4:5:6, c) 3:4:6, d) 4:9:12 besitzen, wie groſs sind dessen Winkel? Wie groſs aber, wenn das Seitenverhältnis e) 1:2:3 angenommen würde?

5. Welchen Wert liefert der Cosinussatz für c^2, wenn a) $\gamma = \frac{2}{3}R$, b) $\sphericalangle\,\gamma = \frac{4}{3}R$, c) $a = c$ ist? (Vgl. Aufgaben §. 14, Nr. 15.)

6. Was gilt für den Winkel, wenn der Cosinussatz für $\cos\alpha$ einen negativen Wert liefert? (z. B. für $a = 9$, $b = 5$, $c = 6$).

7. Der Sinussatz erscheint in drei Formen. Wie läſst sich, wenn zwei derselben angenommen werden, die dritte aus ihnen allein durch Rechnung ableiten? — Ebenso für den Projektions- und für den Tangenssatz.

8. a) Wie läſst sich unter Annahme des Sinussatzes und des Satzes von der Winkelsumme $= 2R$ der Projektions- und der Cosinussatz allein durch Rechnung ableiten?

Ebenso sollen je die beiden anderen Sätze b) aus dem Projektionssatz, c) aus dem Cosinussatze abgeleitet werden.

Andeutung zu a): $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$ entwickle und dividiere die Gleichung durch $\sin\alpha$.

Zu b): Berechne aus zwei Formeln dieselbe Seite und setze die Werte gleich; — ferner multipliziere die Werte für a, b, c bzw. mit a, b, c und bilde die passende Summe.

Zu c): Aus $\cos\alpha$ berechne $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ und benütze §. 38, 5; — ferner berechne $b \cdot \cos\gamma$ und $c \cdot \cos\beta$.

9. Wie lassen sich aus der einzigen Annahme der drei Gleichungen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R, \qquad a : b = \sin\alpha : \sin\beta, \qquad c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$$

alle übrigen Formeln in §. 42 ableiten?

10. Löse die sogenannten Cagnoli'schen Gleichungen in §. 42, 4 nach a und b als Unbekannten auf und vereinfache möglichst. — Andeutung: Beachte, daſs $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

11. Quadriere und addiere die Cagnoli'schen Gleichungen in §. 42, 4.

12. Aus den Formeln für $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ in §. 43, 3, Anm. soll man a) den Satz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bestätigen, b) die Werte für $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ berechnen. §. 43.

13. Die Dreiecksseite a sei durch die Ecktransversale m halbiert. Berechne nun 1) tg jedes der Teilwinkel (vgl. §. 17, 3a),

$$2)\quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2bc \cdot \sin\alpha}{b^2 - c^2}, \qquad \text{wo} \qquad \sphericalangle\,\delta = (ma).$$

Andeutung zu 2): Beachte, daſs δ Auſsenwinkel ist.

14. Beweise: Für alle Dreiecke, welche über einer gegebenen Grundseite mit bestimmtem Umfang gezeichnet werden (Fahrstrahlen der Ellipse), ist die Normalprojektion der Halbierenden des Gegenwinkels zu ersterer Seite auf eine der beiden anderen konstant.

15. In Nr. 13 ist: $\operatorname{cotg}(cm) - \operatorname{cotg}\beta = 2 \cdot \operatorname{cotg}\alpha$. — Der Be-

weis ist durch Rechnung oder geometrisch zu führen; im letzteren Falle ziehe die Höhe zu c und die Parallele dazu durch die Mitte von a.

16. In jedem Dreiecke gelten die Gleichungen:

a) $b \cos\beta + c \cos\gamma = a \,.\, \cos(\beta - \gamma)$.

b) $a\,(b \cos\gamma - c \,.\, \cos\beta) = b^2 - c^2$.

(Geometrischer Beweis oder durch Rechnung.)

c) $(a + b) \,.\, \cos\gamma + (b + c) \,.\, \cos\alpha + (c + a) \,.\, \cos\beta = a + b + c$.

(Zuerst geometrischer Beweis.)

d) $1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2c}{a + b + c}$.

e) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta \,.\, \operatorname{tg}\gamma$.

(Geometrischer Beweis: Aufg. §. 16, 13b.)

§. 22. Auflösung des schiefwinkeligen Dreiecks.

I. Fall.

§. 43. Es sollen die fehlenden Stücke eines Dreiecks berechnet werden, wenn gegeben ist:

1. $a = 56$, $\sphericalangle\beta = 49^0 57'$, $\sphericalangle\gamma = 68^0 20'$.
Res.: $b = 48{,}679$; $c = 59{,}1$.

2. $b = 342{,}07$, $\sphericalangle\alpha = 18^0 32' 40''$, $\sphericalangle\gamma = 51^0 20'$.
Res.: $\beta = 110^0 7' 20''$; $a = 115{,}862$; $c = 284{,}447$.

3. $c = 0{,}99$, $\sphericalangle\beta = 100^0$, $\sphericalangle\gamma = 32^0 50'$.

4. $b = 1$, $\sphericalangle\alpha = 29^0 0' 50''$, $\sphericalangle\gamma = 54^0$.

5. Bei der Vermessung des Grofsherzogtums Baden (vgl. das Kärtchen) wurde im Nordwesten des Landes die Strecke Speyer-Oggersheim = 19 795 m gemessen. Wenn nun auch die in der Nähe liegenden Punkte Calmit, Königstuhl (bei Heidelberg), Melibokus mit ihren Anfangsbuchstaben bezeichnet werden und wenn gemessen wurde:

$\sphericalangle SOC = 62^0 31' 20''$, $\sphericalangle CSO = 75^0 24' 10''$, $\sphericalangle SKO = 45^0 27' 47''$
$\sphericalangle KOS = 55^0 21' 10''$, $\sphericalangle KMO = 46^0 24' 51''$, $\sphericalangle MOK = 74^0 59' 27''$,

welche Entfernung haben irgend zwei dieser Punkte von einander?

6. Ein Winkel ASB sei $= 70^0 20'$ und $SA = 41$ m gemessen. Nun soll in A zu AS die Normale AN errichtet werden, es geschieht dies mit einer ungenauen Kreuzscheibe, welche Winkel von 89^0 und 91^0 giebt (statt 90^0). Wenn nun die mit Benützung des ersten Winkels erhaltene Sehlinie auf SB in Q, die zweite Sehlinie in R

einschneidet, wie grofs sind die Fehler NQ und NR? — Antwort: $NR = 6{,}256$ m.

7. In einem gleichseitigen Dreieck, dessen Seite $= a$, werde ein Winkel in drei gleiche Teile geteilt. In welche Teile wird hierdurch die Gegenseite jenes Winkels geteilt?

II. Fall.

Es sollen die fehlenden Stücke eines Dreiecks gefunden werden aus:

8. $a = 11, \quad b = 9; \quad \sphericalangle \gamma = 47^\circ 30'$.
Res.: $c = 8{,}2604; \quad \sphericalangle \alpha = 79^\circ 3'$.

9. $a = 7, \quad b = 10; \quad \sphericalangle \gamma = 100^\circ$.

10. $b = 79, \quad c = 101; \quad \sphericalangle \alpha = 119^\circ 42' 20''$.
Res.: $a = 156{,}046$.

11. $a = 59{,}378, \quad c = 72{,}009, \quad \sphericalangle \beta = 68^\circ 0' 50''$.

12. a) In ein Bahngeleise ABC mündet bei B ein zweites Geleise FB ein unter einem Winkel $ABF = 32^\circ 20'$. Wenn nun von B zwei Züge ausgehen, der eine nach F zu, der andere nach A mit einer Geschwindigkeit von bzw. 12,5 und 14 m per Sekunde, wie weit sind die Züge nach $4\frac{1}{2}$ Minuten von einander entfernt?

b) Wenn aber der letztere Zug von B nach C hinfährt, wie lautet nun die Antwort?

13. a) Wenn in Fig. 7 (S. 13)

$$\sphericalangle S = 14^\circ 15' \quad \text{und} \quad SA = 65, \quad SB = 93, \quad AA_1 = 13;$$

wie grofs ist A_1B_1?

b) Dieselbe Aufgabe ist für Figur 18 (S. 19) zu lösen, nur dafs nicht AA_1, sondern $AB_1 = 46{,}6$ gegeben sei.

14. In einem Parallelogramm sind die Diagonalen und ihr Winkel bzw. gleich 38,7, 43,59, $123^\circ 45' 20''$. Wie grofs sind die Seiten und Winkel des Vierecks?

15. In einem gleichseitigen Dreieck sei eine Seite in drei gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte seien mit dem Gegeneck verbunden. Welche Winkel entstehen an diesem Gegeneck?

16. Von einem Kreispunkte aus gehen zwei Sehnen $AB = 140{,}3$ und $AC = 543$ und bilden einen Winkel $= 150^\circ$. Welchen Winkel bildet die Tangente in A mit der Sekante BC? und wie grofs sind Tangente und Sekante?

17. Von einem Viereck, dessen zwei gegenüberliegende Winkel (ab) und (cd) gleich seien, sind die Seiten gegeben $= a, b, c, d$.

Wie grofs sind die gleichen Winkel? — Beispiel: $a = 19$, $b = 21$, $c = 17{,}2$, $d = 24$.

Andeutung: Berechne die Diagonale, welche nicht durch die gleichen Winkel geht, zweimal und setze die beiden Werte gleich.

III. Fall.

Es sollen die fehlenden Stücke eines Dreiecks gefunden werden aus:

18. $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. [Wie läfst sich zeigen, dafs $\sphericalangle(ab) = 2 \,.\, \sphericalangle(bc)$ ist?]

Res.: $\alpha = 41^0 24' 35''$; $\beta = 55^0 46' 17''$.

19. $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$.

20. $a = 75$, $b = 92$, $c = 29$.

21. $a = 277$, $b = 373$, $c = 390$.

Res.: $\sphericalangle \gamma = 55^0 42' 24''$.

22. $a = 70{,}85$, $b = 4{,}35$, $c = 71{,}44$.

23. a) Von drei Kreisen berühre jeder die beiden anderen ausschliefsend. Welche Winkel bilden die Centralen mit einander? — $r_1 = 3{,}56$; $r_2 = 5{,}009$; $r_3 = 14{,}7$.

b) Wenn aber der gröfste der Kreise die beiden anderen einschliefsend berührt, wie löst sich nun die Frage in a)?

24. Zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 13$ mm und $r_2 = 7{,}6$ mm haben eine Mittelpunktsentfernung $d = 31$ mm. Welchen Winkel bildet nun ein äufserer Ähnlichkeitsstrahl mit der Centralen, wenn sein bis zum kleineren Kreise reichendes kleineres Stück $= 40$ mm ist?

25. Eine (horizontale) Strecke a werde von einem Punkte aus betrachtet, welcher von ihren Grenzpunkten um b und c entfernt ist. α) Unter welchem Gesichtswinkel erscheint a? β) Unter welchem Gesichtswinkel erscheint aber die Strecke a, wenn sie von einem ihrer Mitte gegenüberliegenden gleichweit wie vorhin entfernten Punkte aus betrachtet wird? — Beispiel: $a = 5$, $b = 7$, $c = 9$.

26. Wie grofs sind die Winkel (und Diagonalen) eines Trapezes, dessen Parallelseiten sind $a = 19$, $c = 4{,}5$ und dessen andere Seiten sind $b = 15$, $d = 7{,}8$?

IV. Fall.

Es sollen die fehlenden Stücke eines Dreiecks gefunden werden aus:

27. $a = 15$, $b = 13$, $\sphericalangle \alpha = 67^0$.

Res.: $\sphericalangle \beta = 53^0 55' 6''$ oder $= ?$

28. $b = 203$, $c = 245$, $\sphericalangle \gamma = 96^0 23' 50''$.

29. $c = 17$, $a = 12$, $\sphericalangle \alpha = 28^0$.

Res.: $b = 23{,}9711$ oder $= 6{,}04913$.

30. $a = 573{,}9$, $b = 499{,}08$, $\sphericalangle \beta = 97^0 38' 20''$.

31. $c = 35$, $a = 26{,}98$, $\sphericalangle \alpha = 49^0 40'$.

32. Von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Schenkel $= s$, sei nach der Basis eine Strecke $= t$ gezogen, welche mit der Basis einen Winkel τ bildet. Wie weit ist der Scheitel des letzteren vom Basisgrenzpunkt entfernt?

Beispiel:

1) $s = 19$, $t = 32$, $\sphericalangle \tau = 31^0 42'$; 2) $s = 19$, $t = 16$, $\sphericalangle \tau = 31^0 42'$.

33. In einem Kreise vom Radius r sei eine Sehne s und in deren einem Grenzpunkt die unbestimmt lange Tangente t gezogen. Wenn vom anderen Grenzpunkte von s aus nach t hin eine Strecke $= v$ abgetragen wird, welches Stück wird vom Berührungspunkte aus auf t begrenzt. — Beispiel: $r = 6$; $s = 8{,}9$; $v = 7{,}04$.

34. Es soll mit dem Radius ϱ ein Kreis gezeichnet werden, welcher mit einem gegebenen Kreis vom Radius r eine Sehne s gemeinsam hat. Welchen Abstand haben die Mittelpunkte beider Kreise?

Beispiel: $r = 9{,}7$ und $s = 13$ und ϱ entweder $= 7$ oder $= 6{,}5$ oder $= 10$.

§. 23. Inhaltsberechnung.

1. Berechne die Inhalte der Dreiecke in §. 22, 1—4; 8—11; 18—22; §. 44. 27—31.

2. Von einem Dreieck sei der Inhalt gegeben $J = 1537$ und aufserdem noch:

a) $a = 82{,}5$ und $b = 70{,}09$;
b) $a = 46$ und $\sphericalangle \alpha = 34^0 58'$;
c) $\sphericalangle \alpha = 22^0 29'$ und $\sphericalangle \beta = 105^0 30''$;

man soll die fehlenden Stücke des Dreiecks berechnen.

Andeutung zu a): Zeige auch durch Konstruktion, dafs zwei Dreiecke möglich sind.

Andeutung zu b): Berechne $b \cdot c$ und $b^2 + c^2$ und hieraus $(b + c)$ sowie $(b - c)$.

3. Wie läfst sich aus Formel XIV (S. 161) ableiten, welches Dreieck bei zwei gegebenen Seiten den gröfsten Inhalt hat?

4. Welche Formel erhält man, wenn man Formel XIV in dreifacher Weise anschreibt und dann das Produkt zweier Ausdrücke durch den dritten dividiert?

5. Wie leitet man den Satz in §. 25, 4 auf trigonometrischem Wege ab?

6. Wie läfst sich der Inhalt eines Vierecks durch seine Diagonalen und den von denselben gebildeten Winkel ausdrücken?

7. a) Man soll den Inhalt eines Parallelogrammes durch zwei anstofsende Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel ausdrücken.

b) Ebenso für eine Raute. Wie fände sich der Inhalt, wenn man die Diagonalen zur Ableitung benützen wollte?

8. Welche Gröfse haben die Diagonalen einer Raute, wenn deren Inhalt J und eine Seite a bekannt sind? — Beispiel: $J = 719$ und $a = 30{,}2$.

9. Wie berechnet man Seiten und Winkel eines Parallelogramms, dessen Diagonalen e und f und Inhalt J bekannt sind?

Beispiel: $e = 59$, $f = 35{,}8$, $J = 808{,}7$.

10. Von einem Viereck seien zwei Gegenseiten a und c und die Winkel gegeben. Wie grofs ist sein Inhalt?

Andeutung: Bringe die nicht gegebenen Seiten zum Durchschnitt und benütze §. 44, 2 zweimal.

11. Leite die in §. 26, 8 gefundene Formel für den Flächeninhalt eines Sehnenvierecks auf trigonometrischem Wege ab.

Andeutung: Berechne eine Diagonale zweimal und aus der hieraus folgenden Gleichung den Cosinus des der Diagonale gegenüberliegenden Winkels.

12. LM und PQ sind Grenzen zweier Grundstücke, welche in ABC an einander grenzen. Man soll letztere Grenze durch eine von A ausgehende gerade Grenze AD ersetzen. Wie grofs mufs $CD = x$ werden, wenn $BC = a$, $AB = c$, $\sphericalangle ABC = \beta$ und $\sphericalangle BCD = \delta$ gegeben sind. (Beispiel: $\sphericalangle \gamma = 60^0$, $\delta = 30^0$.)

§. 24. Weitere Stücke im Dreieck.

§. 45 u. 46. **1.** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind beide Katheten a, b gegeben. Wie grofs ist die Halbierende des rechten Winkels im Dreieck?

2. Von einem Dreieck, dessen Seiten a, b, c (9, 16, 24) gegeben sind, soll die Halbierende des Gegenwinkels zu c berechnet werden.

3. Beweise, dafs im beliebigen Dreieck folgende Gleichungen stattfinden:

$$\text{a) } r \cdot \varrho \cdot s = a \cdot b \cdot c;$$

$$\text{b) } \varrho_1 = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} : \sin\frac{\beta}{2};$$

$$\text{c) } \frac{\varrho_1 + \varrho}{\varrho_1 - \varrho} = \frac{\cos\frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b + c}{a};$$

$$\text{d) } \frac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_2 + \varrho_3} = \frac{\sin\frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b - c}{a};$$

e) $\frac{\varrho_1 + h_1}{\varrho_1} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c}{a} = \frac{h_1 - \varrho}{\varrho}$;

f) $\frac{\varrho_2 - h_1}{\varrho_2} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b-c}{a} = \frac{h_1 - \varrho_3}{\varrho_3}$;

g) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r$;

h) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - 3r = r \cdot (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = r + \varrho$.

4. Man soll aus den folgenden Angaben die Stücke eines Dreiecks berechnen, und zwar durch Rückführung auf die vier Fundamentalaufgaben vermittelst algebraischer Operationen:

a) $a+b,\ a-b,\ \gamma$; b) $a+b,\ a-b,\ c$; c) $a-b,\ b-c,\ s$;
d) $a+b+c,\ a-b,\ b-c$; e) $a,\ \alpha-\beta,\ \gamma$; f) $a+b,\ \frac{a}{b},\ \gamma$.

5. Ebenso wie in Nr. 4, jedoch durch Benützung rechtwinkeliger Dreiecke:

a) $h_1,\ b,\ c$; b) $h_1,\ b,\ \beta$; c) $h_1,\ \alpha,\ \beta$;
d) $h_1,\ a,\ b$; e) $h_1,\ a,\ \beta$; f) $h_1,\ b,\ \alpha$;
g) $h_1,\ c_1,\ b$; h) $h_1,\ h_2,\ a$; i) $b+c,\ h_1,\ \beta$;
k) $a+b,\ h_1,\ J$; l) $a,\ m_1,\ h_1$; m) $w_1,\ h_1,\ c$.

6. Ebenso wie in Nr. 4, jedoch unter Benützung von passenden Hilfsdreiecken:

a) $a,\ b,\ m_1$; b) $a,\ \beta,\ w_2$; c) $w_1,\ \alpha,\ \beta$,
d) $a,\ \alpha,\ b+c$; e) $a,\ \beta,\ b+c$; f) $\alpha,\ \beta,\ b+c$;
g) $a,\ \gamma,\ b-c$; h) $\alpha,\ \gamma,\ b-c$; i) $a+b+c,\ \alpha,\ \beta$;
k) $c,\ b,\ m_1$; l) $m_1,\ m_2;\ a$; m) $a+b+c,\ h_1,\ \beta$.

Aufgaben zum zwölften Kapitel.

§. 25. Aufgaben der praktischen Geometrie.

Vorbemerkung. Die praktische Geometrie (Topographie, Feldmessen, Geodäsie), aus welcher sich wohl in Ägypten die reine Geometrie entwickelte, hat die Aufgabe, die gegenseitige Lage der Orte eines Bezirks festzustellen, teils zum Zweck der Bestimmung der Gröfse der Grundstücke, teils zum Entwurf von Plänen und Karten. Die Orte werden durch Signale (Pfähle, Stäbe, Stangen, Steine, Türme) bezeichnet. Zum Messen der Strecken benützt man zwei hölzerne Mefslatten von 3 oder 5 m Länge, die abwechselnd aneinander gelegt werden. Wo es sich um genauere Messungen handelt, gebraucht man Mefsstangen aus Metall, welche horizontal auf Böcke gelegt werden und deren kleiner Abstand

jeweils durch einen Meſskeil (siehe Aufg. §. 3, 7) gemessen wird. Zum horizontal Legen benützt man eine Libelle; diese besteht aus einer Glasröhre (oder Dose), welche in Messing gefaſst und mit einer Flüssigkeit (Äther) fast vollständig gefüllt und in der Mitte so ausgebaucht ist, daſs bei horizontaler Lage die Blase über der Flüssigkeit in der Mitte steht. — Die genaueste Längenmessung ist notwendig zur Bestimmung der Basis einer Landesvermessung. Es wird hierzu eine etwa 10 km lange Standlinie möglichst genau gemessen. Von den Endpunkten der Standlinie aus werden die Winkel der Standlinie mit den Sehlinien nach andern Punkten bestimmt und von letzteren wieder die Winkel nach weiteren Punkten. Auf diese Weise wird ein Netz von Dreiecken erster Ordnung*) über das Land gelegt, deren Seitenlängen die ein-, zwei-, dreifache Länge der Basis haben und an welche sich dann Dreiecke zweiter und dritter Ordnung mit geringerer Seitenlänge anschlieſsen. Zur Bestimmung der Lage der Netzpunkte werden deren Coordinaten in Bezug auf den Meridian und Parallelkreis der Sternwarte des Landes berechnet. An die so bestimmten Punkte knüpfen sich dann die Messungen mit Meſslatten und Kreuzscheibe für die kleinsten Bezirke an.

Als Winkelmeſsinstrument dient der Theodolit. Derselbe hat eine kreisförmige Scheibe (Alhidade), welche mittels einer Libelle durch drei Fuſsschrauben horizontal gestellt wird und so um eine lotrechte Axe drehbar ist. Die Gröſse der Drehung dieser Scheibe wird auf einem sie umfassenden Rand (Limbus), der mit einer Kreisteilung versehen ist, abgelesen (Horizontalwinkel) mit Hilfe zweier auf der Scheibe befindlichen Nonien (vgl. I. Teil, Aufg. §. 6, 18). Die Scheibe trägt die Lager einer horizontalen Axe, mit welcher ein Fernrohr und ein zweiter geteilter Kreis verbunden ist, der Vertikal- oder Höhenkreis, dessen Nonius an dem Lager der Axe befestigt ist. Dieser Kreis dient zur Messung von Höhenwinkeln bei trigonometrischer Höhenmessung. Zur Horizontalstellung des Fernrohrs ist auch dieses mit einer Libelle versehen Der Apparat ruht auf einem zusammenlegbaren Dreifuſs.

§. 48. **1.** Zwei Orte A und B, zwischen welchen man nicht hin- und hersehen kann, sollen durch eine geradlinige Straſse (Tunnel) verbunden werden. Man wählt den seitlich gelegenen Punkt C und miſst $AC = 168$ m, $BC = 137{,}5$ m und $\sphericalangle C = 74^0 29' 20''$. Wie lang wird die Straſse?

2. Wenn in Fig. 179 die Strecken CA, CB, a_1, b_1, c_1 bzw. 122, 464, 102, 61, 109 sind, wie groſs ist AB?

3. Um die Breite AB eines Flusses zu bestimmen, miſst man

---

*) Siehe das Kärtchen am Ende des Buches und vergleiche Aufgabe §. 22, 5. Auſser der dortgenannten Basis (19794,5 m) wurde zur Kontrole die Elsässer Basis Sausheim-Oberhergheim (19044,387 m) benützt, welche eine Übereinstimmung bis 8,3 Milliontel ergab. Nach Osten wurde angeschlossen an die Linie Ludwigsburg-Solitüde (13032,144 m), nach Norden an Darmstadt-Griesheim.

am einen Ufer eine durch B gehende beiderseits B sich erstreckende zu AB normale Strecke $QR = 150$ m und die Sehwinkel nach A bei $Q = 40^0$ und bei $R = 61^0$. Wie grofs ist AB?

4. Es soll die Länge einer Strecke AB, die nur bei A zugänglich ist, bestimmt werden. Man mifst zu diesem Behufe unter einem Winkel $BAY = 62^0 24'$ eine Strecke $AY = 48$ m und in Y unter dem Winkel $AYZ = 117^0 36'$ die Strecke $YZ = 69{,}4$ m und endlich den Winkel $YZB = 108^0 0' 30''$. Wie grofs ist AB? — Andeutung: Ziehe die zu ZB Parallele durch Y u. s. w. oder benütze den Schnittpunkt zweier Gegenseiten.

5. Die Gröfse der nur bei P zugänglichen Strecke PQ soll bestimmt werden.

a) Man mifst hierzu seitwärts von P aus $PR = 79{,}08$ m und andrerseits von PQ die Strecke $PS = 62{,}9$ m, ferner die Winkel
$RPS = 99^0 59'$, $\sphericalangle PSQ = 67^0 2' 30''$, $\sphericalangle QRP = 60^0 20'$.

b) Es können auch PR und PS auf derselben Seite von PQ angenommen werden: dann sei $\sphericalangle RPS = 9^0 10'$, alles Übrige ungeändert wie bei a).

Andeutung: Bezeichne die Teile des $\sphericalangle RPS$ durch x und y und berechne PQ zweimal.

6. Es soll die Entfernung eines Weltkörpers von der Erde berechnet werden, den Radius der letzteren $= 1$ gesetzt. Man mifst hierzu in zwei Punkten A und B, welche auf demselben Meridiane liegen, die Zenithdistanzen γ und δ des Weltkörpers in dem Augenblicke, wo er kulminiert (d. h. durch den Himmelsmeridian geht).

In welcher Beziehung steht diese Aufgabe zu der in Nr. 5?

Beispiele:

a) Am 6. Oktober 1751 wurde für den Planeten Mars zu Stockholm (nördliche Breite $= 59^0 20' 31''$) $\sphericalangle \gamma = 68^0 14'$ südlich und am Kap der guten Hoffnung (südliche Breite $= 33^0 54' 56''$) $\sphericalangle \delta = 25^0 2'$ nördlich gemessen.

b) An denselben Orten wie in a) wurden für den Mond
$\sphericalangle \gamma = 61^0 13' 33''$ südlich und $\sphericalangle \delta = 33^0 20' 24''$ nördlich gemessen.

c) An zwei um 35 Meilen von einander entfernten Orten A und B wurde für den Mond $\sphericalangle \gamma = 45^0 53' 20{,}7''$ und $\sphericalangle \delta = 43^0 31' 40''$ gefunden. (Erdradius $= 860$ Meilen).

d) In Altona ($53^0 32' 45{,}3''$) und Göttingen ($51^0 31' 47{,}9''$) wurde bezw. $\sphericalangle \gamma = 41^0 17' 58''$ und $\sphericalangle \delta = 43^0 20' 25''$ gemessen und zwar in Bezug auf den Mond.

7. Um die Breite AB eines Flusses zu bestimmen, sei auf der Verlängerung von AB ein Punkt C gewählt und von ihm aus unter dem $\sphericalangle \gamma$ eine Strecke $CF = n$ gemessen und aufserdem noch $\sphericalangle CFA = \alpha$ und $\sphericalangle CFB = \beta$. Wie grofs ist AB?

Beispiel:

$n = 33$; $\sphericalangle\, \alpha = 105^0 40'$; $\sphericalangle\, \beta = 65^0$; $\sphericalangle\, \gamma = 49^0 37'$.

8. Die Grenzpunkte einer Strecke $LM = a$ seien unzugänglich und es sollen ihre Entfernungen von einem seitlich liegenden Punkte V bestimmt werden, wobei L und M von V aus sichtbar seien. Zu diesem Zwecke wählt man auf der Verlängerung von LM einen zugänglichen Punkt S und misst allein die Winkel $LVM = \alpha$, $MVS = \beta$ und $VSM = \gamma$. Wie grofs sind LV und MV?

Beispiel:

$a = 44{,}5\,\mathrm{m}$; $\sphericalangle\, \alpha = 70^0$; $\sphericalangle\, \beta = 14^0$; $\sphericalangle\, \gamma = 31^0$.

9. Man befindet sich auf einer Flufsinsel und soll die Breite AB des Flusses bestimmen. Man mifst auf der Insel in der ungefähren Flufsrichtung eine Strecke $QR = l$ und in deren Grenzpunkten die Winkel $\alpha = AQR$, $\beta = RQB$, $\gamma = QRA$, $\delta = BRQ$.

Beispiel:

$l = 28{,}7$; $\alpha = 91^0 50'$; $\beta = 71^0 43'$; $\gamma = 58^0 29'$; $\delta = 74^0$.

10. Es soll in Fig. 180 (S. 168) AB berechnet werden, während die gemessenen Stücke seien:

a) $a = 38$; $\alpha = 86^0 20'$; $\beta = 23^0$; $\alpha_1 = 48^0 50'$; $\beta_1 = 129^0$.

b) $a = 250{,}6$; $\alpha = 118^0 34'$; $\beta = 56^0 2'$; $\alpha_1 = 34^0 35' 10''$; $\beta_1 = 90^0 1'$.

c) In welcher Beziehung steht die Aufgabe in Nr. 9 zu dem vorliegenden a) und b)?

11. Man wünscht die Entfernungen zwischen drei unzugänglichen Punkten A, B, C kennen zu lernen und stellt sich zu dem Zwecke in gerader Linie mit AB auf, mifst dann die Strecken p und q, längs welcher man sich, normal zu AB, seitwärts begeben mufs, um erst mit A und C, dann mit B und C in einer Geraden zu sein; in den neuen Stellungen mifst man die Sehwinkel α und β für AB. Es ist zu zeigen, wie die gewünschten Strecken gefunden werden können.

12. Von zwei Standpunkten C und D aus (Fig. 180) sieht man nach den Grenzpunkten einer bekannten Strecke $AB = l$ und mifst die Winkel $ACD = \alpha$, $BCD = \beta$, $CDA = \alpha_1$, $CDB = \beta_1$. Wie lang ist CD?

Vgl. auch Aufg. §. 26, 13. — Für die folgenden Beispiele soll zuerst die ungefähr entsprechende Figur gezeichnet werden:

a) $l = 280$; $\alpha = 91^0 30'$; $\beta = 23^0$; $\alpha_1 = 41^0$; $\beta_1 = 123^0 52'$.

b) $l = 301{,}98$; $\alpha = 96^0$; $\beta = 51^0 42'$; $\alpha_1 = 19^0 48'$; $\beta_1 = 53^0$.

c) $l = 196{,}5$; $\alpha = 74^0 20'$; $\beta = 36^0$; $\alpha_1 = 57^0 44'$; $\beta_1 = 41^0 30'$.

13. Wie weit ist ein Punkt S von drei Punkten A, B, C einer

Geraden entfernt, wenn $AB = l_1$, $BC = l_2$ und $\sphericalangle ASB = \alpha_1$, $\sphericalangle BSC = \alpha_2$ gemessen sind?

Beispiel:

a) $l_1 = 17{,}93$; $l_2 = 26{,}008$; $\alpha_1 = 42^0$; $\alpha_2 = 46^0 53'$.

b) $l_1 = 201{,}5$; $l_2 = 109{,}48$; $\alpha_1 = 28^0 9'$; $\alpha_2 = 43^0 20' 50''$.

14. In Fig. 181 (S. 169) soll die Entfernung des Punktes D von A (oder B oder C) berechnet werden, wenn gegeben ist:

a) $a = 30$; $b = 31$; $\gamma = 101^0$; $\alpha = 26^0$; $\beta = 29^0$.

b) $a = 19{,}45$; $b = 12{,}07$; $\gamma = 262^0 40'$; $\alpha = 13^0 27'$; $\beta = 32^0 10'$.

c) $a = 45$; $b = 32{,}89$; $\gamma = 72^0 35'$; $\alpha = 142^0\ 9' 50''$; $\beta = 68^0\ 7'$.

Zeichne zuerst die Figur nach den gegebenen Mafsen.

15. Auf einer Geraden liegen auf einanderfolgend die Punkte A, B, C, D und es sei gemessen $AB = a = 1234{,}5$, $CD = b = 963{,}8$; aufserdem kennt man die Winkel, unter welchen die Strecken AB, BC, CD von einem seitlich gelegenen Punkte S aus erscheinen, nämlich bezw. $\sphericalangle \alpha = 25^0 42'$, $\sphericalangle \beta = 48^0 19'$, $\sphericalangle \gamma = 32^0 56'$. Wie grofs ist $BC = x$?

---

16. Ein auf einer Horizontalebene stehender Baum erscheint von einem Punkt A der Ebene aus unter einem Höhenwinkel $\alpha = 30^0$, und wenn man sich dem Baume um 40m nähert bis B, erscheint er unter dem Höhenwinkel $\beta = 60^0$. Wie hoch ist der Gipfel des Baumes über dem Auge des Beobachters? und wie weit ist seine Entfernung von B? §. 49.

17. Zur Mittagsstunde beobachtet man nach Süden eine Wolke unter dem Höhenwinkel α, während der der Sonne β ist; zugleich ist der Schatten der Wolke vom Beobachter um a Meter entfernt (nord- oder südwärts?). Wie hoch schwebt die Wolke?

Beispiel:

a) $\sphericalangle \alpha = 25^0 59' 21'$, $\sphericalangle \beta = 28^0 54' 36''$, $a = 89$m.

b) $\sphericalangle \alpha = 30^0\ 6'$, $\sphericalangle \beta = 28^0 54' 36''$, $a = 58$m.

18. Vom Fufse F eines Turmes FS aus führt eine geradlinige Strafse gleichmäfsig fallend bergabwärts und man hat auf ihr $FA = a$ und $AB = b$ gemessen, aufserdem den Winkel $FAS = \alpha$ und $FBS = \beta$. Wie hoch ist FS?

Beispiel:

$a = 12{,}9$; $b = 18{,}5$; $\alpha = 68^0 19'$; $\beta = 47^0 58' 20''$.

19. Ein auf einer Horizontalebene stehender Turm (z. B. der zu Pisa) sei gegen Norden geneigt. Von zwei Punkten A und B

aus, die bezw. um a und b genau nach Süden vom Fufse des Turmes abstehen, erscheint dessen Spitze unter den Höhenwinkeln α bezw. β. Wie stark geneigt ist der Turm? und wie hoch? — Andeutung: Nenne die Projektion des Turmes x und drücke die Höhe doppelt aus.

Beispiel:

$$a = 30\text{m},\quad b = 58{,}5\text{m};\quad \sphericalangle\,\alpha = 58^0 3' 6'',\quad \sphericalangle\,\beta = 40^0 56' 44''.$$

(Antwort: Neigungswinkel $= 86^0 10' 39''$; Höhe $= 53{,}88$m.)

20. Betrachtet man einen Turm von einem südwärts davon gelegenen Punkt A, so erscheint er unter dem Höhenwinkel 30^0; geht man von A aus westwärts nach B um die Strecke a, so erscheint der Turm von B aus unter dem Höhenwinkel 18^0. Man soll zeigen, dafs die Höhe des Turmes $= a : \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}$.

21. Der Gipfel S eines Berges erscheint von einem Punkt A aus unter einem Höhenwinkel $= 60^0$; wandert man von A aus gegen S hin um $1\frac{1}{2}$Km bis B auf einer Strafse, welche 30^0 mit der Horizontalen bildet, so wird der Winkel $ABS = 135^0$. Wie hoch ist der Berg?

22. Eine von A aus nach Südwesten hin und h Meter über A gelegene Bergspitze S erscheint in A unter dem Höhenwinkel α. Unter welchem Höhenwinkel erscheint S von B aus, wenn B um b Meter südlich (oder nördlich) von A liegt?

Beispiel:

$$h = 450\text{m};\quad \alpha = 7^0 7' 30'';\quad \text{b} = 1\tfrac{1}{2}\text{Km}.$$

(Antwort: $9^0 17' 11''$ (bezw. $5^0 22' 41''$.)

23. Von einem in einem Thale gelegenen Standpunkt S aus mifst man die Höhenwinkel α und β zweier Bergspitzen A und B und auch die Projektion des Sehwinkels ASB auf den Horizont $= \gamma$. Wenn noch die Höhe der Berge über der Horizontalebene bezw. gleich a und b bekannt ist, wie grofs ist die Luftlinie AB?

Beispiel:

$$\alpha = 7^0 58';\quad \beta = 10^0 24';\quad \gamma = 139^0 45';\quad a = 240;\quad b = 1480.$$

24. Man visiert die Entfernung AB zweier Felsenriffe sowohl vom Fufse F als von der Spitze S eines vom Meeresspiegel aus sich erhebenden Leuchtturmes. Man kennt $SF = h$, und mifst

$$\sphericalangle\,ASF = \alpha,\quad \sphericalangle\,BSF = \beta \text{ und } \sphericalangle\,AFB = \gamma.$$

Wie grofs ist die Entfernung AB?

Beispiel:

$$h = 25{,}4;\quad \alpha = 60^0 8';\quad \beta = 71^0 56' 20'';\quad \gamma = 101^0 30'.$$

25. Um die Höhe eines Gebäudes SF zu bestimmen, mifst man an drei Standpunkten A, B, C, welche in einer Geraden und zwar in der durch F gehenden Horizontalebene liegen, die Höhenwinkel α, β, γ zu der Spitze S des Gebäudes. Wenn noch $AB = a$, $BC = b$ gemessen wird, wie hoch ist das Gebäude?

Beispiel:

$a = 56$, $b = 32{,}8$; $\alpha = 10^0 2'$; $\beta = 48^0 54'$; $\gamma = 29^0 30'$.

---

26. Ein Stück Feld hat die Gestalt ABC (Fig. 188) und soll durch eine Gerade XY im Verhältnis $p:q$ geteilt werden. Dabei sei gegeben: §. 50.

a) $AB = 145$, $BC = 120{,}8$, $\sphericalangle B = 68^0$; $\sphericalangle \delta = 90^0$; $p:q = 1:1$

b) $AB = 137$, $\sphericalangle A = 72^0$, $\sphericalangle B = 59^0$, $\sphericalangle \delta = 99^0$; $p:q = 1:2$

und dabei soll erstens der kleinere Abschnitt, zweitens der gröfsere Abschnitt an AC zu liegen kommen.

c) $AB = 98$, $BC = 106$, $CA = 86{,}9$; $\sphericalangle \delta = 106^0 50'$; $p:q = 3:7$.

27. Im Viereck $ABCD$ (Fig. 189) sei $AB = 19$, $BC = 23$, $CD = 15{,}4$ und $\sphericalangle \beta = 100^0$, $\sphericalangle \gamma = 102^0 30'$; $\sphericalangle \varepsilon = 87^0$; $p:q = 2:3$. Wohin fällt die teilende Gerade XY?

28. Von einer Strafse gehen in den Punkten P und Q zwei Grenzen PR und QS eines Feldes aus und es sei $PQ = a$, $\sphericalangle QPR = \gamma$, $\sphericalangle SQP = \delta$ gegeben. Man soll durch eine Parallele zu PQ ein Stück abschneiden, dessen Inhalt $= J$ gegeben sei.

§. 26. Vermischte trigonometrische Übungen.

1. Man soll zeigen, dafs

$$\frac{1}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha + 2.$$

2. Wie grofs sind α und β, wenn

a) $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ und $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$?

b) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$ und $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 1$?

3. Man soll einen gegebenen Winkel in zwei Teile teilen derart, dafs a) die Sinus, b) die Cosinus, c) die Tangenten derselben in gegebenem Verhältnisse stehen.

4. Wenn

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 2 \cdot \operatorname{tg}^2\beta + 1,$$

so ist auch:

$$\cos 2\alpha + \sin^2\beta = 0. \qquad \text{Beweis!}$$

5. Zwei Kreise, deren Radien a und b seien, berühren einander ausschliefsend, und es sei γ der von den beiden äufseren gemeinsamen Tangenten gebildete Winkel. Man soll beweisen, dafs:

$$\sin\gamma = \frac{4\cdot(a-b)\cdot\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

6. Man soll α und β eliminieren aus den drei Gleichungen:

a) $\sin\alpha + \sin\beta = a,\quad \cos\alpha + \cos\beta = b,\quad \cos(\alpha-\beta) = c.$

b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = a,\quad \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta = b,\quad \alpha+\beta = \gamma.$

7. Im rechtwinkeligen Dreieck, dessen Hypotenuse c ist, ist:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c}{a}.\quad \text{Beweis?}$$

8. Man soll beweisen, dafs der gröfste Winkel eines Dreiecks 120^0 ist, wenn seine Seiten sind:

$$a^2+a+1,\quad 2a+1,\quad a^2-1.$$

9. Wenn A auf der Verlängerung des Durchmessers eines Kreises M liegt und eine Sekante von A aus den Kreis in B und C schneidet, so soll bewiesen werden, dafs

$$\operatorname{tg}\frac{AMB}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{AMC}{2}$$

eine konstante Gröfse ist für alle Sekanten durch A.

10. Zwei Kreise, deren Mittelpunktsentfernung $d = 34{,}8$ ist, haben Radien von der Gröfse $r_1 = 12{,}7$ und $r_2 = 7{,}69$. Welche Winkel bildet eine der äufseren gemeinsamen Tangenten mit den beiden inneren? [Antwort: $48^0 8' 46''$ oder $27^0 35' 28''$.]

11. In einem Dreieck ABC sei

$$AB = 251{,}47 \quad\text{und}\quad BC = 346{,}96 \quad\text{und}\quad \sphericalangle B = 65^0 13'.$$

Auf BC liege A_1 so, dafs $BA_1 = 114$ ist, und durch C_1 werde eine Transversale $A_1C_1B_1$ gezogen, so dafs $\sphericalangle BA_1C_1 = 79^0$ wird. Man soll die Abschnitte, welche durch die Transversale auf den anderen Seiten gebildet werden, berechnen und soll die im Satze des Menelaus ausgesprochene Eigenschaft bestätigen.

12. Zwei auf einer Geraden liegende an einander grenzende Strecken a und b erscheinen von einem Punkt aus unter den Winkeln α und β. Man soll die Entfernungen dieses Punktes von den Grenzpunkten der Strecke berechnen. — Andeutung: Nach §. 16, 1a ergiebt sich eine Proportion; man bestimme (mittels §. 42, 3) den Faktor (Divisor), welcher den Gliedern einerseits zuzusetzen ist, damit sie den entsprechenden Gliedern gleich werden.

13. Zur Lösung der Hansen'schen Aufgabe §. 48, 4, Fig. 180,

(bzw. Aufg. §. 25, 12) weise man nach, dafs der Winkel $DAB = \varphi$ durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1 + \varphi)}{\sin\varphi} \cdot \frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \beta_1)} = 1$$

und dafs dann:

$$CD = \frac{c \sin\varphi \sin(\beta + \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \alpha_1)\sin\beta}.$$

14. Für A_1 als Mitte der Seite BC eines Dreiecks gilt:

$$\operatorname{cotg} BAA_1 - \operatorname{cotg} B = 2 \cdot \operatorname{cotg} A.$$

15. Wie grofs ist die Summe der Inhalte der zwei Dreiecke, die sich beim sogenannten unbestimmten Falle der Trigonometrie (§. 43, 4) ergeben.

16. Wie grofs sind die Koordinaten eines Punktes C, wenn die zweier Punkte A und B und dazu die Winkel BAC und CBA gegeben sind?

Für die folgenden Beispiele, welche der badischen Landesvermessung entnommen sind (vgl. die Karte), gelten die S. 132 und 133 gemachten Festsetzungen über Bezeichnung und Vorzeichen der Koordinaten.

Beispiel 1)

A = Oggersheim ($x = +\ 6001{,}72$ m, $y = +\ 388{,}67$ m);
B = Donnersberg ($x = +\ 38145{,}35$ m, $y = +\ 15278{,}59$ m);
C = Klobberg.
$\sphericalangle BAC = 41^0 30' 48''$ und $\sphericalangle CBA = 57^0 21' 38''$.

Beispiel 2)

A = Oggersheim ($x = +\ 6001{,}72$ m, $y = +\ 388{,}67$ m);
B = Melibocus ($x = -\ 12727{,}09$ m, $y = +\ 26508{,}51$ m);
C = Königstuhl bei Heidelberg.
$\sphericalangle BAC = 74^0 59' 28''$ und $\sphericalangle CBA = 46^0 24' 51''$.

17. In einem Dreieck sei eine Seite $= 14{,}29$, die zugehörige Höhe $10{,}3$, der von der Höhe durchschnittene Winkel $= 70^0$. Wie grofs sind die zwei anderen Seiten?

18. In einem Kreise vom Radius r sei ein excentrischer Sektor gezeichnet, dessen Winkel $= \gamma$ von den beiden Sehnenstücken a und b eingeschlossen werde. Welchen Flächeninhalt hat der Sektor?

Beispiel:

$$r = 4; \quad a = 2{,}9; \quad b = 3{,}6; \quad \sphericalangle \gamma = 48^0 49' 50''.$$

19. Zwei Seiten a und b eines Dreiecks seien bekannt, sowie auch der an a liegende Abschnitt q der dritten Seite, welcher durch die Winkelhalbierende hervorgerufen wird. Man soll den Inhalt des ganzen Dreiecks und der Teildreiecke berechnen.

Beispiel:

$$a = 20{,}3; \quad b = 14{,}9; \quad q = 5.$$

20. Über zwei kreisförmige Rollen, deren Radien r_1 und r_2 sind und deren Mittelpunktsentfernung $= d$ ist, ist ein Kreisriemen gelegt. Wie lang ist derselbe?

Beispiel:

$$r_1 = 0{,}42; \quad r_2 = 0{,}19; \quad d = 1{,}2.$$

21. Ein kugelförmiger Ballon vom Radius r wird von einem Beobachter unter einem Sehwinkel α gesehen, während gleichzeitig der Höhenwinkel seines Mittelpunktes β ist. Wie hoch befindet sich die Mitte des Ballons?

22. Man soll beweisen, daſs der Inhalt eines Dreiecks ist entweder

$$\text{a)} = \tfrac{1}{4}(a^2 \sin 2\beta + b^2 \cdot \sin 2\alpha) \quad \text{oder b)} = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$\text{oder c)} = \frac{2abc}{a+b+c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$

23. Das Centrum der Ecken eines spitzwinkeligen Dreiecks ABC sei M und es schneide AM die BC in A_1; dann ist:

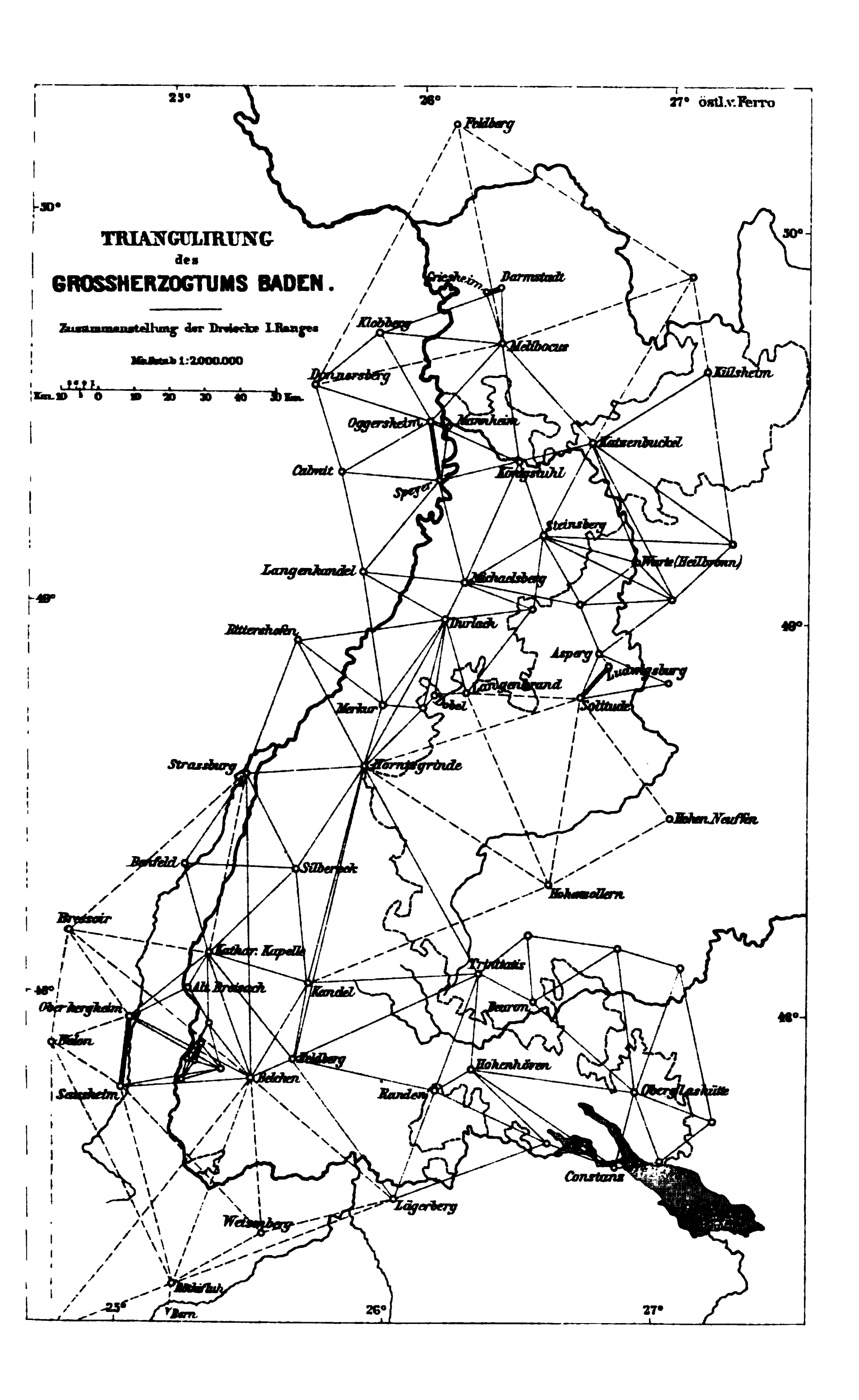
$$MA_1 \cdot \cos(\beta - \gamma) = AM \cdot \cos\alpha.$$

24. Man soll beweisen, daſs in jedem Dreieck

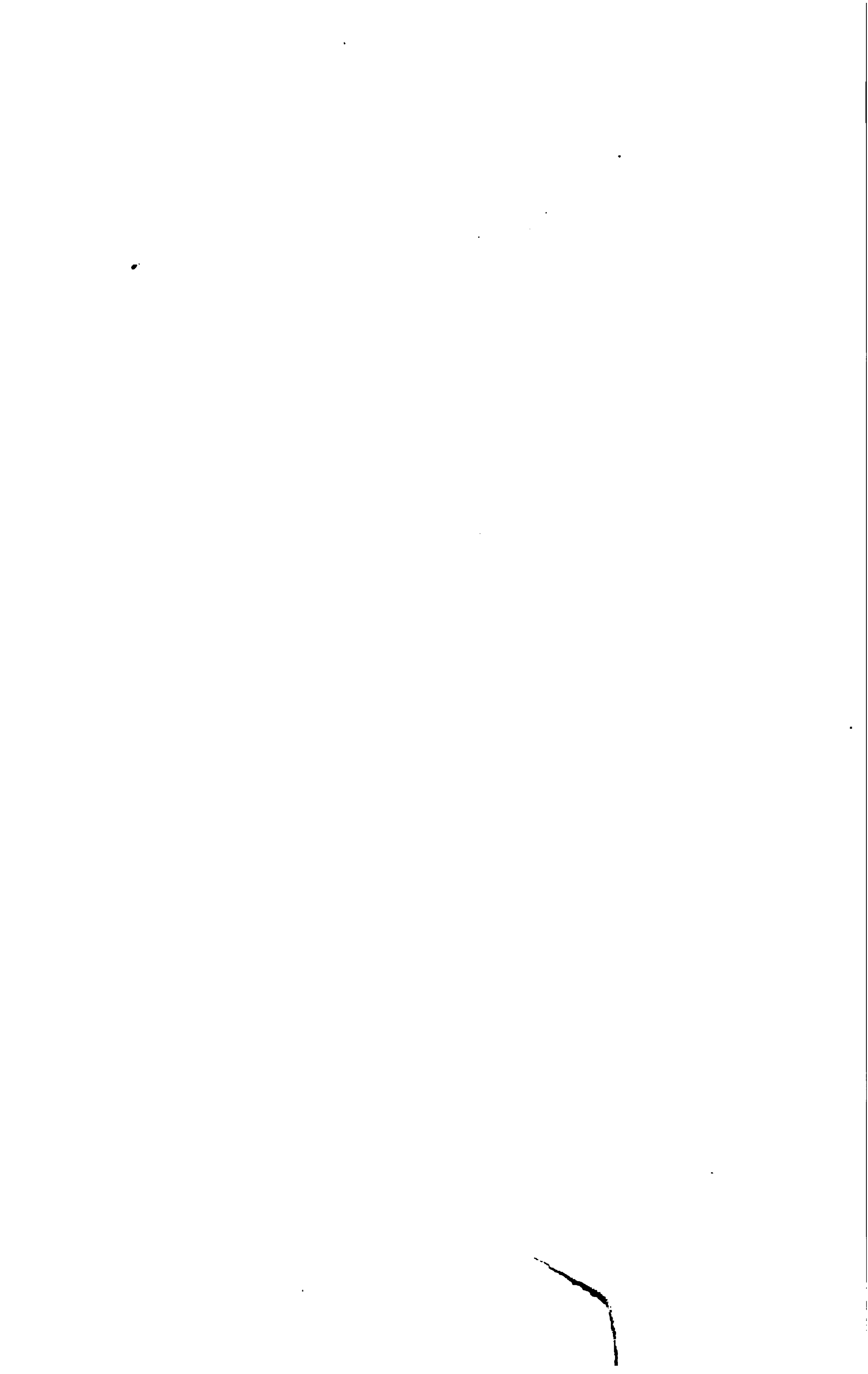
$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho \cdot \varrho_1}{\varrho_2 \cdot \varrho_3}.$$

25. Von einem Punkt der Thalebene aus sieht man einen Berg B um den Winkel $\beta = 2^0 9' 20''$ über einen näher befindlichen Berg A hervorragen, welch letzterer sich um $\alpha = 8^0 23' 40''$ über den Horizont zu erheben scheint. Man bewegt sich nun horizontal so auf die Berge zu, bis A den Berg B deckt und findet dies nach einem Wege $c = 1725$ m. Der Höhenwinkel ist dann $\gamma = 12^0 16' 35''$. Wie hoch sind beide Berge? Welches ist in Luftlinie die Entfernung der beiden Bergspitzen?

26. Zwei geradlinige Schienengeleise, deren Endpunkte durch eine Strecke a mit einander verbunden sind, die mit beiden Schienenrichtungen den gleichen Winkel α bildet, sollen durch einen beide Richtungen tangierenden Kreisbogen verbunden werden. Wie groſs ist der Radius des fraglichen Kreisbogens? Wie groſs ist der Bogen selbst und das Gelände zwischen dem Bogen und der genannten Strecke? Wie groſs sind die auf letzterer in $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ ihrer Länge errichteten Normalen, die vom Bogen begrenzt werden?



TRIANGULIRUNG
des
GROSSHERZOGTUMS BADEN.
Zusammenstellung der Dreiecke I. Ranges
Maßstab 1:2.000.000
Km. 10 5 0 10 20 30 40 50 Km.
25°
26°
27° östl. v. Ferro
50°
49°
48°
Feldberg
Darmstadt
Griesheim
Klobberg
Melibocus
Kilsheim
Donnersberg
Oggersheim
Mannheim
Katzenbuckel
Calmit
Speyer
Königstuhl
Steinsberg
Warte (Heilbronn)
Langenkandel
Michaelsberg
Durlach
Rittershofen
Asperg
Ludwigsburg
Langenbrand
Mobel
Merkur
Solitude
Strassburg
Hornisgrinde
Hohen Neuffen
Silberlock
Hohenzollern
Brutsoir
Kathar. Kapelle
Alt Breisach
Kandel
Trinitatis
Oberbergheim
Beuron
Belchen
Feldberg
Hohenhören
Sausheim
Randen
Oberglashütte
Constanz
Lägerberg
Weissenberg
Röthifluh
Bern



LEHRBUCH

DER

ELEMENTAR-GEOMETRIE

VON

J. HENRICI UND P. TREUTLEIN

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU HEIDELBERG.

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU KARLSRUHE.

DRITTER TEIL.

LAGE UND GRÖSSE DER STEREOMETRISCHEN GEBILDE.
ABBILDUNG DER FIGUREN EINER EBENE AUF EINE ZWEITE.
(KEGELSCHNITTE.)

PENSUM DER PRIMA.

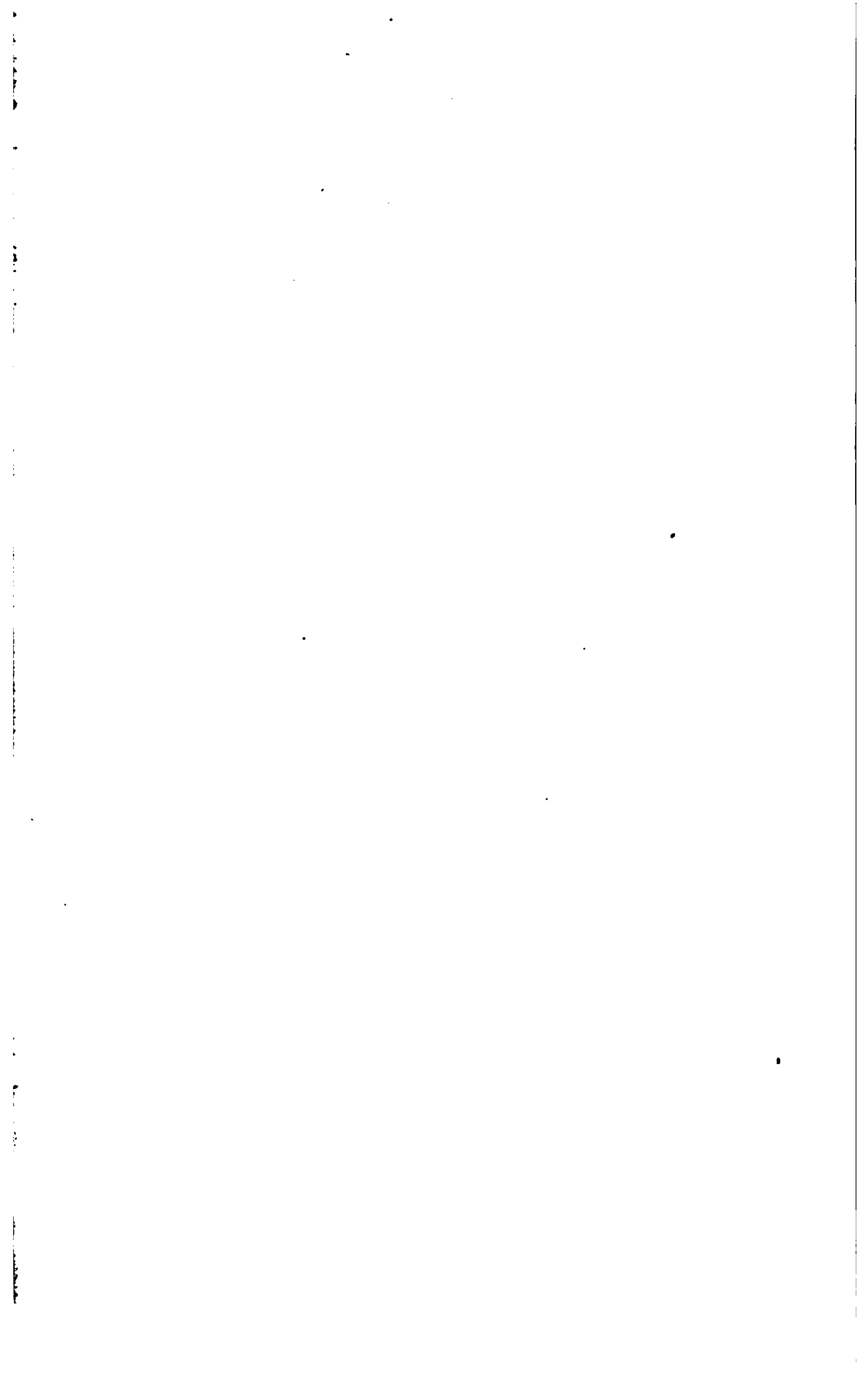


MIT 134 FIGUREN IN ZINKOGRAPHIE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.



Vorwort.

Die Gliederung im vorliegenden Teile unseres Lehrbuchs war uns mit der Gliederung der beiden ersten Teile gegeben; namentlich tritt in der Symmetrie der Gebilde die Analogie mit den betreffenden Abschnitten des ersten Teils überall hervor. Wir hoffen damit erreicht zu haben, „dafs der Schüler die Anordnung des Stoffes vollständig übersieht und eigentlich immer ohne Hilfe des Lehrers im Voraus weifs, was nun zur Betrachtung kommen müsse.“ Bei der Fülle des Stoffes war jedoch die äufserste Beschränkung notwendig und wurden manche Ausführungen den Aufgaben zugewiesen, deren entsprechende Abschnitte in den vorhergehenden Teilen dem Text einverleibt sind, so z. B. das Problem der Berührung von 4 Kugeln. Weiter auf die Collineation räumlicher Gebilde einzugehen, erschien unzweckmässig (vgl. Joh. Traug. Müller, Vorrede zur Stereom., S. XI); es genügte, in einer Anmerkung (§. 16) auf die Unterordnung der Symmetrie unter jene allgemeinere Verwandtschaft hinzuweisen.

Der Unterricht in der neueren Geometrie soll vor Allem die Fruchtbarkeit allgemeiner Prinzipien bei den Untersuchungen räumlicher Beziehungen darlegen. Bei der gebotenen Beschränkung ist dies nur möglich, indem man irgend eines dieser Prinzipien herausgreift, um aus ihm allein eine Fülle von Sätzen mit Leichtigkeit und Eleganz (soweit diese bei schulmässiger Behandlung möglich) zu entwickeln. Unter den zahlreichen Wegen, welche eingeschlagen werden können, gaben wir demjenigen den Vorzug, welcher unserem Sehen und Darstellen am meisten entspricht, d. i. der Projektionsmethode oder Perspektive. Keine geometrische Disziplin stärkt das räumliche Vorstellungsvermögen mehr und begegnet uns häufiger im Leben, als die Perspektive, da sie zu den Darstellungen von Naturgegenständen und Erzeugnissen des Handwerks wie in den künstlerischen Werken der Malerei, Plastik und Architektur benutzt wird.

Unsere elementare Bearbeitung der Kegelschnitte lehnt sich daher im wesentlichen an Poncelet's klassisches Werk an. Allerdings

erforderte der Übergang von den projektivischen Eigenschaften der Kegelschnitte zu den nicht projektivischen eine etwas abweichende Behandlung, da dem Schüler die einfache Übertragung der Sätze von der ideellen auf die reelle Berührung (Ponc. I, 63, 131, 138, 410) wohl nicht zugemutet werden darf. Mit Rücksicht darauf, dafs in Prima oft Schüler verschiedener Anstalten zusammentreffen, wurde in diesem Abschnitt ein vorangehender Unterricht in neuerer Geometrie nicht vorausgesetzt. Übrigens werden schon im stereometrischen Teil die fundamentalen Eigenschaften der Kegelschnitte an der Rotationskegelfläche abgeleitet.

Für Schulen, welche zu technischen Fächern vorbereiten, wird die im Anhang gegebene kurze Zusammenfassung der Elementar-Aufgaben der darstellenden Geometrie eine erwünschte Beigabe sein. Auch für die krystallographische und geographische Darstellung sind die mathematischen Fundamente angedeutet, und zum Schlufs ist noch die Frage beantwortet, wie jeweils der Standpunkt bestimmt werden kann, von welchem aus ein architektonisches Bild zu betrachten ist.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Beziehungen der Lage räumlicher Gebilde.

Erstes Kapitel: Allgemeine Bestimmungen der Lage von Punkten, Geraden und Ebenen.

Zweites Kapitel: Symmetrie in Bezug auf eine Gerade. Normale Lage zwischen Geraden und Ebenen.

Drittes Kapitel: Symmetrie in Bezug auf eine Ebene und einen Punkt. Dreikant und sphärisches Dreieck.

Viertes Kapitel: Perspektivische Kongruenz und Ähnlichkeit.

II. Abschnitt.

Bestimmung der Gröfse räumlicher Gebilde.

Fünftes Kapitel: Die Oberflächen der Körper.

Sechstes Kapitel: Die Kubikinhalte der Körper.

Siebentes Kapitel: Strecken und Winkel im Raum. Elemente der sphärischen Trigonometrie.

III. Abschnitt.

Abbildung der Figuren einer Ebene auf eine zweite Ebene.

Achtes Kapitel: Abbildung geradliniger Figuren.

Neuntes Kapitel: Abbildung des Kreises als Kreis.

Zehntes Kapitel: Abbildung des Kreises als Kegelschnitt.

Elftes Kapitel: Metrische Beziehungen projektivischer Gebilde.

Anhang.

Zwölftes Kapitel: Abbildung körperlicher Gestalten auf der Ebene.

Übungsaufgaben.

I. Abschnitt.

Beziehungen der Lage räumlicher Gebilde.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Bestimmungen der Lage von Punkten, Geraden und Ebenen.

§. 1. Von den Schnittpunkten, Schnittgeraden und der parallelen Lage.

1. In den Gebilden einer Ebene erkannten wir ein Entsprechen von Lehrsätzen, welche auseinander hervorgingen durch Vertauschung von

Punkt	Gerade,
Verbindungsgerade zweier Punkte	Schnittpunkt zweier Geraden,
Strecke	Winkel,
Punktreihe	Strahlenbüschel.

Diesen Gebilden, den Punkten und Geraden einer Ebene, entsprechen nun, wie sich in der Folge zeigt, im allseitig ausgedehnten Raum die durch einen Punkt gelegten Gebilde, Geraden und Ebenen, nämlich:

In einer Ebene:	Durch einen Punkt:
Punkt	Gerade
Gerade	Ebene
Punkte einer Geraden oder Punktreihe	Geraden einer Ebene oder Strahlenbüschel
Gerade durch einen Punkt oder Strahlenbüschel	Ebenen durch eine Gerade oder Ebenenbüschel
Strecke zweier Punkte	Winkel zweier Geraden
Winkel zweier Geraden	Winkel zweier Ebenen
Dreieck	Dreikant
Dreiseit	Dreiflach.

Es entsprechen somit nach der Reihe den 3 räumlichen Gebilden

Punkt — Gerade — Ebene

die Gebilde

Gerade — Ebene — Punkt,

sodafs jedes Gebilde jedem der beiden andern gegenüber stehen kann.

2. In Bezug auf die gegenseitige Lage dieser Gebilde entsprechen einander folgende Sätze:

a) *Zwei Punkte einer Ebene bestimmen eine Gerade in derselben.*

a') *Zwei Gerade durch einen Punkt bestimmen eine Ebene durch denselben.*

Vgl. I. Teil §. 3 und 4. Auch der Fall, dafs 2 Gerade parallel sind, ist unter a' zu rechnen, wie aus I. Teil §. 3 u. 4 folgt; daher ergiebt sich im Anschlufs an a':

b) *Zwei parallele Gerade bestimmen eine Ebene.*

Wir bezeichnen die durch 2 Gerade a und b bestimmte Ebene mit „Ebene ab.“

Es ist noch diejenige Lage zweier Geraden hervorzuheben, durch welche keine Ebene bestimmt werden kann, nämlich da die Geraden weder einander schneiden, noch parallel sind; man nennt solche Gerade windschief oder einander kreuzend.

3. a) *Eine Gerade und ein Punkt aufser derselben bestimmen eine einzige Ebene.*

a') *Eine Ebene und eine Gerade aufser derselben bestimmen einen einzigen Punkt, Schnittpunkt.*

Für a vgl. I. Teil §. 4. — Die Ebene und Gerade aufser ihr können nicht 2 Punkte gemeinsam haben, da in diesem Fall die Gerade nach 2 a ganz in die Ebene fallen müfste. Auch hier kann der Schnittpunkt in unmefsbare Entfernung hinausrücken, und wir behaupten:

b) *Eine Gerade aufser einer Ebene ist derselben parallel, wenn sie einer Geraden der Ebene parallel ist.*

Sind nämlich die Geraden a und b parallel und liege b allein in der Ebene β, so kann die Ebene ab mit β keinen Punkt aufser der Geraden b gemein haben, da sonst nach a beide Ebenen einander decken müfsten; somit hat auch die in ihrer ganzen Ausdehnung in der Ebene ab liegende Gerade a mit β keinen Punkt gemein.

4. *Zwei Gerade einer Ebene bestimmen einen Punkt derselben.*

4'. *Zwei Ebenen durch einen Punkt bestimmen eine Gerade, Schnittgerade, derselben.*

Für 4 vgl. I. Teil § 4, 2 b. — Gehen die beiden Ebenen α und β durch einen Punkt X, so liegen die Punkte von α teils auf der einen, teils auf der andern Seite (I. Teil §. 1, 2) von β; denn die Strahlen des Punktes X in der Ebene α werden in diesem Punkt in Halbstrahlen zerlegt, die auf den Gegenseiten der Ebene β liegen. Die Verbindungsgerade irgend zweier Punkte A_1 und A_2, welche in α auf verschiedenen Seiten von β liegen, schneidet β in einem Punkte Y (3 a'), der somit α und β angehört. Dann gehört aber auch die Gerade XY nach 2 a beiden Ebenen an. Ein Punkt aufser dieser Geraden kann beiden Ebenen nicht gemeinsam sein, da sie dann nach 3 a ganz zusammenfallen müfsten.

Fig. 1.

Die Schnittgerade von α und β bezeichnen wir mit $\alpha\beta$.

5. a) *Drei Schnittpunkte dreier Geraden bestimmen eine Ebene* (Vgl. I. Teil § 4, 1).

a′) *Drei Schnittgerade dreier Ebenen bestimmen einen Punkt, Schnittpunkt.*

Die drei Ebenen α, β, γ schneiden einander in 3 Geraden $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$. Die beiden, der Ebene α angehörigen Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\alpha$ mögen sich in dem Punkte P schneiden. Dieser Punkt gehört als Punkt der Geraden $\alpha\beta$ auch der Ebene β an und ebenso als Punkt von $\gamma\alpha$ der Ebene γ, somit auch der Schnittgeraden $\beta\gamma$, d. i. die Schnittgerade $\beta\gamma$ geht durch denselben Punkt mit den beiden ersteren Schnittgeraden.

Fig. 2.

Ist dagegen (Fig. 3) $\alpha\beta \parallel \gamma\alpha$, so kann auch $\beta\gamma$ nicht die Gerade $\alpha\beta$ oder $\gamma\alpha$ schneiden, da nach dem Vorangehenden andernfalls stets auch alle 3 Gerade durch denselben Schnittpunkt gehen müfsten, was der Annahme $\alpha\beta \parallel \gamma\alpha$ widerspricht. $\beta\gamma$ kann jedoch auch nicht windschief zu $\alpha\beta$ sein, da beide in β liegen, und ebenso auch nicht windschief zu $\gamma\alpha$. Daher ergiebt sich als besonderer Fall zu a′:

b) *Wenn bei drei, einander in 3 Geraden schneidenden Ebenen zwei Schnittgerade parallel sind, so ist die dritte Schnittgerade parallel zu jenen.*

6. Wir betrachten nun noch insbesondere die Fälle paralleler Lage. Es sei zunächst eine Gerade a und Ebene β (Fig. 3) parallel. Legen wir durch a irgend eine Ebene α, so kann dieselbe die Ebene β nur in einer Geraden $\alpha\beta$ schneiden, welche $\parallel a$ ist; denn beide Geraden a und $\alpha\beta$ liegen in der Ebene α und können einander nicht schneiden, da a mit β keinen Punkt gemein hat. Daraus folgt:

a) *Wenn eine Gerade und Ebene parallel sind, so schneidet eine Ebene durch erstere die andere Ebene in einer Parallelen zur Geraden.*

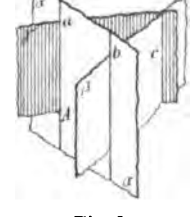


Fig. 3.

Ist $a \parallel \beta$ und $a \parallel \gamma$ (Fig. 4), so mufs eine Ebene durch a und einen Punkt der Schnittgeraden $\beta\gamma$ sowohl die Ebene β als γ in der zu a parallelen Geraden scheiden, d. h. $\beta\gamma$ mufs selbst diese Parallele sein.

b) *Wenn eine Gerade mit zwei einander schneidenden Ebenen parallel ist, so ist sie der Schnittgeraden parallel.*

7. Unter allen möglichen Lagen der Ebene α durch die zu β parallele Gerade a, welche durch eine Drehung der Ebene α um die Gerade a (I. Teil §. 4, 3) erreicht werden können, ist insbesondere der Fall hervorzuheben, dafs die Schnittgerade $\alpha\beta$ in unmefsbare Entfernung hinausrückt (entsprechend der Drehung der Geraden um

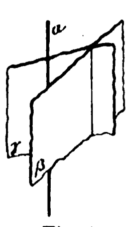


Fig. 4.

einen Punkt: I. Teil §. 3, 4). Als Grenzlage, der sich hierbei die Ebene nähert, ergiebt sich die zu β **parallele Ebene.** Parallele Ebenen werden auf folgende Weise bestimmt:

a) *Die Ebene durch zwei Strahlen eines Punktes, welche parallel einer Ebene sind, ist parallel zu dieser Ebene.*

Würden nämlich beide Ebenen einander schneiden, so müfste nach 6a die Schnittgerade beiden Strahlen parallel sein, was dem Parallelen-Axiom widerspricht. — Da die beiden Strahlen des Punktes aufgefafst werden können als Grenzlagen von Strahlen, deren beide Schnittpunkte mit der Ebene in unendliche Entfernung hinausrückten, so kann die Ebene durch diese Strahlen als Grenzlage der Ebene durch den Punkt aufgefafst werden, deren Schnittgerade mit der ersten Ebene (d. i. die Verbindungsgerade jener beiden Schnittpunkte) in unmefsbare Entfernung hinausrückte.

Werden die parallelen Ebenen α und β von einer dritten Ebene γ geschnitten, so können die Schnittgeraden $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ einander nicht schneiden, da sie parallelen Ebenen α und β angehören, und nicht kreuzen, da sie einer einzigen Ebene γ angehören; daraus folgt:

b) *Die Schnittgeraden zweier parallelen Ebenen mit einer dritten sind parallel,*

woraus dann weiter sich ergiebt:

c) *Durch einen Punkt ist eine zu einer Ebene parallele Ebene eindeutig bestimmt. Alle Geraden, durch einen Punkt parallel zu einer Ebene, liegen in einer Ebene.*

Fig. 5.

Gäbe es nämlich durch einen Punkt A 2 Ebenen α und α_1 parallel zu einer Ebene β, so müfsten deren Schnittgeraden $\alpha\gamma$ und $\alpha_1\gamma$ mit einer weiteren durch A gelegten Ebene γ parallel zu $\beta\gamma$ sein, was unmöglich ist.

8. *Wenn zwei Gerade einer dritten parallel sind, so sind sie es auch unter einander.*

Wenn nämlich (Fig. 3) $a \parallel c$ und $b \parallel c$, so schneiden einander die Ebenen ac, cb und bA, wobei A ein Punkt von a sei, in dreien zu einander parallelen Geraden, da die Schnittgeraden c und b parallel sind (5, b). Die dritte Schnittgerade a_1 mufs aber mit a zusammenfallen, da sie beide durch A gehen und parallel c sein sollen.

8'. *Wenn zwei Ebenen einer dritten parallel sind, so sind sie es auch unter einander.*

Sie könnnen keinen Punkt mit einander gemein haben, da dies 7c widersprechen würde.

9. Sind 2 parallele Ebenen und 2 parallele Gerade zwischen denselben gegeben, so wird durch diese und die Schnittgeraden ihrer Ebene mit ersteren Ebenen ein Parallelogramm bestimmt, woraus sich ergiebt: *Parallele Ebenen schneiden auf parallelen Geraden gleiche Strecken aus.*

§. 2. Der Ebenenwinkel oder Keil.

1. Zwei Ebenen stellen ein Gebilde dar, das dem Winkel zweier Geraden entspricht. Die Schnittgerade zweier Ebenen heifst Kante, wenn die beiden Ebenen in ihr einseitig begrenzt sind. Die beiden Halbebenen bilden einen Keil oder Ebenenwinkel.

Der Ebenenwinkel entsteht durch die Drehung der Halbebene um die Kante als Axe. Setzen wir im I. Teil §. 7 an Stelle des Halbstrahls die Halbebene, so lassen sich die dort gegebenen Erklärungen und Lehrsätze nun auf die Ebenenwinkel übertragen.

Durch die Drehung der Halbebene um die Kante erhalten wir gestreckte und volle Ebenenwinkel, sowie rechte, spitze und stumpfe. Insbesondere heifsen zwei Ebenen normal zu einander, wenn sie einen rechten Ebenenwinkel d. i. den vierten Teil des vollen Winkels bilden.

2. Wir heben hier die Sätze hervor:

a) *Nebenkeile bilden zusammen zwei Rechte.*

b) *Scheitelkeile sind einander gleich.*

c) *Durch eine Gerade einer Ebene gibt es immer nur eine Normalebene der letzteren.*

3. Alle durch eine Gerade gelegten Ebenen bilden einen Ebenenbüschel. Auf diesen lassen sich die Sätze des I. Teils §. 7, 8 übertragen.

Zweites Kapitel.

Symmetrie in Bezug auf eine Gerade.
Normale Lage zwischen Geraden und Ebenen.

§. 3. Die Umwendung um eine Axe.

1. Dreht man irgend ein Gebilde des Raumes um eine Axe OO', so dafs eine durch diese Axe gelegte und mit dem Gebilde fest verbundene Ebene $OO'A$ umgewendet wird (wobei die beiden Halbebenen der Axe ihre Lage vertauschen, s. I. Teil §. 4, 3), so nennt man die Figur in ihrer zweiten Lage axial-symmetrisch mit ersterer; die Vereinigung zweier solcher Gebilde nennen wir ein axiales Gebilde. — Fassen wir eine zweite Axenebene ins Auge, so ergiebt sich aus der Gleichheit der Scheitelkeile zwischen dieser und der ersteren Ebene, dafs auch sie hierbei umgewendet wird. Daraus folgt:

a) *Mit jedem Gebilde ist das axialsymmetrische in Bezug auf eine bestimmte Axe eindeutig bestimmt; beide Gebilde sind kongruent.*

b) *Die Gegenseiten jeder durch die Axe einseitig begrenzten Axenebenen entsprechen einander axialsymmetrisch.*

2. Es ist ersichtlich, dafs alle axialen Figuren einer Axenebene hierbei die im 3. Kapitel des I. Teils betrachteten Beziehungen der Lage haben:

a) *Die axialsymmetrische Figur zu jeder in einer Axenebene liegenden Figur liegt in derselben Ebene symmetrisch zur Axe. — Die Schnittpunkte axialsymmetrischer Geraden mit einer Axenebene, ebenso die Schnittgeraden axialsymmetrischer Ebenen mit einer Axenebene liegen in letzterer symmetrisch zur Axe.*

Insbesondere folgt hieraus (I. Teil § 10, 3):

b) *Zwei axialsymmetrische Punkte liegen auf einer Axennormale in gleicher Entfernung von der Axe.*

c) *Mit jeder Geraden, welche die Axe schneidet, ist eine solche axialsymmetrisch, welche die Axe im selben Punkt schneidet, mit ersterer Geraden und der Axe in einerlei Ebene liegt und mit der Axe denselben Winkel wie erstere macht.*

d) *Mit jeder Geraden parallel der Axe ist eine ebensolche in derselben Axenebene und in gleichem Abstand von der Axe axialsymmetrisch.*

3. Ferner schliefst sich an I. Teil §. 10, 3 der Satz an:

Eine Ebene durch zwei Axennormale eines Punktes der Axe ist sich selbst axialsymmetrisch. Es entsprechen einander in derselben diametrale Figuren in Bezug auf den Axenpunkt als Centrum.

Ist nämlich OO' die Axe und $OA \perp OO'$, $OB \perp OO'$, so werden beim Umwenden die Halbstrahlen OA und OB in ihre Gegenstrahlen OA_1 und OB_1 kommen (I. Teil §. 10, 2') und somit wird die Ebene beider Geraden in sich selbst fallen, wie dies bei einer halben Umdrehung einer Ebene in sich um den Punkt A als Centrum der Fall ist. Es gelten daher für axialsymmetrische Figuren dieser Ebene die im vierten Kapitel des I. Teils abgeleiteten Beziehungen.

Fig. 6.

§. 4. Normale Lage zwischen Gerade und Ebene.

1. Sind (Fig. 7) die Geraden AB und AC normal zu OA, so ist auch jeder weitere Halbstrahl AD der Ebene CAB axialsymmetrisch zu seinem Gegenstrahl AD_1 (§. 3, 3) und ferner mufs (§ 3, 2 c) $\sphericalangle DAO = OAD_1$ und somit $= R$ sein, d. h.

a) *Ist eine Gerade zu zwei Geraden einer Ebene normal, so ist sie auf allen durch ihren Schnittpunkt gehenden Geraden der Ebene normal.*

Gerade und Ebene heifsen in diesem Falle **normal** zu einander.

Umgekehrt folgt:

b) *Alle Geraden, welche in einem Punkt einer Geraden zu dieser normal sind, liegen in einer Ebene, der Normalebene des Punktes und der Geraden.*

Denn gäbe es aufserhalb dieser Normalebene BAC noch eine Normale AX durch den Punkt A zu der Geraden OA, so würde eine Ebene durch beide Geraden OA und AX die Normalebene BAC auch in einer Normalen AF zur Geraden OA schneiden; es würden sich also zwei Normale AX und AF zu einer Geraden OA durch einenPunkt A in einer Ebene OAX ergeben.

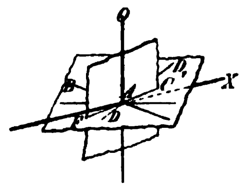


Fig. 7.

In ähnlicher Weise ist zu schliefsen:

c) *Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden nur eine Normalebene, zu einer Ebene nur eine Normalgerade.*

2. Dreht man eine Ebene α um eine Axe a, so wird eine in α liegende Normale b zur Axe ebenfalls eine Drehung in einer zur Axe normalen Ebene machen, welche vollständig der Drehung der Ebene entspricht; d. i. einer halben oder vollen Undrehung der Ebene entspricht eine halbe oder volle Umdrehung der Geraden; gleichen Winkeln der Ebenen entsprechen gleiche Winkel der Normalen zur Axe in den Ebenen, da bei der Drehung des Ebenenwinkels um die Kanten nicht blos die Ebenen, sondern auch die entsprechenden Normalen zur Deckung gebracht werden können, kurz:

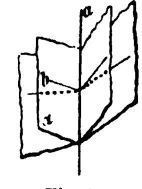


Fig. 8.

Der Winkel zweier Ebenen wird gemessen durch den Winkel zweier Geraden dieser Ebenen, welche in einem Punkt der Kante zu letzterer normal sind.

3. Daraus ergiebt sich sofort der Satz:

a) *Jede Ebene durch eine Normale einer Ebene ist selbst normal zu dieser.*

Ist nämlich die Gerade a normal zu der Ebene β und durch a die Ebene α gelegt, so ist $a \perp \alpha\beta$; somit ist a der eine Schenkel des Winkels beider Ebenen; auf dem in β liegenden Schenkel $b \perp \alpha\beta$ steht aber a ebenfalls normal; daher ist $\sphericalangle ab$ d. i. der Ebenenwinkel $= R$.

Es ist nur eine andere Fassung dieses Satzes, wenn wir sagen:

b) *Jede Normalebene zu einer Geraden einer Ebene ist zu dieser Ebene normal.*

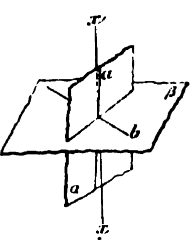


Fig. 9.

Nehmen wir umgekehrt an, es sei $\alpha \perp \beta$ und a liege in α, so daſs $a \perp \alpha\beta$, so ist auch $a \perp \beta$. Denn diese Gerade ist der eine Schenkel des Winkels beider Ebenen und bildet also auch mit dem zweiten der Ebene β angehörigen Schenkel dieses Winkels einen R, da $\alpha \perp \beta$; daher folgt nach 1a $a \perp \beta$; d. h.:

c) *Die Gerade, welche innerhalb einer von zweien zu einander normalen Ebenen auf deren Schnittgeraden normal ist, ist auch normal zur andern Ebene.*

Eine weitere Umkehrung ergiebt sich aus der Annahme, daſs $\alpha \perp \beta$ und daſs in einem Punkt von $\alpha\beta$ die Gerade x normal zu β gezogen ist. Alsdann muſs x in die Ebene α fallen. Denn die Ebene durch x und $\alpha\beta$ muſs normal zu β sein (nach a) und da es durch $\alpha\beta$ nur eine Normalebene zu β giebt (§. 2, 2c), so muſs die Ebene α mit der Ebene x, $\alpha\beta$ identisch sein, d. h.:

d) *Die Gerade, welche in einem Punkt der Schnittgeraden zweier zu einander normalen Ebenen zu einer dieser Ebenen normal ist, fällt in die andere Ebene,*
woraus dann weiter zu schlieſsen ist:

e) *Zwei Normalebenen zu einer Ebene schneiden einander in einer Normalgeraden der Ebene:*
denn diese Normale muſs nach d) den Normalebenen angehören.

Zusatz. Sind die Geraden OB und OC normal zu OA und auch normal zu einander, $OB \perp OC$, so bestimmen sie drei zu einander normale Ebenen, welche den Raum in acht gleiche Oktanten teilen, wie die Ebene durch zwei zu einander normale Gerade in vier Quadranten geteilt wird.

4. Fällt man von einem Punkt A einer Geraden a, welche zu einer Ebene β geneigt ist, die Normale a_1 zu β, so ist die Ebene aa_1 normal zu β. Eine zweite Normalebene zu β kann durch a nicht gelegt werden, da die Schnittgerade zweier Normalebenen nicht geneigt zur Ebene sein kann. Somit gilt der Satz:

Durch eine zu einer Ebene nicht normale Gerade giebt es nur eine Normalebene der ersteren.

5. Wenn man von einem Punkt A innerhalb des Winkels zweier Ebenen α und β Normale zu diesen zieht, $p \perp \alpha$, $n \perp \beta$, so ist die Ebene pn zu beiden Ebenen normal, daher auch zur Schnittgeraden $\alpha\beta$; schneidet nun die Ebene pn die Ebene α in a und β in b, so bestimmt also $\sphericalangle\, ab$ den Ebenenwinkel $\alpha\beta$. Nun ist aber in dem Viereck $pnba$ $\sphericalangle\, pa = nb = R$, somit $\sphericalangle\, pn + ab = 2R$, d. h.:

Der Winkel der Normalstrecken, welche von einem Punkt innerhalb eines Ebenenwinkels zu den Ebenen gezogen sind, ergänzt den Ebenenwinkel zu 2R.

Fig. 10.

§. 5. Zusammenhang zwischen paralleler und normaler Lage.

1. *Wenn eine von zwei parallelen Geraden zu einer dritten Geraden ihrer Ebene normal ist, so ist es auch die andere.*

1'. *Wenn eine von zwei parallelen Ebenen zu einer dritten Ebene normal ist, so ist es auch die andere.*

Der erste dieser Sätze gehört der Planimetrie an (I. Teil §. 11, 4b). Im zweiten Fall sei $\alpha \parallel \alpha'$, $\alpha \perp \gamma$. Man ziehe in γ $c \perp \alpha$ und lege durch c irgend eine Ebene γ', so ist $\alpha\gamma' \parallel \alpha'\gamma'$ (§. 1, 7b) und da $c \perp \alpha\gamma'$, so ist auch $c \perp \alpha'\gamma'$, also $c \perp \alpha'$, $\gamma \perp \alpha'$ (§. 4, 3b).

Fig. 11.

2. *Zwei normale Gerade zu einer Ebene sind parallel.*

Ist $a \perp \gamma$, $a' \perp \gamma$ und sind F und F' die Schnittpunkte, so ist die Ebene $aF' \perp \gamma$ und $a'F \perp \gamma$, beide letzteren Ebenen fallen zusammen (nach §. 2, 2c), da FF' gemeinsam. Da nun in dieser Ebene $a \perp FF'$ und $a' \perp FF'$, so ist $a \parallel a'$.

2'. *Zwei Normalebenen zu einer Geraden sind parallel.*

Ist $\alpha \perp c$ und $\alpha' \perp c$, so ist für irgend eine Ebene γ durch c $\alpha\gamma \perp c$, $\alpha'\gamma \perp c$, somit $\alpha\gamma \parallel \alpha'\gamma$. Dasselbe gilt für eine zweite Ebene γ' durch c; daher ist (nach §. 1, 7a) $\alpha \parallel \alpha'$.

Zusatz. Zwei $\parallel$ Ebenen haben überall denselben Normalabstand (§. 1, 9); man nennt diesen den Abstand der parallelen Ebenen.

3. *Wenn eine von zwei parallelen Geraden zu einer Ebene normal ist, so ist es auch die andere.*

Ist $a \parallel a'$ und $a \perp \gamma$, so ist die Ebene $aa' \perp \gamma$ und a' normal zur Schnittgeraden beider Ebenen; daher $a' \perp \gamma$ (nach §. 4, 3c.)

3'. *Wenn eine von zwei parallelen Ebenen zu einer Geraden normal ist, so ist es auch die andere.*

Ist $\alpha \parallel \alpha'$ und $\alpha \perp c$, so ist für irgend eine Ebene γ durch c $\alpha\gamma \parallel \alpha'\gamma$ und $\alpha\gamma \perp c$, somit $\alpha'\gamma \perp c$; dasselbe gilt für eine zweite Ebene γ', daher $c \perp \alpha'$ (nach §. 4, 1a.)

4. Der Zusammenhang zwischen paralleler und normaler Lage wird noch durch folgende leicht zu erweisende Sätze ausgedrückt:

a) *Wenn eine Gerade und eine Ebene außer ihr normal zu einer Geraden sind, so sind erstere parallel.*

b) *Wenn von zwei Strahlen der eine parallel, der andere normal zu einer Ebene ist, so sind sie unter einander normal.*

a') *Wenn eine Ebene und eine Gerade außer ihr normal zu einer Ebene sind, so sind erstere parallel.*

b') *Wenn von zwei Ebenen die eine parallel, die andere normal zu einer Geraden ist, so sind sie unter einander normal.*

§. 6. Normalprojektion auf einer Ebene.

1. Fällt man von einem Punkte A außerhalb einer Ebene β die Normale zu dieser, so nennt man den Fußpunkt F derselben die Normalprojektion des Punktes auf der Ebene.

a) *Die Strecke zwischen einem Punkte und seiner Normalprojektion auf einer Ebene ist der kürzeste Abstand zwischen dem Punkt und den Punkten der Ebene.*

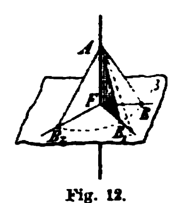


Fig. 12.

Sie heißt kurz der Abstand des Punktes von der Ebene.

Ist nämlich $AF \perp \beta$ und B_1 ein weiterer Punkt von β, so ist $\sphericalangle AFB_1 = R$, somit $AB_1 > AF$.

b) *Die Verbindungsstrecken eines Punktes außerhalb einer Ebene mit Punkten derselben, welche gleichweit von der Normalprojektion des ersteren entfernt sind, sind einander gleich, und umgekehrt.*

c) *Von zwei Verbindungsstrecken eines Punktes außerhalb einer Ebene mit zwei Punkten derselben ist diejenige die größere, deren Endpunkt von der Normalprojektion jenes Punktes weiter entfernt ist, und umgekehrt.*

Ist nämlich $AF \perp \beta$ und in β $FB_1 = FB_2$, so bleibt bei einer Drehung von AFB_1 um AF die Gerade FB_1 in der Ebene α (§. 4, 1b) und kommt nach FB_2, so daß dann auch AB_1 und AB_2 einander decken.

Ist dagegen $FB_1 < FB_2$, so bildet nach dieser Drehung FB_1 nur einen Teil von FB_2 und es muß nach I. Teil §. 30, 3 auch $AB_1 < AB_2$ sein.

Umgekehrt folgt aus $FB_1 \gtreqless FB_2$, daß $AB_1 \gtreqless AB_2$ ist, da jeder dieser drei letzteren Fälle jeweils nur mit der entsprechenden ersteren Bedingung nach den oben angeführten Sätzen zusammenbestehen kann.

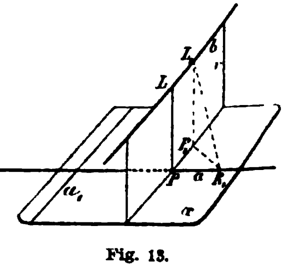


Fig. 13.

Zusatz. Sind a und b zwei windschiefe Gerade und legt man durch einen Punkt von a die Gerade $a_1 \parallel b$, so ist die Ebene $aa_1 \parallel b$; die Normalebene ν durch b zu dieser Ebene schneidet a in einem Punkte P, dessen Normale PL zur Geraden b den kürzesten Abstand zwischen den Windschiefen a und b gibt ($L_1R_1 > L_1P_1$).

2. Legt man durch eine Gerade a, welche nicht normal zu einer Ebene β ist, die zu β normale Ebene α, so nennt man die Schnittgerade b die Normalprojektion der Geraden a auf die Ebene β.

Der Winkel der Geraden a mit ihrer Normalprojektion b wird der Neigungswinkel der Geraden und Ebene genannt.

Trifft die Gerade AF die Ebene β in F und ist B die Normalprojektion von A, FX eine Gerade in β, wobei $FX = FB$ sei, so sind in den Dreiecken AFB und AFX zwei Seitenpaare übereinstimmend, während die dritten Seiten ungleich $AX > AB$; daher ist nach I. Teil §. 35, 5b $\sphericalangle AFX > AFB$, d. h.:

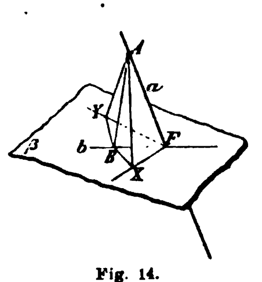


Fig. 14.

a) *Der Neigungswinkel einer Geraden und einer Ebene ist kleiner als der Winkel der Geraden mit irgend einer Geraden der Ebene.*

Wird in β noch $\sphericalangle BFY = XFB$ und $FY = FX$ gemacht, so folgt aus der Symmetrie der in β liegenden Figur, dafs $BX = BY$ und somit auch (1b) $AY = AX$, woraus dann die Kongruenz der Dreiecke AFX und AFY und die Gleichheit der ebensobezeichneten Winkel folgt; d. h.:

b) *Zwei Gerade einer Ebene, welche mit dem einen Schenkel des Neigungswinkels einer Geraden im Schnittpunkt gegenwendig gleiche Winkel bilden, schliefsen auch mit dem andern Schenkel gleiche Winkel ein.*

Für den Fall, dafs $\sphericalangle XFB = BFY = R$, also XFY eine Gerade, folgt hieraus, dass auch $\sphericalangle XFA = AFY = R$; allgemein:

c) *Die Gerade, welche im Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene zu dem einen Schenkel des Neigungswinkels desselben normal ist, ist es auch zu dem andern Schenkel.*

Auch ein dem Satze 1c entsprechender Satz über ungleiche Winkel läfst sich hier anschliefsen.

Zusatz. a) Dreht sich die Gerade FB um den Punkt F in der Ebene β, so nimmt der Winkel dieser Geraden mit AF alle Werte an, die zwischen $\sphericalangle AFB$ und $(2R - AFB)$ liegen.

b) Ist $b \parallel \alpha$ (Fig. 13) und durch b die Ebene $\nu \perp \alpha$ gelegt, so ist $\alpha\nu \parallel b$ und den Abstand dieser Parallelen nennt man den Abstand der Geraden und der Ebene.

3. Die Normalprojektion einer Strecke AB auf einer Ebene β ist die Verbindungsstrecke A_1B_1 der Normalprojektionen ihrer Grenzpunkte. Ist α der Neigungswinkel der Geraden und Ebene, so folgt $A_1B_1 = AB \cdot \cos\alpha$.

a) *Die Normalprojektion einer Strecke auf einer Ebene ist gleich dem Produkt der Strecke mit dem Cosinus des Neigungswinkels.*

Die Projektion einer Strecke ist somit um so kleiner, je gröfser der Neigungswinkel; sie schrumpft zu einem Punkt zusammen, wenn die Strecke zur Ebene normal wird; sie ist der Strecke selbst gleich, wenn diese der Ebene parallel ist.

Unter der Normalprojektion einer begrenzten Fläche auf eine Ebene versteht man die Fläche, welche von den Projektionen der Grenzlinien begrenzt ist. (Fig. 15.)

Ist von einem Dreieck in der Ebene α eine Seite a parallel dem Schnitt $\alpha\beta$ zwischen der Ebene α und β, so ist die Höhe h zu dieser Seite des Dreiecks parallel dem in α liegenden Schenkel des Ebenenwinkels $\alpha\beta$; daher ist der Neigungswinkel zwischen der Höhe h und der Ebene β gleich dem Ebenenwinkel $\alpha\beta$ und die Projektion h' der Höhe $= h \cdot \cos(\alpha\beta)$; der Flächeninhalt der Projektion des Dreiecks ist somit, da a auch in der Projektion $= a$ bleibt, $\frac{ah}{2}\cos(\alpha\beta)$. Für die Flächeninhalte J und J_1 des ursprünglichen Dreiecks und seiner Projektion gilt daher $J_1 = J \cdot \cos(\alpha\beta)$. Diese Gleichung läfst sich als giltig für jede beliebig begrenzte Figur nachweisen, indem man eine solche Fläche stets in Dreiecke zerlegen kann, deren Grundseiten $\| \alpha\beta$ liegen und deren Höhen unter einander parallel, so dafs dann das Verhältnis der Inhalte dieser Dreiecke zu denen ihrer Projektionen gleich $\cos(\alpha\beta)$ ist. Daraus ergiebt sich (II. Teil, §. 3, 2d):

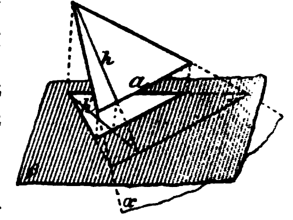


Fig. 15.

b) *Die Normalprojektion einer Fläche ist gleich dem Produkt der Fläche mit dem Cosinus des Ebenenwinkels.*

§. 7. Axiale Flächen oder Rotationsflächen.

*1. Bei einer vollen Umdrehung einer ebenen Figur um eine Gerade ihrer Ebene als Axe beschreibt jede Linie eine sogenannte Rotationsfläche. Dieselbe ist axial, da jeder Lage der Linie eine zweite Lage nach der halben Umdrehung entspricht.

Eine zur Axe normale Gerade beschreibt eine Normalebene; es kann daher auch die Ebene eine Rotationsfläche genannt werden.

Zieht man von irgend einem Punkt der sich drehenden ebenen Figur die Normalstrecke zur Axe, so bleibt diese Strecke in der Normalebene, woraus folgt:

Eine Rotationsfläche wird von jeder Normalebene zur Axe in einer Kreislinie geschnitten, deren Mittelpunkt in der Axe liegt.

A. Rotationskegelfläche.

2. Eine Gerade, welche die Axe schneidet, beschreibt bei der Rotation um die Axe eine Rotations-Kegelfläche. Der Entstehung der Ebene entsprechend, wie sie im I. Teil §. 4, 1 gegeben wurde, kann man diese Kegelfläche entstanden denken, indem eine Gerade (Erzeugende) in einem Punkt fest bleibt und dabei auf einem Kreis

(der sog. Leitlinie) hingleitet, welcher um die Normalprojektion des Punktes auf einer Ebene beschrieben ist. Der Axenpunkt, d. i. der feste Punkt heifst die Spitze oder der Mittelpunkt der Kegelfläche; jede Gerade durch sie längs der Kegelfläche heifst Seitengerade. Beiderseits der Spitze liegen zwei kongruente Teile der Fläche (letztere wird deshalb häufig Doppelkegel genannt). Aus der Entstehung folgt:

a) *Alle Seitengeraden einer Rotationskegelfläche bilden mit der Axe gleiche Winkel.*

Eine Gerade durch die Spitze, welche einen kleineren Winkel mit der Axe bildet, liegt innerhalb des von der Fläche eingeschlossenen Raumes, eine mit gröfserem Winkel aufserhalb.

Von den Ebenen durch die Spitze wird diejenige, welche zugleich durch die Axe geht, Axenschnitt genannt. Dieselbe schneidet die Kegelfläche in 2 einander gegenüberliegenden Seitengeraden, deren Winkel als Winkel des Axenschnittes bezeichnet wird.

Eine Ebene durch die Spitze, deren Winkel mit der Axe gröfser ist, als der zwischen der Axe und der Seitengeraden, trifft die Kegelfläche nur in der Spitze (Fig. 16a). Dagegen gilt für die Ebene XSY (Fig. 16b):

b) *Eine Ebene durch die Spitze, deren Winkel mit der Axe kleiner ist, als der der Seitengeraden, schneidet die Kegelfläche in zwei Seitengeraden.*

Ist der Neigungswinkel der Axe und Ebene gleich dem Winkel der Kegelfläche (Ebene SL in Fig. 16c), so hat die Ebene mit der Kegelfläche nur die Projektion der Axe auf die Ebene gemeinsam; die beiden Schnittgeraden sind in diesem Falle in Eine zusammengerückt.

c) *Eine Ebene durch die Spitze einer Rotationskegelfläche, welche mit der Axe denselben Winkel bildet wie die Seitengerade, berührt die Kegelfläche längs einer Seitengeraden.*

Die Ebene heifst Berührungs- oder Tangentialebene der Kegelfläche. Alle Geraden dieser Ebene, welche die genannte Seitengerade schneiden, berühren die Kegelfläche in diesem Schnittpunkt.

Jede, nicht durch die Spitze gelegte Ebene schneidet die Kegelfläche in einer krummen Linie, welche man Kegelschnitt nennt und zwar kann man 3 Arten derselben unterscheiden: 1) Die Ebene trifft alle Seitengeraden einerseits der Spitze; dann heifst der Kegelschnitt Ellipse (Fig. 16a). Der zur Axe normale Kreisschnitt ist ein besonderer Fall hiervon. 2) Die Ebene ist parallel einer Seitengeraden (Fig. 16c); alle andern Seitengeraden werden also von der Ebene getroffen; man sagt dann von dem Kegelschnitt, er habe einen unendlich fernen Punkt; er heifst Parabel. 3) Die Ebene ist parallel zu zwei Seitengeraden (Fig. 16b); sie trifft hierbei die beiden Teile der Kegelfläche, indem jede Seitengerade aufser den beiden genannten entweder einerseits oder andrerseits

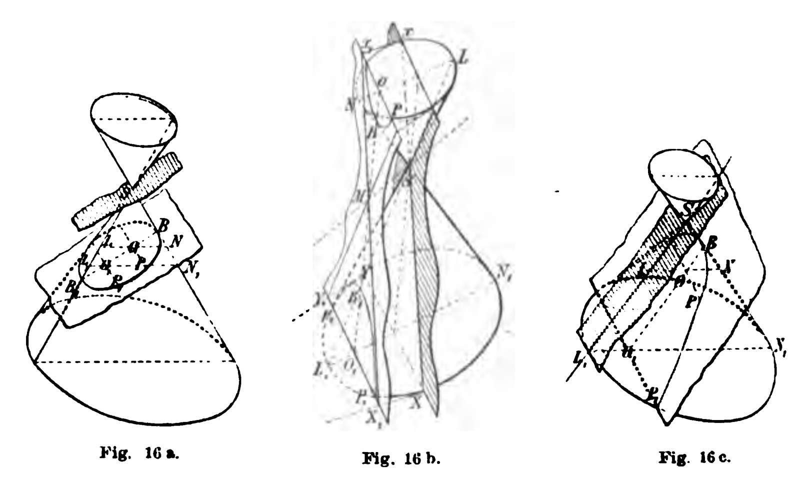


Fig. 16 a. Fig. 16 b. Fig. 16 c.

der Spitze getroffen werden; man sagt von dieser Kurve, sie habe zwei unendlich ferne Punkte nach der im I. Teil §. 3, 4 gegebenen Auffassung zweier parallelen Geraden; sie heifst Hyperbel.

In diesen 3 Fällen ist der Winkel der Schnittebene und Axe der Reihe nach gröfser, gleich, kleiner, als der Winkel zwischen der Seitengeraden und Axe.

Die durch die Spitze gelegte Normalebene zur Kegelschnittebene bestimmt in dieser die sogen. Hauptaxe BB_1 des Kegelschnitts.

Ziehen wir durch 2 Punkte P und P_1 des Kegelschnittes die Normalen PO, P_1O_1 zur Hauptaxe BB_1, so lassen sich durch diese Normale noch Ebenen normal zur Kegelaxe legen. Diese Ebenen schneiden den Kegel in Kreisen, in welchen die der Axenebene SBB_1 angehörigen Durchmesser LN und L_1N_1 ebenfalls normal zu PO und P_1O_1 sind. Es folgt hieraus, dafs

$$\frac{\overline{PO}^2}{\overline{P_1O_1}^2} = \frac{\overline{LO}\cdot\overline{ON}}{\overline{L_1O_1}\cdot\overline{O_1N_1}} = \frac{\overline{B_1O}}{\overline{B_1O_1}}\cdot\frac{\overline{BO}}{\overline{O_1B}}$$

bezw. in der Parabel $\frac{\overline{PO}^2}{\overline{P_1O_1}^2} = \frac{\overline{BO}}{\overline{BO_1}}$, da hier $LO = L_1O_1$.

d) *In einer Ellipse oder Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweier Ordinaten der Hauptaxe, wie die Produkte der zugehörigen Abschnitte der letzteren, in einer Parabel wie die zugehörigen Abschnitte der Axe.*

Legen wir im Fall des Hyperbelschnittes durch die Spitze S eine Ebene XSY (Fig. 16 b) parallel der Schnittebene und in den Seitengeraden SX und SY, in welchen der Kegel von dieser Ebene geschnitten wird, die Tangentialebenen an die Kegelfläche, so schneiden diese die Hyperbelebene in 2 Geraden $MX_1 \parallel SX$ und $MY_1 \parallel SY$. Wo nun auch der Punkt

P_1 auf der Hyperbel angenommen wird, so trifft die Ordinate O_1P_1 die Gerade O_1X_1 in einem Punkt X_1, von welchem die Strecke X_1X nach dem Berührungspunkt X des zugehörigen Kegelkreises stets dieselbe Gröfse hat, da diese Strecken stets Parallelstrecken zwischen Parallelen sind. Schneidet die Gerade O_1P_1 den Kegelkreis noch in P_2, so ist $\overline{X_1X}^2 = \overline{X_1P_1} \cdot \overline{X_1P_2}$ eine konstante Gröfse; es mufs daher $X_1P_1 = \frac{\overline{XX_1}^2}{X_1P_2}$ um so kleiner werden, je weiter der Punkt P_1 von der Spitze S oder dem Punkte M hinausrückt, da der Nenner dieses Bruches dann stets gröfser wird; dasselbe gilt für Y_1P_2. Die Hyperbel nähert sich daher mehr und mehr den Geraden MX_1 und MY_1, ohne sie je zu erreichen. Man nennt diese Geraden die Asymptoten der Hyperbel; sie sind als die Tangenten in den unendlich fernen Punkten der Hyperbel aufzufassen. Dafs die Asymptoten durch den Mittelpunkt der Hauptaxe gehen, ergiebt sich daraus, dafs zu SL_1 und SN_1 der Strahl nach dem Schnittpunkt der Tangenten XX_1, YY_1 und der Strahl parallel BB_1 harmonisch zugeordnet sind.

B. Rotationscylinderfläche.

3. Eine zur Axe parallele Gerade beschreibt bei der vollen Umdrehung eine Rotationscylinderfläche (Fig. 17). Dieselbe entsteht auch, indem eine Gerade (Erzeugende) normal zu einer Kreisfläche an der Peripherie des Kreises hingleitet. Die Cylinderfläche unterscheidet sich unmerklich von einer Kegelfläche, deren Spitze in unmefsbar grofse Entfernung hinausgerückt ist. Es ergiebt sich leicht:

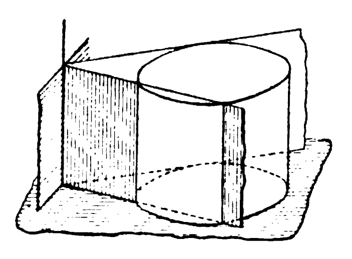


Fig. 17.

a) *Alle Seitengeraden der Rotationscylinderfläche sind parallel und haben von der Axe den gleichen Abstand.*

Man nennt diesen Abstand den Radius der Rotationscylinderfläche.

Eine parallele Gerade in geringerem Abstand liegt innerhalb der Cylinderfläche, eine weiter entfernte aufserhalb. Daher folgt:

b) *Eine Ebene parallel der Axe, deren Abstand von dieser kleiner ist als der der Seitengeraden, schneidet die Rotationscylinderfläche in 2 Seitengeraden.*

Denn die durch einen Schnittpunkt parallel zur Axe gezogene Gerade mufs sowohl der Ebene, als der Cylinderfläche angehören. Ebenso folgt:

c) *Eine Ebene parallel der Axe, deren Abstand von der Axe gleich dem der Seitengeraden der Rotationscylinderfläche, berührt letztere in der Projektion der Axe auf der Ebene.*

Alle nicht parallel der Axe gelegten Ebenen treffen die Seitengeraden der Cylinderfläche je in einem Punkt. Die Schnittkurve wird

Ellipse genannt gemäfs der oben angegebenen Übereinstimmung zwischen Cylinder- und Kegelfläche.

C. Kugel.

4. Eine Kreislinie beschreibt schon bei einer halben Umdrehung um eine durch das Centrum gelegte Gerade als Axe eine Rotationsfläche, welche Kugelfläche genannt wird (Fig. 18).

Da der Abstand der Punkte der Kreislinie bei der Rotation sich nicht ändert, so folgt:

a) *Alle Punkte der Kugelfläche haben den gleichen Abstand vom Mittelpunkt.*

Diese Strecke heifst Kugelradius oder Halbmesser der Kugel. Zwei gegengerichtete Kugelradien vereint bilden einen Durchmesser der Kugel; die beiden Grenzpunkte eines solchen heifsen diametral.

Jeder Punkt, welcher dem Mittelpunkt näher liegt, als ein Kugelpunkt, liegt innerhalb der Kugelfläche, jeder weiter entfernte aufserhalb derselben.

b) *Alle Ebenen durch den Kugelmittelpunkt schneiden die Kugel in Kreisen, deren Radius gleich dem Kugelradius ist.*

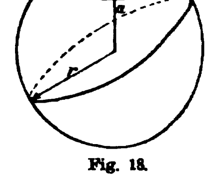


Fig. 18.

Denn alle Punkte der Schnittlinie sind vom Mittelpunkt der Kugel um den Kugelradius entfernt.

Man kann nun jeden solchen Schnittkreis als erzeugenden Kreis der Kugel und einen Durchmesser desselben als Axe betrachten; jede Ebene normal durch einen Durchmesser mufs daher (1) als Schnittlinie einen Kreis ergeben, d. h.:

c) *Jede durch eine Kugel gelegte Ebene schneidet diese in einem Kreis, dessen Mittelpunkt die Normalprojektion des Kugelmittelpunktes auf der Schnittebene ist.*

Man nennt die Grenzpunkte des Durchmessers, welcher die Axe bildet, Pole, jede Lage des erzeugenden Halbkreises Meridian und die Schnittkreise der zur Axe normalen Ebenen Parallelkreise, insbesondere den durch den Kugelmittelpunkt gelegten den Äquator. Derselbe halbiert alle Meridiane; überhaupt sind alle Meridianbögen zwischen 2 Parallelkreisen einander gleich. Für die Parallelkreise ergiebt sich:

d) *Je gröfser der Abstand einer Ebene vom Mittelpunkt ist, desto kleiner ist der Radius des Schnittkreises.*

Ist nämlich (Fig. 18) r der Kugelradius, ϱ der Radius des Schnittkreises, und a der Abstand der Schnittebene vom Kugelmittelpunkt, so ist

$\varrho = \sqrt{r^2 - a^2}$. Ist $a = 0$, so erlangt $\varrho = r$ seinen gröfsten Wert. Man nennt daher die Schnittkreise der Ebenen des Kugelmittelpunkts gröfste Kreise oder Hauptkreise der Kugel. Der Schnittkreis schrumpft zu einem Punkt zusammen, wenn $a = r$ wird, m. a. W.:

e) *Eine zu einem Radius in dessen Endpunkt errichtete Normalebene berührt die Kugel in diesem Punkt.*

Eine durch den Berührungspunkt gehende Gerade dieser Berührungsebene oder Tangentialebene heifst Berührungsgerade oder Tangente der Kugel. Legt man durch eine solche Tangente eine Ebene, so berührt die Tangente auch deren Schnittkreis und umgekehrt ist eine Tangente eines Schnittkreises auch Tangente an der Kugel. Man erhält eine Tangentialebene auch mittels zweier Tangenten eines Punktes der Kugel.

Fig. 19.

5. Wenn ein Kreis und eine Tangente desselben um einen Durchmesser rotiert, so beschreibt der Kreis eine Kugel-, die Tangente eine Kegelfläche, deren Spitze in dem Schnittpunkt der Tangente mit der Verlängerung des Durchmessers liegt und deren Seitengeraden die Kugelfläche berühren, so dafs die Kegelfläche mit der Kugelfläche nur den vom Berührungspunkt beschriebenen Kreis gemeinsam hat. Man erhält so eine die Kugel berührende Kegelfläche.

Ist eine Kugel und ein Punkt S aufser ihr gegeben, so läfst sich durch den Punkt immer eine Tangente ziehen und durch Rotation um die Centrale des Punktes erhält man die Gesamtheit aller Tangenten von dem Punkt an die Kugel, d. h.:

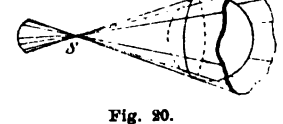


Fig. 20.

a) *Alle Tangenten von einem Punkt an eine Kugel bilden eine Rotationskegelfläche, welche jenen Punkt als Spitze hat und die Kugel in einer Kreislinie berührt, deren Ebene normal zur Centrale des Punktes ist.*

Daraus folgt weiter:

b) *Alle Tangentenstrecken von einem Punkt an eine Kugel sind einander gleich.*

Es ergiebt sich dies auch aus dem leicht durch Schnittkreise nachweisbaren Satz (II. Teil, § 9, 4b):

c) *Für jede Sehne auf einem Strahl eines Strahlenbündels in der Kugel ist das Produkt der vom Scheitel gebildeten Abschnitte das gleiche und zwar, wenn der Punkt innerhalb liegt, gleich dem Quadrat des Radius des zum Durchmesser des Punktes normal gelegten Schnittkreises, dagegen wenn der Punkt aufserhalb liegt, gleich dem negativen Quadrat der Tangente des Punktes an die Kugel.*

Dies Produkt heifst Potenz des Punktes in Bezug auf die Kugel.

6. Wenn eine Kreistangente demjenigen Durchmesser parallel ist, um welchen die Rotation des Kreises und der Tangente stattfindet, so beschreibt letztere eine die Kugel in einem Hauptkreis berührende Cylinderfläche.

Alle parallelen Tangenten einer Kugel bilden eine Rotationscylinderfläche, deren Axe der zu den Tangenten parallele Durchmesser ist und welche die Kugel in einem gröfsten, zur Tangente normal liegenden Kreise berührt.

Fig. 21.

7. Wenn zwei Kreise um ihre gemeinsame Centrale rotieren, so entstehen zwei Kugeln und für diese ergiebt sich aus I. Tl. §. 25:

a) *Zwei Kugeln schneiden einander in einem zur gemeinsamen Centrale normalen Schnittkreis, wenn ihr Centralabstand kleiner als die Summe und gröfser als die Differenz ihrer Radien ist.*

b) *Zwei Kugeln berühren einander in einem Punkt ihrer gemeinsamen Centrale, wenn ihr Centralabstand gleich der Summe der Radien (bei ausschliefsender Berührung) oder gleich deren Differenz (bei einschliefsender Berührung).*

8. In eine Rotationskegelfläche (oder Rotationscylinderfläche) lassen sich, wie aus 5 und 6 folgt, unbegrenzt viele berührende Kugeln legen, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen. Soll aber auch noch irgend eine nicht durch die Spitze der Kegelfläche gehende Ebene von der Kugel in einem Punkte berührt werden, so erfüllen nur 2 Kugeln die gestellten Bedingungen. Diese Kugeln werden nämlich erhalten, indem man die beiden Kreise konstruiert, welche in der zur gegebenen Ebene normalen Axenebene die Seitengeraden der Rotationsfläche und die Schnittgerade der gegebenen Ebene berühren, und dann diese Kreise rotieren läfst. Der Berührungspunkt zwischen dem Kreis und dieser Schnittgeraden ist dann auch Berührungspunkt zwischen der Kugel und der Ebene, da alle andern Punkte der Ebene weiter als er vom Mittelpunkt des Kreises entfernt sind.

Dieser Berührungspunkt F wird der **Brennpunkt** des Kegelschnitts der Ebene genannt. Der Abstand eines Punktes P des Kegelschnitts von einem Brennpunkt, der **Fahrstrahl** FP des Punktes P, ist gleich der Strecke PA der Seitengeraden der Kegelfläche von demselben Punkt bis zu ihrem Berührungspunkt A auf der Kugel (5 b). Bei der Ellipse ist daher die Summe der beiden Strecken von dem Punkt P nach den beiden Brennpunkten F und F_1, also $PF + PF_1 = AA_1$, d. i. gleich der Seitenstrecke von dem Berührungspunkt der einen Kugel bis zu dem der andern. Diese ist aber nach I. Teil §. 37, Zus. 3 gleich der durch die Brennpunkte gehenden Sehne BB_1, d. h. gleich der **Hauptaxe** der Ellipse.

Bei der Hyperbel liegen die berührenden Kugeln beiderseits der Spitze, so dafs hier die Differenz der beiden Fahrstrahlen eines Punktes $PF - PF_1$ gleich der Seitenstrecke AA_1 zwischen beiden Berührungskreisen der Kugeln und der Kegelfläche ist.

In der Ellipse ist die Summe, in der Hyperbel die Differenz der Fahrstrahlen von den Brennpunkten nach einem Punkt des Kegelschnitts konstant, nämlich gleich der Hauptaxe desselben.

Dafs beide Brennpunkte von den sogen. Scheiteln B und B_1, den Grenzpunkten der Hauptaxe, gleichweit entfernt sind, folgt aus Teil I, §. 37, Zus. 2.

Sind von einem Kegelschnitt die Hauptaxe und die Brennpunkte gegeben, so können hiernach leicht Punkte desselben konstruiert werden.

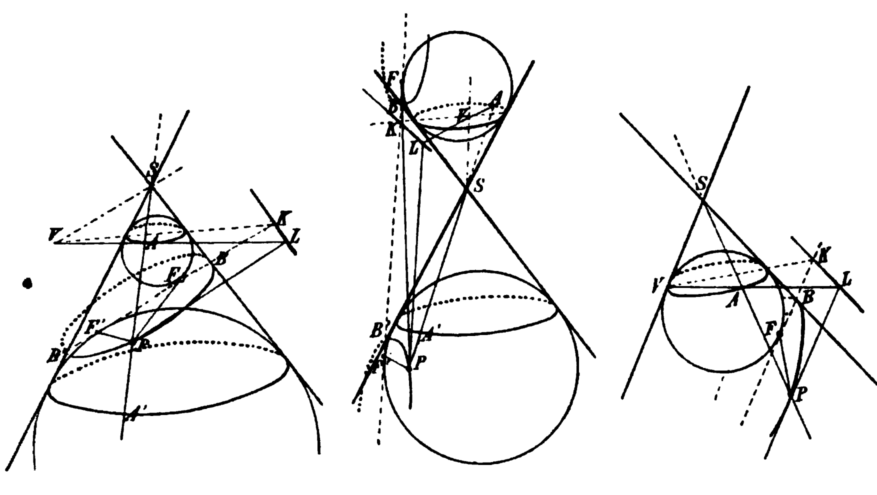


Fig. 22 a. Fig. 22 b. Fig. 22 c.

Ist $2a$ die Länge der Hauptaxe, so giebt es zu den Fahrstrahlstrecken f und $(2a \mp f)$ stets 4 Punkte, welche paarweise symmetrisch zu der Hauptaxe und zu der Mittelnormale derselben liegen (vgl. I. Teil, §. 12, 6) und somit diametral (I. Teil §. 42, 4) zu der Mitte der Hauptaxe, dem Mittelpunkt des Kegelschnitts.

Gärtnerkonstruktion einer Ellipse mittels einer Schnur, deren Enden in 2 Pfählen befestigt sind, während der die Kurve beschreibende Stift sie gespannt erhält.

9. Zu der Axenebene durch den Brennpunkt F ist die Ebene des Kegelschnitts normal und ebenso die Ebene des Berührungskreises zwischen Kugel- und Kegelfläche; daher ist die Schnittgerade KL beider normalen Ebenen auch auf der Axenebene normal. Diese Schnittgerade wird Leitgerade (Directrix) des Kegelschnitts genannt; zu jedem Brennpunkt gehört eine Leitgerade.

Die vom Brennpunkt F zu seiner Leitgeraden normal gezogene Gerade sei FK; die Parallele zu FK durch die Spitze S der Kegelfläche treffe die Ebene des Berührungskreises in V. Zieht man noch die Normale PL von einem

Punkt P des Kegelschnitts zu der Leitgeraden, so ist $PL \parallel FK \parallel SV$, daher $PA : PL = SA : SV$ oder

$$PF : PL = SA : SV.$$

Nun ist das Verhältnis $SA : SV$ konstant, wo auch der Punkt P liegt (5b), und zwar ist bei der Ellipse $SA < SV$, indem V aufserhalb der Fläche des Berührungskreises liegt, bei der Hyperbel $SA > SV$, da V innerhalb der Kreisfläche liegt, bei der Parabel $SA = SV$, da SV eine Seitengerade des Kegels ist. In den ersten beiden Fällen ist das Verhältnis $SA : SV$ für beide Brennpunkte und Leitgeraden das gleiche, da $SA : SV = SA' : SV'$, wenn SV die Ebene des zweiten Berührungskreises in V' trifft. Es sind deshalb auch beide Leitgeraden von den benachbarten Scheiteln gleichweit entfernt. Ist c der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt der Kugel, die lineare Excentricität, und a die halbe Hauptaxe, so folgt für die Scheitel B und B_1 das Verhältnis

$$\frac{FB}{BK} = \frac{FB'}{KB'} = \frac{2c \pm BF}{2a \pm BK}, \text{ woraus sich ergiebt: } \frac{FB}{BK} = \frac{c}{a} = e,$$

welches Verhältnis mit dem Namen Excentricität bezeichnet wird.

In jedem Kegelschnitt ist das Verhältnis der Abstände eines Punktes von dem Brennpunkt und dessen Leitgeraden konstant, nämlich gleich der Excentricität e des Kegelschnitts. Es ist $e < 1$ in der Ellipse, $e > 1$ in der Hyperbel, $e = 1$ in der Parabel.

Wenn von einer Parabel der Brennpunkt und die Leitgerade gegeben sind, so können hiernach leicht Punkte der Kurve erhalten werden. Bei der Ellipse und Hyperbel mufs noch aufserdem die Excentricität gegeben sein.

10. Nach 2d lassen sich für die Kegelschnitte die in §. 43, 2ff. angegebenen Gleichungen in Bezug auf die Hauptaxe als X-Axe und das Centrum als Koordinatenanfang ableiten, aus welchen dann die sog. analytische Geometrie alle Eigenschaften dieser Kurven entwickelt. Durch die Sätze in 8 und 9 werden die Kegelschnitte als geometrische Örter dargestellt, welche die Arten der Kurven vollständig bestimmen und ebenfalls zur Ableitung aller Eigenschaften der Kegelschnitte benutzt werden können. Z. B. lassen sich aus diesen Sätzen die eben genannten Gleichungen auch mit Hülfe des pythagoreischen Lehrsatzes ableiten. Wir wollen hier nur noch die Konstruktion der Tangente bestimmen.

Halbiert man in der Hyperbel den Winkel der beiden Fahrstrahlen eines Punktes P, in der Ellipse deren Nebenwinkel, in der Parabel den Winkel des Fahrstrahls mit der Normalen zur Leitgeraden und bestimmt man zu dieser Winkelhalbierenden als Axe den Punkt F_2 symmetrisch mit F, so ist für irgend einen andern Punkt L der Axe $LF_2 = LF$, während in der Hyperbel und Ellipse F_1F_2 gleich der Hauptaxe $2a$ und $LF_1 - LF_2 < F_1F_2$ bezw. $LF_1 + LF_2 > F_1F_2$; in der Parabel liegt F_2

auf der Leitgeraden und es ist $LF_2 > LM$, wenn M der Fufspunkt der Normalen von L zur Leitgeraden ist. Daraus folgt, dafs der Punkt L nicht dem Kegelschnitt angehören kann, da dies dem Satze 8, bezw. 9 widersprechen würde. Die Winkelhalbierende hat also mit dem Kegel-

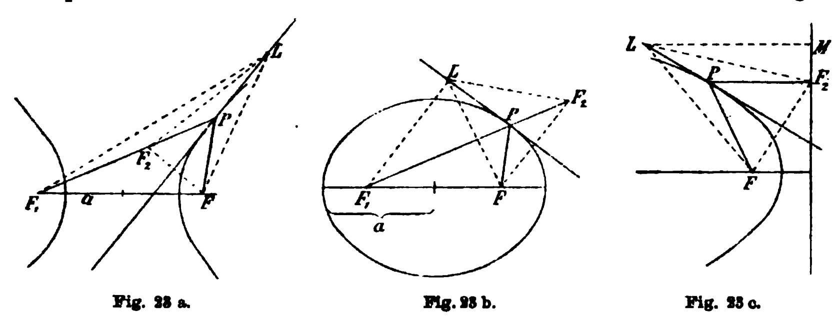


Fig. 23 a. Fig. 23 b. Fig. 23 c.

schnitt nur den Punkt P gemeinsam; sie ist Tangente an ihn. Wenn wir in der Parabel auch die Normale zur Leitgeraden Fahrstrahl nennen, so gilt für alle Kegelschnitte der Satz:

Die Fahrstrahlen eines Punktes in einem Kegelschnitt bilden mit dessen Tangente gleiche Winkel.

Hiernach kann die Tangente eines Kurvenpunktes leicht erhalten werden, wenn die Brennpunkte, bezw. Leitgeraden, gegeben sind. — Ist von einem Punkt L die Tangente zu ziehen, so erhält man zunächst den Punkt F_2 durch die Kreisbögen aus L mit dem Radius LF und aus F_1 mit dem Radius $2a$ (bezw. mittels der Leitgeraden bei der Parabel); es ergeben sich so zwei Tangenten durch L. — Ist eine Tangente parallel zu einer Geraden zu konstruieren, so tritt an die Stelle des ersten Kreisbogens die Normale von F zu der Geraden.

Anmerkung. Die von einem Brennpunkt ausgehenden Strahlen des Schalles, des Lichtes oder der Wärme werden an der Parabel parallel der Axe reflektiert, an der Ellipse nach dem andern Brennpunkt, an der Hyperbel so, als kämen sie von dem andern Brennpunkt.

Drittes Kapitel.

Symmetrie in Bezug auf eine Ebene und einen Punkt. Dreikant und sphärisches Dreieck.

§. 8. Symmetrie in Bezug auf eine Ebene.

1. Der Symmetrie der Gebilde einer Ebene in Bezug auf eine ihrer Geraden als Axe entspricht die Symmetrie der Gebilde des allseitig ausgedehnten Raumes in Bezug auf eine Ebene als Symmetrie-Ebene (S.-E.). Wie in ersterem Fall die Strecke zweier symme-

trischen Punkte durch die Axe normal halbiert wird, so nennen wir hier Gebilde **symmetrisch zu einer Ebene** (plansymmetrisch), in welchen einander Punkte entsprechen, welche je auf einer Normalen der S.-E. in gleichem Abstand von derselben liegen. Zwei solche Gebilde vereinigen sich zu einem **in sich symmetrischen** Gebilde.

Das Spiegelbild eines Gegenstandes erscheint mit diesem symmetrisch zu der Spiegelebene als S.-E.

Es folgen hiernach Sätze, welche denen des 3. Kapitels im I. Teil entsprechen.

a) *Es giebt zu einer S.-E. nur einen mit einem bestimmten Punkt symmetrischen Punkt. Zu jedem Gebilde ist das symmetrische zu einer bestimmten S.-E. eindeutig bestimmt.*

b) *Jeder Punkt und jede Linie der S.-E. entspricht sich selbst symmetrisch.*

c) *Die Gegenstrahlen jeder Normalen der S.-E. sind symmetrisch.*

d) *Die Gegenebenen jeder Normalebene der S.-E. sind symmetrisch.*

Das letztere folgt aus dem vorhergehenden, da alle Geraden, welche in der Schnittgeraden zwischen der Normal- und Symmetrieebene auf letzerer Ebene normal sind, in erstere Ebene fallen (§. 4, 3 d).

e) *Mit dem Schnittpunkt zweier Linien ist der Schnittpunkt der symmetrischen Linien symmetrisch, mit der Schnittlinie zweier Flächen die Schnittlinie der symmetrischen Flächen.*

2. *Zwei einander schneidende Gerade sind symmetrisch, wenn ihr Winkel durch die S.-E. normal halbiert wird.*

2'. *Zwei einander schneidende Ebenen sind symmetrisch, wenn ihr Winkel durch die S.-E. halbiert wird.*

Der erstere Satz folgt aus 1 d und I. Teil §. 10, 3.

Dafs mit einer Ebene α ebenfalls eine Ebene α_1 symmetrisch ist, folgt daraus, dafs mit einem Punkt und einer Geraden eben solche Gebilde symmetrisch sind und dafs die Ebene als geometrischer Ort der Geraden aufzufassen ist, welche durch einen Punkt geht und eine feste Gerade schneidet (I. Teil §. 4, 1). Wenn die Ebene α die S.-E σ in einer Geraden s schneidet, so mufs die symmetrische Ebene durch dieselbe Gerade gehen, da diese sich selbst entspricht.

Fig. 24.

Eine Normalebene ν zu s ergiebt als Schnittgerade in der S.-E. die Gerade n und in den symmetrischen Ebenen die symmetrischen Geraden a und a_1 (1 d); es ist somit $\sphericalangle an = na_1$. Da die Geraden a, n, a_1 normal zu s sind, so bestimmen sie die Winkel der Ebenen $\sphericalangle \alpha\sigma = \sigma\alpha_1$.

3. Im Anschlufs an I. Teil §. 11, 1 folgt:

a) *Die Verbindungsgeraden zweier symmetrischen Punkte mit einem Punkt der S.-E. sind symmetrisch.*

a′) *Die Ebenen durch zwei symmetrische Gerade und einen Scheitelstrahl derselben in der S.-E. sind symmetrisch.*

Insbesondere ergiebt sich für den Fall, dafs die Schnittgerade einer Ebene mit der S.-E. in unmefsbar grofse Entfernung hinausrückt (I. Teil §. 11, 5):

b) *Mit einer zur S.-E. parallelen Ebene ist eine ebensolche Ebene symmetrisch; jeder Punkt der S.-E. hat von beiden Ebenen den gleichen Abstand.*

Man nennt die S.-E. die Mittelparallelebene beider parallelen Ebenen.

4. Gemäfs §. 12, 2 des I. Teils sind Strecken, welche in Bezug auf eine Ebene symmetrisch liegen, einander gleich, da dieselben in einer Normalebene zur S.-E. symmetrisch sind zur Schnittgeraden beider Ebenen als Axe. Aus dieser Gleichheit symmetrischer Strecken folgt zunächst die Kongruenz symmetrisch entsprechender Dreiecke (und ebener Figuren überhaupt) und daraus die Gleichheit der Winkel irgend zweier symmetrischen Geraden.

a) *Eine ebene Figur ist kongruent der mit ihr in Bezug auf eine Ebene symmetrischen.*

b) *Der Winkel zweier Halbstrahlen ist gleich dem der symmetrischen Halbstrahlen.*

Im Anschlufs hieran ist nun noch zu erweisen:

b′) *Der Winkel zweier Halbebenen ist gleich dem der symmetrischen Halbebenen.*

Legen wir nämlich zur Bestimmung der Ebenenwinkel $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ durch symmetrische Punkte P und P_1 der Schnittgeraden je eine Normalebene ν und ν_1 zu diesen, so sind diese Normalebenen symmetrisch; denn die eine ν ist der geometrische Ort der Geraden durch den Punkt P, welche mit der einen Schnittgeraden $\alpha\beta$ einen rechten Winkel bildet, und somit mufs (nach b) die ihr symmetrische Ebene dieselbe Eigenschaft für den andern Punkt P_1 und die andere Schnittgerade $\alpha_1\beta_1$ haben. Die Schnittgeraden dieser Normalebenen mit den betr. Ebenen $\alpha\nu$, $\alpha_1\nu_1$ und $\beta\nu$, $\beta_1\nu_1$ sind daher ebenfalls paarweise symmetrisch und bilden nach b gleiche Winkel mit einander. Durch diese werden aber die Ebenenwinkel gemessen.

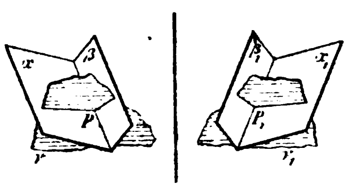


Fig. 25.

§. 9. Symmetrie körperlicher Ecke. Dreikant und sphärisches Dreieck.

A. Das in sich symmetrische Dreikant und sphärische Dreieck.

1. Im Anschlufs an das axige Dreieck und Dreiseit der Planimetrie (I. Teil §. 11, 6—9) betrachten wir folgende räumliche Gebilde:

Dreikant heifst ein Gebilde aus 3 Strahlen eines Punktes, die nicht in einer einzigen Ebene liegen und durch die zwischen ihnen liegenden Ebenenteile verbunden sind.

Dreiflach heifst ein Gebilde aus 3 Ebenen eines Punktes, die nicht in einer einzigen Geraden einander schneiden und durch ihre Schnittgeraden teilweise begrenzt sind.

Der Punkt heifst der Scheitel, die Strahlen (Schnittgeraden) heifsen Kanten, die Ebenenteile zwischen denselben Seiten. Jeder

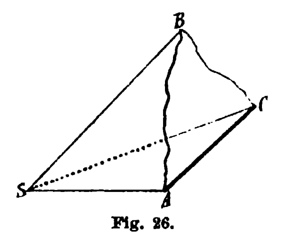


Fig. 26.

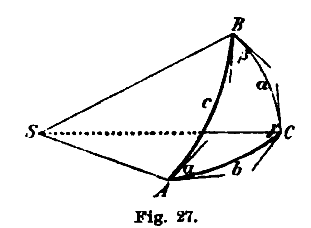


Fig. 27.

Kante liegt eine Seite gegenüber. Wir unterscheiden 3 Kantenwinkel (oder Seiten) und 3 Ebenenwinkel, die ebenfalls je paarweise einander gegenüberliegen.

2. Die Beziehungen dieser Gebilde zu dem Dreieck oder Dreiseit treten noch deutlicher hervor, wenn wir um den Scheitel S des Dreikants oder Dreiflachs als Mittelpunkt eine Kugel legen. Die Oberfläche derselben wird durch die 3 Kanten in 3 Punkten A, B, C, durch die 3 Ebenen in 3 gröfsten Kreisen geschnitten, deren Bögen AB oder c, BC oder a, CA oder b ein sog. sphärisches Dreieck oder Dreiseit bestimmen. Diese Bögen messen die Kantenwinkel ASB, BSC, CSA, während die Winkel α, β, γ der Tangenten in den Schnittpunkten A, B, C der Kreisbögen zugleich die Ebenenwinkel an den Kanten SA, SB, SC messen. Die Kreisbögen heifsen die Seiten, die Winkel α, β, γ die Winkel des sphärischen Dreiecks.

Die Ausdrücke gleichschenkelig und gleichgeneigt lassen sich vom ebenen Dreieck sofort auf das sphärische übertragen.

3. Zwei symmetrische Gerade bilden mit irgend einem Strahl ihres Scheitels in der S.-E. ein in sich symmetrisches Dreikant. (Fig. 28.)

3'. Zwei symmetrische Ebenen bilden mit irgend einer Normalebene der S.-E. ein in sich symmetrisches Dreiflach. (Fig. 28.)

Als besondere Fälle von den Sätzen §. 8, 4 b u. b′ gelten für diese Gebilde die Sätze:

a) *Zwei symmetrische Gerade bilden mit irgend einer durch ihren Schnittpunkt gehenden Geraden der S.-E. gleiche Winkel.*

a′) *Zwei symmetrische Ebenen bilden mit irgend einer Normalebene der S.-E. gleiche Winkel.*

Umgekehrt ergeben sich aus diesen Sätzen, da die symmetrische Beziehung eindeutig ist, folgende (vgl. I. Teil §. 11, 2):

b) *Zwei Gerade, welche auf zwei symmetrischen Ebenen liegen und mit einem Halbstrahl der Schnittgeraden beider Ebenen (auf den Gegenseiten der S.-E.) gleiche Winkel bilden, sind symmetrisch.*

b′) *Zwei Ebenen, welche durch zwei symmetrische Gerade gehen und mit deren Ebene (bezw. symmetrischen Halbebenen) auf einerlei Seite der letzteren gleiche Winkel bilden, sind symmetrisch.*

4. Aus letzteren Sätzen folgt unmittelbar:

a. *Ein Dreikant mit zwei gleichen Kantenwinkeln ist symmetrisch in Bezug auf die Ebene, welche den Ebenenwinkel an der gemeinsamen Kante der ersteren halbiert.*

a′. *Ein Dreiflach mit zwei gleichen Ebenenwinkeln ist symmetrisch in Bezug auf die Ebene, welche den Kantenwinkel der gemeinsamen Ebene der ersteren normal halbiert.*

Oder:

b) *Ein sphärisches Dreieck mit zwei gleichen Seiten ist symmetrisch in Bezug auf die Ebene des gröfsten Kreises, welche den eingeschlossenen Winkel halbiert.*

b′) *Ein sphärisches Dreiseit mit zwei gleichen Winkeln ist symmetrisch in Bezug auf die Ebene des gröfsten Kreises, welche die gemeinsame Seite der ersteren normal halbiert.*

Hieraus folgt dann weiter nach 3 a und a′:

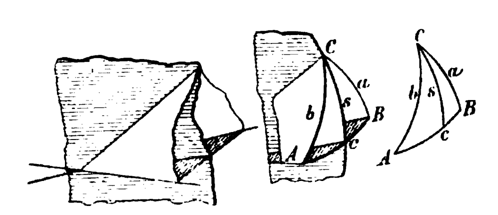


Fig. 28.

c) *In einem Dreikant oder sphärischen Dreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt,*

und insbesondere:

d) *Ein Dreikant oder sphärisches Dreieck mit drei gleichen Seiten hat auch drei gleiche Winkel und umgekehrt.*

Zusatz. Sind die beiden Kantenwinkel Rechte, so sind es auch die ihnen gegenüberliegenden Ebenwinkel und umgekehrt, wie aus §. 4, 3 folgt.

5. Entsprechend den Sätzen des I. Teils §. 11, 9 folgen hier die Sätze:

In jedem gleichschenkeligen oder gleichgeneigten Dreikant bezw. sphärischen Dreieck fallen folgende Ebenen bezw. deren gröfste Kreise zusammen:

a) die den ungleichen Ebenenwinkel halbierende Ebene; | *a′) die Mittelnormalebene des ungleichen Kantenwinkels;*

b) die Normalebene von der Kante dieses Winkels zur Gegenseite. | *b′) die Ebene von der Halbierenden dieses Winkels zur Gegenkante.*

B. Winkelbeziehungen im Dreikant und sphärischen Dreieck.

6. Auch im nicht symmetrischen Dreikant oder sphärischen Dreieck bestehen zwischen den Winkeln und Seiten Beziehungen, welche denen des ebenen Dreiecks entsprechen.

Sind a, b, c die drei Kanten eines Dreikants, f die Projektion von b auf die Gegenebene ac, so kann f sowohl als die Pro-

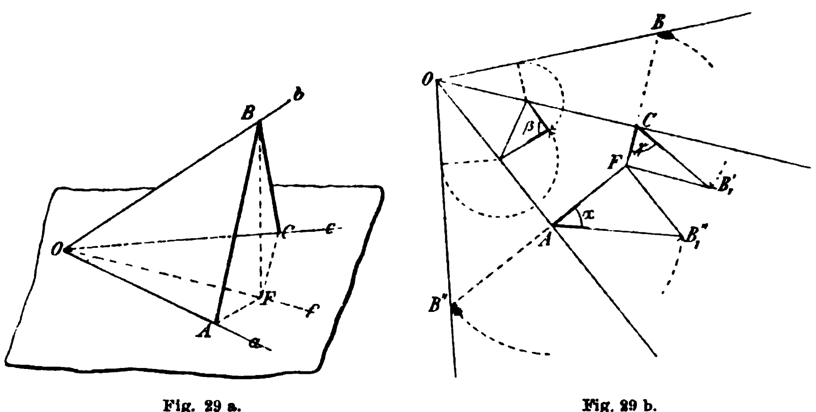


Fig. 29 a. Fig. 29 b.

jektion von a auf die Ebene bf, wie auch als die Projektion von c auf diese Ebene aufgefafst werden. Daher ist (nach §. 6, 2a) $\sphericalangle ab > af$, und $\sphericalangle bc > fc$, somit $\sphericalangle ab + bc > af + fc$ oder $\sphericalangle ab + bc > ac$, woraus $\sphericalangle ab > ac - bc$, d. h.:

a) *In einem Dreikant ist die Summe zweier Kantenwinkel gröfser (die Differenz kleiner) als der dritte,* oder:

b) *In einem sphärischen Dreieck ist die Summe zweier Seiten gröfser (die Differenz kleiner) als die dritte.*

7. Fällt man in dem Dreikant, dessen Scheitel O und Kanten a, b, c sind, von einem Punkt B der Kante b zu den Geraden a, c und zu der Ebene ac bzw. die Normalen BA, BC und BF und ist $\sphericalangle ba > bc$, so ist in den rechtwinkeligen Dreiecken OBA und OBC

auch $AB > BC$ ($AB = OB \sin ab$, $BC = OB \sin bc$) und in den Dreiecken BAF und BCF ist $\sphericalangle BAF < BCF$ $\left(\sin BAF = \frac{BF}{AB}, \sin BCF = \frac{BF}{BC}\right)$. Diese Winkel sind aber die Ebenenwinkel des Dreikants. So folgt:

a) *In einem Dreikant liegt dem gröſseren Kantenwinkel der gröſsere Ebenenwinkel gegenüber — und umgekehrt.* Oder:

b) *In einem sphärischen Dreieck liegt der gröſseren Seite auch der gröſsere Winkel gegenüber — und umgekehrt.*

8. Wie sich an das Dreieck das $n$eck anschlieſst, so an das Dreikant das n**kant** oder n**kantige Eck**. Es entsteht, indem ein Halbstrahl eines Punktes S in diesem fest bleibt, während er auf einem Vieleck $ABCDE$, dessen Ebene nicht durch den Punkt geht, hingleitet. Dasselbe hat nKanten und nEbenen. Auf einer Kugelfläche, welche um den Scheitel als Mittelpunkt beschrieben wird, schneidet das $n$kant ein **sphärisches** n**eck** aus.

An jedem Eck des $n$ecks bildet die Ebene desselben mit zwei Ebenen des $n$kants ein Dreikant, dessen einer Kantenwinkel α_1 jeweils dem $n$eck angehört; für die Summe σ_1 der beiden andern gilt daher $\sigma_1 > \alpha_1$. Die Summe der Winkel des $n$ecks beträgt $(2n - 4)$ R, daher ist die Summe Σ aller dem Vieleck nicht angehörigen Winkel dieser Dreikante $\Sigma > (2n - 4)$ R. Die Summe Σ bildet aber mit der Summe S aller Kantenwinkel des $n$kants die Winkel von nDreiecken, so daſs $S + \Sigma = 2n\,R$, woraus durch Subtraktion der $\Sigma > (2n - 4)R$ folgt: $S < 4R$; d. h.:

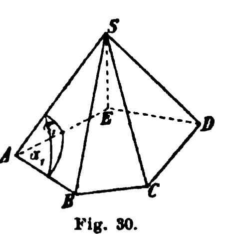


Fig. 30.

a) *Die Summe der Kantenwinkel eines jeden Ecks ist kleiner als 4R.*

b) *Die Summe der Seiten eines sphärischen Vielecks ist kleiner als ein gröſster Kreis.*

9. Fällt man von einem Punkt innerhalb eines $n$kants oder Ecks die Normalstrecken auf die Ebenen desselben, so bestimmen diese

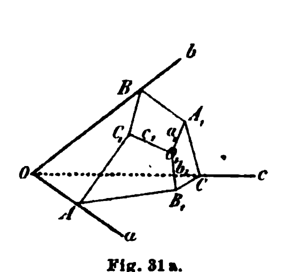


Fig. 31 a.

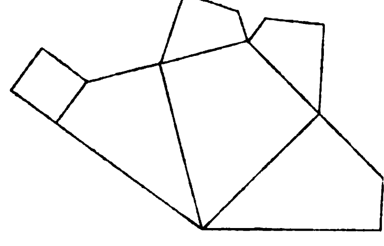


Fig. 31 b.

Strecken als Kanten ein neues $n$kantiges Eck, welches **Polareck** zu dem ersteren Eck genannt wird. Aus §. 4, 5 folgt:

a) *Jeder Ebenenwinkel eines Ecks ergänzt den entsprechenden Kantenwinkel des Polarecks zu $2R$.*

Da (wie §. 4, 5 bewiesen) auch die Kante zweier Ebenen des ursprünglichen Ecks normal zur Ebene zweier entsprechenden Kanten des Polarecks, so ist auch das ursprüngliche Eck Polareck seines Polarecks und

b) *Jeder Kantenwinkel eines Ecks ergänzt den entsprechenden Ebenenwinkel des Polarecks zu $2R$.*

Ist σ die Summe der nEbenenwinkel des Ecks, s_1 die der Kantenwinkel des Polarecks, so ist $\sigma + s_1 = 2nR$, $\sigma < 2nR$, und ferner da $s_1 < 4R$, $\sigma > (2n - 4)R$, d. h.:

c) *Die Summe der Ebenenwinkel eines $n$kantigen Eckes ist kleiner als $2nR$ und gröfser als $(2n - 4)R$.*

Insbesondere gilt für $n = 3$:

d) *Die Summe der Ebenenwinkel eines Dreikants oder der Winkel eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als $6R$ und gröfser als $2R$.*

C. Symmetrische Ecke.

10. Legen wir durch eine Gerade a der Symmetrie-Ebene γ zwei symmetrische Ebenen α und α_1, ebenso durch eine zweite Gerade b der Symmetrie-Ebene die symmetrischen Ebenen β und β_1, so bildet $\alpha\beta\gamma$ ein Dreiflach und $\alpha_1\beta_1\gamma$ das mit ihm symmetrisch liegende. Beide stimmen in ihren Kantenwinkeln und Ebenenwinkeln überein; allein, wenn man jeweils von einem Punkt des Raumes innerhalb des Dreiflachs die Reihenfolge der Ebenen $\alpha\beta\gamma$ bzw. $\alpha_1\beta_1\gamma$ betrachtet, so durchläuft man die Ebenen des einen Ecks im Sinn der Drehung des Uhrzeigers, die anderen im entgegengesetzten Sinn. Die symmetrisch entsprechenden Ecke können somit nicht zur Deckung gebracht werden.

Fig. 32.

Die Modelle für beide Ecke sind durch entgegengesetzte Knickung zweier Kartons mit kongruenten Vierstrahlen (Fig. 31 b) zu erhalten. (Vgl. Fig. 25.)

Wir nennen solche Gebilde, welche in allen ihren Teilen, wie Strecken zwischen zwei Punkten, Winkel zweier Geraden oder Ebenen, übereinstimmen, während diese Teile von entsprechenden Punkten betrachtet in umgekehrtem Richtungs- oder Drehungssinn auf einander folgen, **gegenwendig gleich**; die kongruenten Gestalten können dagegen als **gleichwendig gleiche** bezeichnet werden. Während in ebenen symmetrischen Figuren (nach §. 8, 4a) dieser Unterschied keine

Verschiedenheit der Form bedingt (vgl. I. Teil, §. 12, 5), gilt für symmetrische Ecke der Satz:

a) *Zwei symmetrisch entsprechende Ecke sind gegenwendig gleich.*

Umgekehrt folgt, den Ecken $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma$ entsprechend:

b) *Zwei gegenwendig gleiche Dreikante liegen symmetrisch, wenn zwei entsprechende Kantenwinkel einander decken. Die Symmetrie-Ebene ist die Ebene dieses Kantenwinkels, wenn beide Ecke gegenseitig zu derselben liegen. (Sie ist die den Kantenwinkel normal halbierende Ebene, wenn sie einerseits derselben liegen.)*

Allgemein gilt:

c) *Zwei gegenwendig gleiche Ecke liegen symmetrisch zu einer Symmetrie-Ebene, wenn ein Punkt, ein Strahl desselben und eine Halbebene des letzteren symmetrisch zu den entsprechenden Gebilden liegen.*

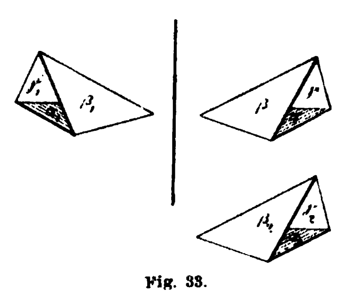


Fig. 33.

Die Bezeichnung gegenwendig gleich kann daher für solche Gebilde in Anwendung gebracht werden, welche in Bezug auf eine Ebene symmetrisch gelegt werden können. Die hier gegebenen Bedingungen genügen zur Bestimmung ihrer symmetrischen Lage.

§. 10. Die Symmetrie-Ebene als geometrischer Ort.

1. Entsprechend den Sätzen des I. Teils § 12, B gelten hier die Sätze:

a) *Jeder Punkt der Ebene, welche die Strecke zweier Punkte normal halbiert, ist von beiden Punkten gleichweit entfernt.*

a') *Jeder Scheitelstrahl eines Winkels in der Ebene, welche den Winkel normal halbiert, macht mit beiden Schenkeln gleiche Winkel.*

Letzteres ist nur eine andere Fassung von §. 6, 2b.

Die Umkehrungen dieser Sätze lauten:

b) *Jeder von zwei Punkten gleichweit entfernte Punkt liegt auf der Mittelnormalebene der Strecke dieser Punkte.*

b') *Jeder Scheitelstrahl eines Winkels, welcher mit dessen Schenkel gleiche Winkel einschliefst, liegt auf der den Winkel normal halbierenden Ebene.*

Das letztere folgt unmittelbar aus §. 9, 5.

2. Wenn hiernach die Winkel eines Strahles c von einem Punkt (Fig. 32) mit zwei gegebenen Strahlen a und b desselben einzeln übereinstimmen mit denen eines weiteren Strahles c_1 desselben Punktes, so sind c und c_1 symmetrisch zur Ebene ab; sie liegen auf den Gegenseiten der Ebene ab. Daraus folgt (vgl. I. Teil, § 12, 6c):

a) *Einerseits einer Ebene giebt es durch einen Punkt derselben nur einen Strahl, welcher mit zwei bestimmten Strahlen der Ebene einzeln bestimmte Winkel bildet.*

Wenn ferner $\sphericalangle ca = c_1 a$, so ist c symmetrisch mit c_1 zu der durch a normal zu cc_1 gelegten Ebene (§ 9, 5); c und c_1 liegen auf verschiedenen Seiten dieser Normalebene. Daraus ergiebt sich (vgl. I. Teil §. 12, 6d):

b) *Einerseits der Normalebene von einer Geraden zu einer Ebene giebt es auf letzterer nur eine Gerade, welche mit einem Strahl der Geraden einen bestimmten Winkel bildet.*

An I. Teil §. 12, 7 schliefst sich an:

c) *Der geometrische Ort des Punktes, welcher von zwei Ebenen den gleichen Abstand hat, ist das Paar der winkelhalbierenden Ebenen zu ersteren.*

In gleicher Weise lassen sich an I. Teil §. 12, 8 leicht entsprechende Sätze anschliefsen.

§. 11. Symmetrie in Bezug auf einen Punkt.

Winkel an Parallelen und Transversalen.

1. Wie wir die Symmetrie in einer Ebene (I. Teil, III. Kapitel) gemäfs der einen Eigenschaft der Übereinstimmung der Normalabstände entsprechender Punkte von der Symmetrie-Axe mittels Ersetzung der letzteren durch eine Symmetrie-Ebene auf alle räumliche Gebilde übertragen konnten, so kann dies auch auf einfache Weise mit der centralen Symmetrie (I. Teil, IV. Kapitel) geschehen. Zwei Gebilde heifsen diametral (centrisch-symmetrisch) zu einem Punkt als Centrum, wenn die entsprechenden Punkte je auf Gegenstrahlen des Punktes beiderseits in gleichen Abständen von ihm liegen. Die aus zwei diametralen Gebilden zusammengesetzte Gestalt heifst centrisch (in sich diametral).

Hieraus fliefsen die Sätze, welche dem IV. Kapitel des I. Teils entsprechen. Es müssen zunächst alle in einer centralen Ebene liegenden diametralen Figuren jenen Sätzen Genüge leisten.

a) *Es giebt in Bezug auf ein Centrum mit einem Punkt je nur einen diametral entsprechenden. — Mit jedem Gebilde ist das diametrale in Bezug auf ein Centrum eindeutig bestimmt.*

b) *Von den beiden durch eine centrale Gerade einseitig begrenzten Halbebenen einer centralen Ebene ist die eine mit der andern diametral. Mit einer Figur einer centralen Ebene ist eine Figur derselben Ebene diametral.*

c) *Der Schnittpunkt zweier Linien ist mit dem Schnittpunkt der diametralen Linien diametral; die Schnittlinie zweier Flächen ist mit der Schnittlinie der diametralen Flächen diametral.*

2. Aus 1 b und I. Teil §. 14, 4′ folgt der erste der beiden Sätze:

a) *Mit einer Geraden ist eine Gerade diametral, welche in der durch das Centrum und die erstere Gerade gelegten Ebene liegt; beide Geraden sind parallel und haben den gleichen Abstand vom Centrum; es entsprechen einander gegengerichtete Halbstrahlen derselben;*

a') *Mit einer Ebene ist eine parallele Ebene diametral; beide haben den gleichen Abstand vom Centrum; es entsprechen einander gegenseitige Halbebenen derselben;*

d. h. solche, welche auf entgegengesetzten Seiten einer sie teilweise begrenzenden Centralebene liegen. Wir nennen nämlich zwei parallele Halbebenen, welche durch die parallelen Schnittgeraden einer weiteren Ebene einseitig begrenzt sind, gleichseitig, wenn beide einerseits dieser Ebene liegen, im entgegengesetzten Fall gegenseitig. Von letzterer Ebene selbst nennen wir diejenigen von den Parallelen begrenzten Halbebenen gleichseitig, von welchen die eine die andre ganz einschliefst; die übrigen Paare von Halbebenen heifsen gegenseitig. Ebenso nennen wir diejenigen von 2 parallelen Ebenen je einseitig begrenzten Teile des Raumes gleichseitig, von welchen der eine den andern ganz einschliefst, die übrigen Paare von einseitig begrenzten Raumteilen heifsen gegenseitig.

Um den Satz a' zu begründen, nehmen wir an, OA sei der Normalabstand des Centrums O von der Ebene α, A_1 diametral zu A; alsdann entsprechen den zu OA in A normalen Geraden diametral ebenfalls Normale zu OA_1 in A_1; während erstere der Ebene α angehören, liegen letztere ebenfalls in einer zu OA_1 in A_1 normalen Ebene α_1, wobei $AO = OA_1$. Es ist $\alpha_1 \parallel \alpha$ nach §. 5, 2'.

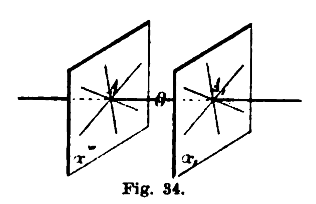


Fig. 34.

Es folgt nun aus a und a':

b) *Zwei diametrale Halbstrahlen bilden mit den Gegenrichtungen der sie begrenzenden Centralen gleiche Winkel.*

b') *Zwei diametrale Halbebenen bilden mit der sie begrenzenden Centralebene gegenseitig gleiche Winkel.*

Der Satz b folgt aus I. Teil §. 15, 3 c. — Werden in b' die (diametralen) Ebenen $\alpha \parallel \alpha_1$ von einer (Central-)Ebene γ geschnitten, so werden die Ebenenwinkel $\alpha\gamma$ und $\alpha_1\gamma$ gemessen durch die Winkel der Geraden, in welchen die zu den Parallelen $\alpha\gamma$ und $\alpha_1\gamma$ normale (centrale) Ebene λ die genannten Ebenen schneidet; diese Winkel sind nach b einander gleich.

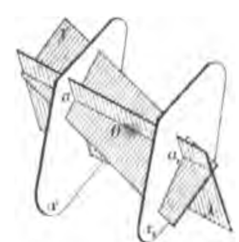


Fig. 35.

Mit Rücksicht auf die Gleichheit der Scheitelkeile folgt daher für parallele Ebenen mit einer Transversalebene:

c) *Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die Winkel von* $\left\{\begin{matrix}\textit{gegen-}\\ \textit{gleich-}\end{matrix}\right\}$ *seitigen Halbebenen-Paaren einander gleich.*

Vgl. I. Teil §. 15, 3. Die Bezeichnung „gleich- oder gegenwendig" ist für Winkel im körperlichen Raume weniger geeignet als für Winkel einer Ebene, da in letzterer nur zwei entgegengesetzte Winkelmessungen möglich sind, während im körperlichen Raume die Drehungen nicht in dieser Weise beschränkt sind. Die Winkel der Geraden einer Ebene werden auch gewöhnlich nur von einer Seite der Ebene betrachtet, während im körperlichen Raum der Drehungssinn von der Stellung des Beobachters abhängt.

3. Da diametrale Strecken einander gleich sind, so sind diametrale Dreiecke kongruent und somit ist der Winkel zweier Geraden gleich dem Winkel der diametralen Geraden. Zwei Halbstrahlen eines Punktes und zwei gegengerichtet parallele Halbstrahlen eines zweiten Punktes sind diametral zum Mittelpunkt der Scheitelstrecke; daher gilt mit Berücksichtigung der Gleichheit der Scheitelwinkel:

a) *Der Winkel zweier Halbstrahlen ist gleich dem Winkel zweier* $\left\{\begin{matrix}\textit{gleich-}\\ \textit{gegen-}\end{matrix}\right\}$ *gerichtet parallelen Halbstrahlen.*

Die Umkehrung lautet:

b) *Wenn auf zwei parallelen Ebenen zwei* $\left\{\begin{matrix}\textit{gleichgerichtet}\\ \textit{gegengerichtet}\end{matrix}\right\}$ *parallele Halbstrahlen mit zwei weitern Halbtrahlen,* $\left\{\begin{matrix}\textit{gleichseitig}\\ \textit{gegenseitig}\end{matrix}\right\}$ *gleiche Winkel bilden, so sind letztere Halbstrahlen ebenfalls parallel.*

3'. In zwei diametralen oder parallelen Ebenenpaaren $\alpha \parallel \alpha_1$, $\beta \parallel \beta_1$ sind die Schnittgeraden parallel $\alpha\beta \parallel \alpha_1\beta_1$ (§. 1, 6 b). Eine (centrale) Ebene, welche normal zu diesen Schnittgeraden ist, schneidet sie in parallelen Geraden $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, deren Winkel $\sphericalangle ab = a_1 b_1$ zugleich die Ebenenwinkel bestimmen; daher gilt mit Rücksicht auf die Gleichheit der Scheitelkeile:

a') *Der Winkel zweier Halbebenen ist gleich dem Winkel der* $\left\{\begin{matrix}\textit{gleich-}\\ \textit{gegen-}\end{matrix}\right\}$ *seitig parallelen Halbebenen.*

b') *Wenn zwei* $\left\{\begin{matrix}\textit{gleichseitig}\\ \textit{gegenseitig}\end{matrix}\right\}$ *parallele Halbebenen mit 2 weiteren Halbebenen* $\left\{\begin{matrix}\textit{gleichseitig}\\ \textit{gegenseitig}\end{matrix}\right\}$ *gleiche Winkel bilden, so sind letztere Halbebenen ebenfalls parallel.*

Zusatz. Unter dem Winkel zweier Windschiefen a und b versteht man den Winkel, welchen die eine Gerade a mit einer sie selbst schneidenden und zur andern b parallelen Geraden a_1 einschliefst (Fig. 13).

4. Aus der Gleichheit diametraler Strecken und Winkel (§. 16, 2 des I. Teils) folgt:

a) *Diametrale ebene Figuren sind kongruent.*

Dagegen sind diametrale Gestalten, welche nicht eben sind, nicht kongruent.

Dem durch drei Halbstrahlen des Centrums bestimmten Dreikant ist das Eck der drei Gegenstrahlen, das Scheiteleck, diametral. Dasselbe stimmt in den Kanten- und Ebenenwinkeln mit dem ursprünglichen Eck überein, da sie in beiden Ecken von denselben Geraden bezw. Ebenen gebildet werden. Dagegen liegen entsprechende Kanten und Ebenen je auf den Gegenseiten einer der drei Ebenen; daher sind die entsprechenden Elemente von diametral entsprechenden Punkten aus gesehen in entgegengesetztem Drehungssinn, d. i. gegenwendig geordnet. Drehen wir das eine Eck so, dafs ein Kantenwinkel mit dem entsprechenden zusammenfällt, so liegen die Ecke symmetrisch (§. 9, 10b):

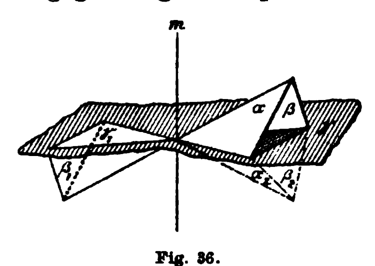


Fig. 36.

a) *Ein Eck und sein Scheiteleck bezw. ein sphärisches Dreieck und sein Scheiteldreieck sind gegenwendig gleich.*

Überhaupt haben diametrale Ecke zwar übereinstimmende Kanten- und Ebenenwinkel, allein dieselben liegen je gegenseitig von entsprechenden Ebenen (vgl. Fig. 39).

b) *Diametrale Ecke sind gegenwendig gleich*, und umgekehrt:

c) *Gegenwendig gleiche Ecke liegen diametral, wenn ein Halbstrahl und eine Halbebene des einen Ecks gegengerichtet bezw. gegenseitig parallel mit ihren entsprechenden Gebilden sind. Das Centrum halbiert die Strecke der Grenzpunkte beider Halbstrahlen.*

5. Diese Sätze können auf diametrale, bezw. gegenwendig gleiche Gebilde ausgedehnt werden:

a) *Diametrale Gestalten sind gegenwendig gleich.*

b) *Wendet man eine von zwei diametralen Gestalten um eine centrale Axe um, so kommen die Gestalten in symmetrische Lage in Bezug auf die zur Drehaxe normale Centralebene als S.-E.*

Denn da bei einer halben Umdrehung um die Axe m (Fig. 36) die zur Axe normale Ebene γ in sich selbst umgedreht wird, kommen ihre Schnittpunkte und Schnittgeraden mit irgend welchen Geraden bezw. Ebenen (1, c) zur Deckung mit den Schnittpunkten und Schnittgeraden der diametralen Elemente (1, b), so dafs nun entsprechende Gerade und Ebenen je einander in dieser Normalebene der Drehaxe schneiden. Entsprechende Gerade und Ebenen machen aber mit dieser Normalebene beiderseits gleiche Winkel (2 b′), erfüllen also die Bedingungen von §. 8, 2.

Es ist hiermit die Übereinstimmung derjenigen Gebilde dargethan, welche in Bezug auf einen Punkt und welche in Bezug auf eine Ebene symmetrisch sind.

§. 12. Symmetrie der Rotationsflächen in Bezug auf eine Ebene und einen Punkt.

1. In einer Rotationsfläche giebt jede zur Axe normale Schnittebene einen Kreis, der eine axige Figur ist (I, §. 23, 4 b). Daher gilt für jede Art von Rotationsflächen:

a) *Eine Rotationsfläche ist in sich symmetrisch in Bezug auf jede Axenebene als S.-E.*

Für die drei schon betrachteten Rotationsflächen ergeben sich aber noch weitere Symmetrie-Ebenen.

Legen wir in einer Rotationskegelfläche durch die Spitze eine Ebene normal zur Axe, so bilden je zwei Seitengerade eines Axenschnitts mit jener Ebene gegenseitig gleiche Winkel, da sie mit der Normalen zu der Ebene gleiche Winkel bilden, d. h.:

b) *Eine Rotationskegelfläche ist in sich symmetrisch in Bezug auf die durch die Spitze normal zur Axe gelegte Ebene.*

In einer Rotationscylinderfläche stehen alle Seitengeraden normal zu der Normalebene der Axe, da sie mit letzterer parallel sind; hieraus folgt:

c) *Eine Rotationscylinderfläche ist in sich symmetrisch in Bezug auf jede zur Axe normale Ebene.*

Für die Kugel folgt aus a, da jeder Durchmesser als Rotationsaxe gelten kann:

d) *Eine Kugel ist in sich symmetrisch zu jeder Ebene durch den Mittelpunkt als S.-E.*

2. Für die Symmetrie zwischen zwei Rotationsflächen ergeben sich leicht folgende Bedingungen:

a) *Zwei Rotationskegelflächen mit gleichen Winkeln des Axenschnitts sind symmetrisch zu einer Ebene, wenn es ihre Spitzen und Axen sind.*

b) *Zwei Rotationscylinderflächen mit gleichen Radien sind symmetrisch zu einer Ebene, wenn es ihre Axen sind.*

c) *Zwei Kugeln mit gleichen Radien sind symmetrisch in Bezug auf die Mittelnormalebene ihrer Centralen.*

3. Diese Rotationsflächen sind auch centrisch.

a) *In einer Rotationskegelfläche sind die beiden durch die Spitze getrennten Teile diametral zur Spitze als Centrum.*

b) *Eine Rotationscylinderfläche ist centrisch in Bezug auf jeden Punkt der Axe als Centrum* (I, §. 14, 5′).

c) *Eine Kugelfläche ist centrisch zu ihrem Mittelpunkt.*

4. Die Bedingungen für die diametrale Lage zweier Rotationsflächen entsprechen denen, welche in 3 für die Symmetrie derselben angegeben wurden.

Viertes Kapitel.

Perspektivische Kongruenz und Ähnlichkeit.

§. 13. Perspektivische Kongruenz. Verschiebung längs einer Geraden.

1. Im zweiten Kapitel haben wir die Drehung räumlicher Gebilde um eine Axe behandelt. Eine zweite einfache Bewegung ist die Verschiebung, d. i. die Bewegung längs einer Geraden l, Leitgeraden, der Art, dafs diese Gerade in sich selbst bleibt und ebenso eine Ebene λ durch sie bei dieser Bewegung in sich selbst hingleitet. Die Figur in der zweiten Lage heifst perspektivisch kongruent (p. k.) zu der Figur der ersteren Lage; beide Figuren sind nämlich kongruent, da die eine nur als eine neue Lage der andern aufzufassen ist.

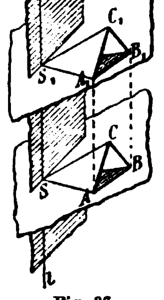


Fig. 37.

Irgend eine zweite Ebene durch die Leitgerade mufs, da sie ihren Winkel mit der ersten Ebene λ bei der Verschiebung beibehält, ebenfalls in sich selbst hingleiten. Es bleibt daher zur vollständigen Bestimmung der Verschiebung nur die Angabe der Strecke der Leitgeraden übrig.

Alle Figuren in Ebenen durch die Leitgerade zeigen hierbei die im VI. Kap. des I. Teils dargelegten Beziehungen. Legen wir daher durch einen Punkt A und die Leitgerade l, welche um die Strecke SS_1 in sich verschoben wird, eine Ebene, so bleibt der Punkt A bei der Verschiebung nach A_1 in dieser Ebene und es folgt aus I, §. 20, 1a u. b: $AA_1 \parallel$ und $= SS_1$; dasselbe gilt für einen Punkt B einer andern Ebene BSS_1, nämlich $BB_1 \parallel$ und $= SS_1$; somit $AA_1 \parallel$ und $= BB_1$, d. h.:

a) *In p. k. Figuren sind die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte parallel und gleich.*

Daraus folgt weiter, dafs auch $AB \parallel$ und $= A_1B_1$, d. h.:

b) *In p. k. Figuren sind entsprechende Halbstrahlen gleichgerichtet parallel.*

In gleicher Weise gilt aber auch:

c) *In p. k. Figuren sind entsprechende Halbebenen gleichseitig parallel.*

Denn sie müssen entsprechende Geradenpaare enthalten und der Satz fliefst somit aus §. 1, 7a.

Aus a geht noch hervor:

d) *Die p. k. Figur zu einer Figur ist durch die Lage eines ihrer Punkte eindeutig bestimmt.*

Aus dieser Eindeutigkeit ergiebt sich nun auch:

e) *Gleichgerichtet parallele Halbstrahlen bezw. gleichseitig parallele Halbebenen durch entsprechende Punkte in p. k. Figuren sind p. k.*

2. Während der Satz §. 20, 3 des I. Teils auch hier gilt, erhält der Satz 3′ folgende Fassung:

a) *Trägt man in entsprechenden Ebenen von* p. f. *Figuren an entsprechenden Punkten und Halbstrahlen gleichseitig gleiche Winkel an, so sind deren Schenkel* p. f.

Im Anschlus hieran folgt für Ebenen:

b) *Trägt man in* p. f. *Figuren an entsprechenden Geraden und Halbebenen gleichseitig gleiche Ebenenwinkel an, so sind deren Ebenen paarweise* p. f.

Umgekehrt folgt hieraus auch der Satz §. 11, 3′a.′

3. Die Sätze in §. 20, 4 des I. Teils sind auch für räumliche p. f. Figuren giltig und es kann zu ihnen hier der Satz hinzugefügt werden:

a) *Die Schnittlinien entsprechender Flächenpaare in* p. f. *Figuren sind* p. f.

Ebenso läfst sich I. Teil §. 20, 5 und 6 auf Ebenenbüschel und Ecke ausdehnen; für letztere folgt:

b) *Zwei kongruente Dreikante, von welchen ein Paar entsprechender Kanten und Halbebenen gleichgerichtet bezw. gleichseitig parallel sind. liegen* p. f.

Es folgt dies unmittelbar aus 2b.

Diese Bedingung genügt für die p. f. Lage kongruenter Gebilde überhaupt.

§. 14. Bedingungen für die Kongruenz der Dreikante und sphärischen Dreiecke.

1. Wenn zwei Dreikante $O(ABC)$, $O_1(A_1B_1C_1)$ kongruent sind, so stimmen ihre 3 Kantenwinkel und ihre 3 Ebenenwinkel in der Gröfse überein und sie erscheinen, von entsprechenden Punkten aus

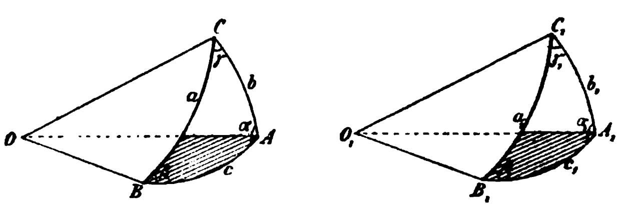


Fig. 38.

betrachtet, gleichwendig. Sind sie gegenwendig, so sind die Dreikante nicht kongruent, können aber symmetrisch zu einer Ebene gelegt werden.

Den kongruenten Ecken entsprechen auf Kugeln, welche um deren Scheitel O und O_1 mit gleichen Radien beschrieben werden, kongruente

sphärische Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, in welchen die Seiten $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ und die Gegenwinkel $\sphericalangle A = A_1$, $\sphericalangle B = B_1$, $\sphericalangle C = C_1$.

Indem von den 6 Gleichungen 3 als Annahmen herausgegriffen werden, ergeben sich die den Kongruenz-Sätzen der Dreiecke (I. Teil §. 21) entsprechenden Sätze.

2. *Zwei Dreikante, bezw. zwei sphärische Dreiecke gleicher Kugeln sind kongruent, wenn folgende Elemente der einen Figur gleich und (von entsprechenden Punkten aus gesehen) gleichwendig sind den entsprechenden Elementen der anderen*, (wobei wir die Kantenwinkel kurz als Seiten bezeichnen):

a) *zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;*

b) *die drei Seiten;*

c) *zwei Seiten und ein Gegenwinkel, während der andere Gegenwinkel übereinstimmend spitz oder übereinstimmend stumpf (oder ein R) ist.*

a′) *zwei Winkel und die gemeinsame Seite;*

b′) *die drei Winkel;*

c′) *zwei Winkel und eine Gegenseite, während die andere Gegenseite übereinstimmend einem spitzen oder übereinstimmend einem stumpfen Winkel (oder einem R) angehört.*

Beweis. Die gleichwendige Lage der Elemente ist im Folgenden vorausgesetzt.

a) Es sei $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, $\sphericalangle b = b_1$, $\sphericalangle c = c_1$. Man dreht das Eck O_1 so um seinen Scheitel O_1, dafs $O_1A_1 \parallel OA$ und Ebene $O_1A_1B_1 \parallel OAB$, so folgt aus $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, dafs Ebene $O_1A_1C_1$ p. f. OAC (§. 13, 2b), während aus $\sphericalangle b = b_1$ und $c = c_1$ sich ergiebt, dafs O_1C_1 p. f. OC, O_1B_1 p. f. OB (§. 13, 2a).

b) Es sei $\sphericalangle a = a_1$, $\sphericalangle b = b_1$, $\sphericalangle c = c_1$. Man lege $O_1A_1 \parallel OA$ und Ebene $O_1A_1B_1 \parallel OAB$. Das zu $O(ABC)$ p. f. Eck über $O_1A_1B_1$ mufs dann eine Kante O_1C_2 haben, für welche $\sphericalangle C_2O_1A_1 = b = b_1$ und $\sphericalangle C_2O_1B_1 = c = c_1$, woraus nach §. 10, 2a folgt, dass O_1C_2 mit O_1C_1 zusammenfällt.

c) Es sei $\sphericalangle a = a_1$, $\sphericalangle b = b_1$, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$. Man lege das Eck O_1 so, dafs $O_1A_1 \parallel OA$ und Ebene $O_1A_1B_1 \parallel OAB$, so liegt, da

a′) Es sei $\sphericalangle a = a_1$, $\sphericalangle \beta = \beta_1$, $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$. Man drehe das Eck O_1, so dafs $O_1B_1 \parallel OB$, Ebene $O_1B_1C_1 \parallel OBC$ wird, so folgt aus $\sphericalangle a = a_1$, dafs O_1C_1 p. f. OC (§. 13, 2a) und aus den beiden andern Annahmen Ebene $O_1B_1A_1$ p. f. OBA, Ebene $O_1C_1A_1$ p. f. OCA (§. 13, 2b).

b′) Es sei $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, $\sphericalangle \beta = \beta_1$, $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$. Alsdann stimmen in den Polarecken zu O und O_1 die Kantenwinkel überein; diese Polarecke sind somit nach b kongruent; sie stimmen folglich in ihren Ebenenwinkeln überein und sonach die Ecke O und O_1 in den Kantenwinkeln. Daher sind diese Ecke nach b kongruent.

c′) Es sei $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, $\sphericalangle \beta = \beta_1$, $\sphericalangle a = a_1$. Alsdann entsprechen in den Polarecken zu O und O_1 den Winkeln $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$

$\sphericalangle\, a = a_1$ ist, auch Ebene $O_1 A_1 C_1$ p. f. OAC und da $b = b_1$, $O_1 C_1$ p. f. OC. Einerseits der Normalebene von $O_1 C_1$ auf $O_1 A_1 B_1$ giebt es je nur eine Gerade, welche mit $O_1 C_1$ den $\sphericalangle\, a = a_1$ macht (§. 10, 2b). Von den beiden Ebenen, welche durch diese beiderseits der Normalebene liegenden Geraden nach $O_1 C_1$ gelegt werden, macht die eine mit der Halbebene, auf welcher $O_1 B_1$ liegt, einen spitzen Winkel, die andere den Nebenwinkel des gleichen spitzen Winkels (§. 9, 4c). Nun mufs $O_1 B_1$ eine dieser beiden Geraden sein und ebenso die zu OB p. f. Gerade. $O_1 B_1$ und die zu OB p. f. Gerade werden somit zusammenfallen, wenn die Winkel β und β_1 beide spitz oder beide stumpf oder beide Rechte sind. Im letzten Fall ist nämlich $O_1 B_1$ die Normalprojektion von $O_1 C_1$ auf $O_1 A_1 B_1$ selbst.

die Kantenwinkel $a' = a'_1$, $b' = b'_1$ und den Kantenwinkeln $\sphericalangle\, a = a_1$ die Ebenenwinkel $\alpha' = \alpha'_1$. Diese Polarecke sind nach c kongruent, wenn auch β' und β'_1 beide spitz oder beide stumpf oder beide Rechte sind, d. h. wenn in den Ecken O und O_1 die Kantenwinkel b und b_1 beide stumpf oder beide spitz oder beide Rechte sind. Unter diesen Bedingungen stimmen also auch die übrigen Elemente der Polarecken und somit auch die der ursprünglichen Ecken überein, d. h. sie sind kongruent.

3. Bei einem Dreikant mit zwei gleichen Kanten- und Ebenenwinkeln (§. 9, 4c) ergiebt sich im Verfolgen dieser Winkel in dem einen und andern Drehungssinn einerlei Folge von gleichen Winkeln. Daher gilt:

Ein in sich symmetrisches Dreikant oder sphärisches Dreieck ist kongruent seinem Scheiteldreikant bezw. Scheiteldreieck.

§. 15. Perspektivische Ähnlichkeit.

1. An die centrische Symmetrie einerseits und an die Parallelperspektive andererseits schliefst sich die schon im IV. Kapitel des II. Teils ausgesprochene Beziehung der perspektivischen Ähnlichkeit an. Während in der centrischen Symmetrie die Gleichheit der Strahlstrecken angenommen wurde, in der perspektivischen Kongruenz die Strahlen als von einem unendlich fernen Punkt kommend und somit alle als unendlich grofs zu bezeichnen sind, erklären wir zwei Gestalten als perspektivisch ähnlich (p. ä.) in Bezug auf einen Punkt, Ähnlichkeitspunkt, wenn mit jedem Punkt der einen ein Punkt der andern auf einem Strahl des Ähnlichkeitspunkts,

Ähnlichkeitsstrahl, liegt und die Abstände dieser Punkte vom Ähnlichkeitspunkt in konstantem Verhältnis stehen.

Wir müssen hierbei zwei Fälle unterscheiden; entweder liegt der Punkt aufserhalb der Strecke zweier entsprechenden Punkte (Fig. 39, I. und II.) und heifst äufserer Ähnlichkeits-Punkt, oder er liegt zwischen zwei entsprechenden Punkten (I. und III.) und wird innerer Ähnlichkeits-Punkt genannt.

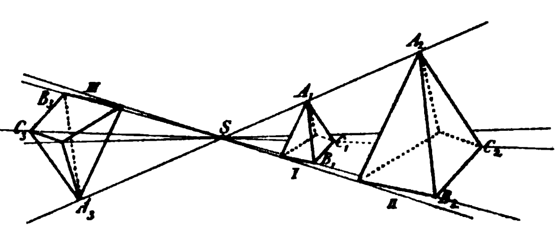


Fig. 39.

Aus der Erklärung folgt:

a) *Das zu einem Gebilde* p. ä. *ist durch den Ähnlichkeitspunkt und das Verhältnis der Strahlstrecken eindeutig bestimmt.*

b) *In* p. ä. *Figuren entspricht dem Schnittpunkt zweier Linien der Schnittpunkt der entsprechenden Linien, der Schnittlinie zweier Flächen die Schnittlinie der entsprechenden Flächen.*

2. Aus dem II. Teil §. 5, 4 folgt nun, dafs im Fall eines äufseren Ähnlichkeitspunktes die p. ä. Halbstrahlen gleichgerichtet parallel sind, bei einem innern gegengerichtet; hiernach müssen auch zwei entsprechende Halbebenen gleichseitig, bezw. gegenseitig parallel sein:

a) *In* p. ä. *Gebilden sind je zwei entsprechende Halbstrahlen oder Halbebenen gleichgerichtet bezw. gleichseitig parallel bei einem äufseren Ähnlichkeitspunkt, gegengerichtet bezw. gegenseitig parallel bei einem inneren,*

woraus dann weiter folgt:

b) *In* p. ä. *Figuren sind je zwei entsprechende Winkel von Geraden oder Ebenen einander gleich; sie liegen gleichseitig von zwei entsprechenden Ebenen bei äufserem Ähnlichkeitspunkt, gegenseitig bei innerem.*

Ebenso ergiebt sich aus II. Teil §. 5, 3:

c) *In* p. ä. *Figuren ist das Verhältnis entsprechender Strecken konstant, gleich dem Verhältnis zweier entsprechenden Strahlstrecken.*

3. Da parallele Ebenen einander p. ä. entsprechen, so folgt:

a) *Zieht man von einem Punkt aufserhalb einer Ebene Strahlen nach allen Punkten der Figuren auf letzterer, so bestimmen diese auf einer parallelen Ebene eine zu ersterer* p. ä. *Figur.*

Die perspektivisch ähnliche Lage zweier Figuren einer Ebene ist als ein besonderer Fall der p. ä. Lage in zwei parallelen Ebenen aufzufassen. Letztere Lage geht nämlich in erstere über, indem die eine Ebene der anderen unbeschränkt näher rückt.

Daher stimmen auch die Sätze über die beiden Arten der Lage überein (II. Teil, IV. Kapitel). Die Beweise für den allgemeinen Fall sind hierbei oft anschaulicher als für den besonderen, z. B.:

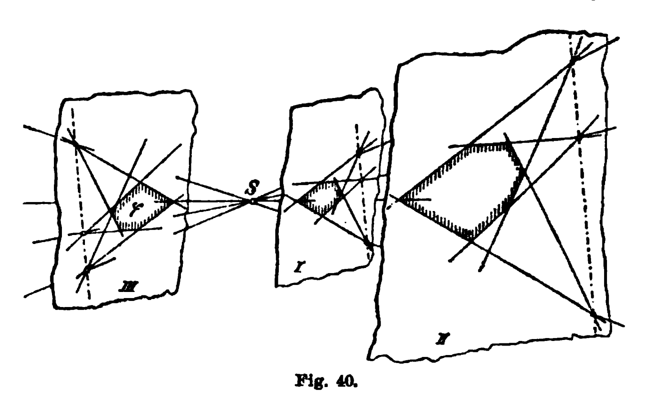


Fig. 40.

b) *Zwei Dreiecke, deren Seiten paarweise parallel sind, sind* p. ä.; d. h. wenn die Seiten von ABC (Fig. 41 a) der Reihe nach parallel den Seiten von $A_1B_1C_1$ sind, so müssen einander die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkt schneiden; denn die drei Ebenen ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 schneiden einander in diesen Geraden und die Schnittgeraden dreier Ebenen gehen durch einen Punkt. Dafs dieser Satz nun auch für den Fall, da beide Dreiecke in einer Ebene liegen (Fig. 41, b), seine Geltung behält, folgt daraus, dafs man diesen Fall als Grenzlage auffassen kann, welche sich von dem Fall zweier unbeschränkt nahe gerückten parallelen Ebenen nicht unterscheiden läfst.

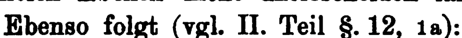


Fig. 41 a.

Ebenso folgt (vgl. II. Teil §. 12, 1a):

c) *Zwei Kreise in zwei parallelen Ebenen sind* p. ä. *in Bezug auf einen äufseren und inneren Ähnlichkeitspunkt, welche die Centrale im Verhältnis der Radien teilen*; denn jede Ebene durch die Centrale schneidet beide Kreise in parallelen Radien, deren Endpunkte auf einem Ähnlichkeitsstrahl liegen nach II. Teil §. 5, 5.

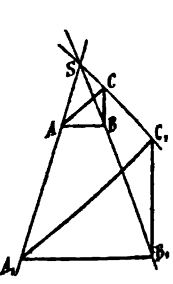


Fig. 41 b.

Auf diese Weise können die Sätze der Planimetrie (II. Teil, IV. Kapitel) mit Hülfe von stereometrischen Beziehungen bewiesen werden.

Nennen wir ebene Figuren ähnlich, welche p. ä. gelegt werden können, so giebt folgender Satz die Bedingungen für ihre perspektivische Lage:

d) *Zwei ebene ähnliche Figuren sind perspektivisch, wenn ein Halbstrahl mit seinem entsprechenden Strahl gleichgerichtet, bezw. gegen-*

gerichtet parallel ist und ebenso die anschliefsende Halbebene mit ihrer entsprechenden gleichseitig bezw. gegenseitig parallel ist.

Führen wir nun mit einer der beiden Figuren eine halbe Umdrehung in ihrer Ebene aus, so geht die gleichgerichtet parallele Lage der Halbstrahlen und Halbebenen in die gegengerichtete über oder umgekehrt, so dafs die Figuren nun wieder p. ä. liegen.

Somit folgt:

e) *Zwei ebene ähnliche Figuren können sowohl in Bezug auf einen äufseren als einen innern Ähnlichkeitspunkt* p. ä. *gelegt werden.*

Anders ist es mit körperlichen Gestalten.

4. Dadurch, dafs in p. ä. Figuren mit äufserem Ähnlichkeitspunkt zwei entsprechende Elemente gleichseitig von entsprechenden parallelen Ebenen, bei einem innern Ähnlichkeitspunkt gegenseitig liegen, wird ein wesentlicher Unterschied beider Figuren bedingt. Wie bei der perspektivischen Kongruenz, welche als ein besonderer Fall der ersteren Lage des Ähnlichkeitspunktes aufzufassen ist, die entsprechenden Ecke gleichwendig gleich oder kongruent sind, so sind sie dies auch bei einem äufseren Ähnlichkeitspunkt, da hier wie dort die Ebenen gleichseitig parallel sind. Dagegen ist bei einem inneren Ähnlichkeitspunkt wie bei der diametralen Lage (Fig. 39, II. und III.) ein Eck seinem entsprechenden Eck gegenwendig gleich.

a) *Zwei* p. ä. *Ecken sind kongruent bei äufserem Ähnlichkeitspunkt, gegenwendig gleich bei innerem.*

Wir nennen deshalb Gebilde, welche p. ä. gelegt werden können zu einem äufseren Ähnlichkeitspunkt gleichwendig ähnlich oder kurz ähnlich, zu einem inneren gegenwendig ähnlich.

Die Bedingungen der p. ä. Lage solcher Gebilde entsprechen hiernach denen der perspektivischen Kongruenz §. 13, 3b, bezw. der diametralen Lage §. 11, 4c:

b) $\left\{\begin{matrix}\textit{Gleichwendig}\\ \textit{Gegenwendig}\end{matrix}\right\}$ *ähnliche Gebilde liegen* p. ä., *wenn ein Halbstrahl und eine Halbebene des einen* $\left\{\begin{matrix}\textit{gleichgerichtet}\\ \textit{gegengerichtet}\end{matrix}\right\}$ *bezw.* $\left\{\begin{matrix}\textit{gleichseitig}\\ \textit{gegenseitig}\end{matrix}\right\}$ *parallel sind mit den entsprechenden Elementen; der Ähnlichkeitspunkt teilt die Verbindungsstrecke der Grenzpunkte beider entsprechenden Halbstrahlen* $\left\{\begin{matrix}\textit{aufsen}\\ \textit{innen}\end{matrix}\right\}$ *im Verhältnis zweier entsprechenden Strecken.*

5. Der Satz §. 11, 7b des II. Teils läfst sich auch auf körperlich-räumliche Gebilde ausdehnen und hier auf einfache Art beweisen:

Wenn zwei Gebilde p. ä. *einem dritten sind, so sind sie es auch unter sich und die drei Ähnlichkeitspunkte liegen auf einer Geraden.*

Ist nämlich $ABC\ldots$: p. ä. $A_1B_1C_1\ldots$ zu S_1 als Ä.-Punkt und $ABC\ldots$ p. ä. $A_2B_2C_2\ldots$ zu S_2 als Ä.-Punkt, so liegen A_1B_1 und

A_2B_2 in einer Ebene, da sie beide parallel AB und somit unter sich parallel sind. Diese Ebene schneidet die Ebenen AA_1A_2 und BB_1B_2 in den Geraden A_1A_2 und B_1B_2, während von letzteren beiden Ebenen S_1S_2 die Schnittgerade ist, da AA_1 und BB_1 einander in S_1, AA_2 und BB_2 in S_2 schneiden. Alle drei Schnittgeraden S_1S_2, A_1A_2, B_1B_2 gehen durch einen Punkt S (§. 1, 5 a'). Aus denselben Gründen mufs C_1C_2,.. durch den Schnittpunkt S von A_1A_2 und S_1S_2 gehen. Das Streckenverhältnis der Strahlen bleibt hierbei stets gleich $SA_1 : SA_2$.

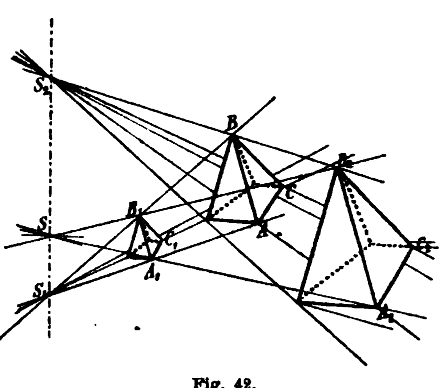


Fig. 42.

Sind die Ä.-Punkte zwischen ABC und den beiden andern Gebilden $\left\{\begin{matrix}\text{äufsere}\\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$, so sind letztere beide $\left\{\begin{matrix}\text{gleichwendig}\\ \text{gegenwendig}\end{matrix}\right\}$ zu ersteren und somit unter sich gleichwendig und haben einen äufseren Ä.-Punkt; ist der eine Ä.-Punkt zwischen ABC und den beiden andern Gebilden ein äufserer, der andere ein innerer, so sind diese gegenwendig und haben unter sich einen innern Ä.-Punkt. Es sind also entweder drei äufsere oder ein äufserer und zwei innere Ä.-Punkte vorhanden.

§. 16. Perspektivische Kongruenz und Ähnlichkeit der Rotationsflächen.

1. Zur Kongruenz der Rotationskegelflächen genügt die Übereinstimmung in den Winkeln der Seitengeraden mit der Axe; solche Flächen liegen nämlich 𝔭. 𝔨., wenn ihre Axen parallel sind; denn alle parallelen Schnittebenen durch die Axe ergeben entsprechende parallele Seitengeraden.

a) *Zwei Rotationskegelflächen mit übereinstimmenden Winkeln des Axenschnitts sind* 𝔭. 𝔨., *wenn ihre Axen parallel sind.*

Dieselben Bedingungen sind aber auch für ihre perspektivische Ähnlichkeit erforderlich; beide Flächen sind nämlich unter den genannten Bedingungen 𝔭. 𝔞̈. in Bezug auf jeden Punkt der Verbindungsgeraden der Spitzen als Centrum (mit Ausnahme der Spitzen selbst). Denn jeder Seitengeraden der einen Fläche ist eine der andern Fläche parallel; beide liegen in einer Ebene mit jener Verbindungsgeraden; ein Strahl durch einen Punkt der letzteren, welcher eine Seitengerade schneidet, trifft auch die parallele Seitengerade und die Strahlstrecken verhalten sich wie die Abstände jenes Punktes von den Spitzen.

b) *Zwei Rotationskegelflächen mit übereinstimmenden Winkeln des*

Axenschnitts sind p. ä., *wenn ihre Axen parallel sind. Jeder Punkt der Verbindungsgeraden der Spitzen kann Ä.-Punkt sein.*

2. a) *Zwei Rotationscylinderflächen mit gleichen Radien sind* p. f., *wenn ihre Axen parallel sind.*

b) *Alle Rotationscylinderflächen sind einander ähnlich. Liegen die Axen von zweien derselben parallel, so sind sie* p. ä. *in Bezug auf jeden Punkt der beiden Parallelen zu den Axen, welche den Abstand der Axen im Verhältnis ihrer Radien teilen.*

Es ergiebt nämlich irgend eine Normalebene zu den Axen zwei p. ä. Kreise in Bezug auf die Schnittpunkte der genannten Parallelen, der Ä.-Axen, als Ä.-Punkte. Daher mufs eine Ebene durch eine Ä.-Axe, welche eine der beiden Flächen in einer Seitengeraden schneidet, die andere ebenfalls schneiden und zwar in einer zu ersterer parallelen Seitengeraden; ein Strahl von einem Punkt der Ä.-Axe trifft diese parallelen Seitengeraden in p. ä. liegenden Punkten.

Denken wir uns über den Figuren des §. 12 im II. Teil normale Cylinderflächen errichtet, so ergeben sich die jenen Sätzen entsprechenden Sätze für Rotationscylinderflächen. Jeder Tangente entspricht eine Tangentialebene der Fläche.

3. a) *Zwei Kugeln mit gleichen Radien sind* p. f.; *die Strahlen entsprechender Punkte sind parallel und gleich der Centralen.*

b) *Irgend zwei Kugeln sind* p. ä. *zu einem äufsern und innern Ä.-Punkt, welche die Centrale im Verhältnis der Radien teilen.*

Es folgt dies daraus, dafs jede Ebene durch die Centrale Schnittfiguren ergeben, welche denen des §. 12 im II. Teil entsprechen. Hieraus folgt weiter:

c) *Jede Ebene durch einen Ä.-Punkt, welche die eine Kugel berührt, berührt auch die andere.*

d) *Die Ä.-Punkte zweier sich nicht einschliefsenden Kugeln sind die Spitzen der den beiden Kugeln gemeinsamen Berührungskegelflächen.*

e) *Von drei Kugeln liegen die drei äufseren Ä.-Punkte auf einer Geraden, ebenso je zwei innere und ein äufserer. Die äufsere Ä.-Axe ist die Schnittgerade der beiden den drei Kugeln gemeinsamen Berührungsebenen, von welchen die drei Kugeln gleichseitig liegen; die Ä.-Axe durch einen äufsern und zwei innere Ä.-Punkte ist die Schnittgerade der beiden Berührungsebenen, von welchen eine Kugel je einerseits, die beiden andern andrerseits liegen.*

4. Zwei Kugeln gestatten noch eine zweite perspektivische Zuordnung ihrer Punkte, weche §. 23 des II. Teils entspricht. Denkt man sich eine Kugel entstanden durch Rotation eines Hauptkreises um die Centrale eines Punktes, so beschreibt die Polare des letzteren eine zur Centralen normale Ebene, welche man Polarebene des Punktes nennt; diesen selbst nennt man den Pol der letzteren. Jede

Ebene durch die Centrale des Pols ergiebt eine Schnittfigur, in welcher eine Sehne auf einem Strahl des Poles durch diesen und die Polarebene harmonisch geteilt wird, d. h.:

a) *Die Sehnen aller Strahlen eines Punktes durch eine Kugel werden durch diesen Punkt und dessen Polarebene harmonisch geteilt.*

Entsprechend §. 23, 1 des II. Teils folgt in gleicher Weise:

b) *Die Schnittpunkte einer Kugelfläche mit zwei Strahlen eines Punktes liegen so, dafs ihre Verbindungsgeraden einander paarweise in der Polarebene des Punktes schneiden.*

Aus §. 23, 3 folgt, wenn wir die nicht p. ä. liegenden Punkte eines Ä.-Strahls durch zwei Kugeln inverse Punkte nennen:

c) *In zwei Kugeln schneiden einander die Verbindungsgerade zweier Punkte der einen Kugel und die Verbindungsgerade der inversen Punkte in einer einzigen Normalebene zur Centralen, der Mittelparallelebene der beiden Polarebenen des Ä.-Punkts. Diese Normalebene ist der geometrische Ort des Punkts, welcher für beide Kugeln gleiche Potenz hat, die Potenzebene beider Kugeln.*

d) *Die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden einander in einer Geraden (Potenzgerade), welche normal der Centralebene der Kugeln ist.* (II. Teil, §. 23, 7).

Die weitere Ausführung siehe bei den Aufgaben.

Zusatz: Auch auf die durch eine Gerade erzeugten Rotationsflächen läfst sich diese perspektivische Zuordnung der Punkte anwenden.

Anmerkung. Da auch der Ä.-Punkt und die Potenzebene die Strecke zweier inversen Punkte harmonisch teilt (wie aus II. Teil §. 23, 4b u. §. 20, 4 folgt), so läfst sich diese Zuordnung als Symmetrie in Bezug auf einen Punkt und eine Ebene zugleich bezeichnen, indem man zwei Gebilde symmetrisch zugeordnet in Bezug auf ein Centrum und eine Symmetrieebene nennt, in welchen je zwei entsprechende Punkte auf einem Strahl des Centrums so liegen, dafs ihre Verbindungsstrecke durch das Centrum und die Symmetrieebene harmonisch geteilt wird. Von dieser Auffassung der Symmetrie ist dann die Symmetrie in Bezug auf eine Ebene allein (§. 8), sowie in Bezug auf einen Punkt allein (§. 11) nur ein spezieller Fall; bei ersterer ist das Centrum, bei letzterer die S.-E. in unendliche Entfernung hinausgerückt.

II. Abschnitt.

Bestimmung der Gröfse räumlicher Gebilde.

Fünftes Kapitel.

Die Oberflächen der Körper.

§. 17. Prisma und Cylinder.

1. Wenn eine Gerade (Erzeugende) am Umfang eines Vielecks verschoben wird (so dafs sie immer die parallele Richtung beibehält), so beschreibt dieselbe einen prismatischen Flächenzug. Derselbe besteht aus soviel Parallelstreifen von Ebenen, als das Vieleck Seiten oder Ecken hat. Der von diesem Flächenzug umschlossene Raum heifst ein prismatischer Raum. Ist das Vieleck ein centrisches, so ist der prismatische Flächenzug axial in Bezug auf die durch das Centrum parallel zu der Erzeugenden gezogenen Gerade als Axe (§. 3, 2d).

Wird ein $n$seitiger prismatischer Flächenzug von zwei parallelen Ebenen durchschnitten, die nicht parallel der Erzeugenden sind, so heifst der allseitig dadurch begrenzte Raum ein Prisma. Die Schnittflächen der beiden parallelen Ebenen heifsen Grundflächen, ihre Seiten Grundkanten, die begrenzten Flächen und Kanten des prismatischen Flächenzugs Seitenflächen und Seitenkanten. Die Gesamtheit der Seitenflächen wird Mantel des Prismas genannt. Die Grundflächen und der Mantel bilden zusammen die Oberfläche des Prismas. Der Abstand der Grundflächen heifst Höhe des Prismas.

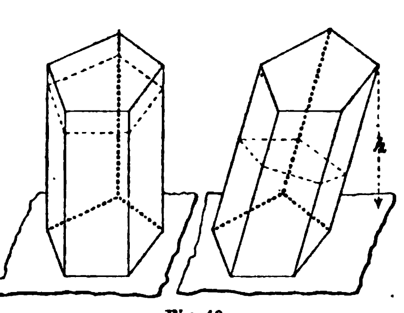


Fig. 43.

Aus der Entstehungsart folgt:

a) *Die Grundflächen eines Prismas sind* $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{l}$ *und mit ihnen jede parallele Schnittfläche.*

b) *Die Seitenflächen eines Prismas sind Parallelogramme; ebenso ist jede Schnittfläche parallel einer Seitenkante ein Parallelogramm.*

Das Prisma heiſst ein gerades oder schiefes, jenachdem die Seitenkanten auf der Grundfläche normal stehen oder nicht. Im ersteren sind die Seitenflächen Rechtecke. Das gerade Prisma heiſst regelmäſsig, wenn seine Grundflächen regelmäſsige Vielecke sind.

Ist die Grundfläche eines Prismas ein Parallelogramm, so ist der Körper von drei Paaren paarweise p. f. Parallelogramme begrenzt und wird Parallelflächner (Parallelepipedon) genannt; jede Fläche desselben kann als Grundfläche aufgefaſst werden. Sind drei an einem Eck desselben zusammenstoſsende Kanten normal zu einander, so heiſst er ein Quader, und sind zugleich diese drei Kanten einander gleich, so heiſst er Würfel; derselbe ist von sechs Quadraten begrenzt. Sind die drei Kanten eines Ecks an einem schiefen Parallelflächner einander gleich und ebenso deren Winkel, so heiſst der Körper Rhomboëder.

2. Gleitet eine Gerade (Erzeugende) an dem Umfang eines Kreises (Leitlinie) hin, während sie sich stets parallel bleibt, so ergiebt die Gesamtheit dieser Lagen der Geraden eine Cylinderfläche. In jeder Lage wird die Erzeugende Seitengerade der Cylinderfläche genannt. Da ein Kreis stets als Grenzfigur eines regelmäſsigen n-ecks aufgefaſst werden kann, in welchem die Seitenzahl unbegrenzt wächst, die Gröſse der Seiten unbegrenzt abnimmt, so ist die Cylinderfläche als ein besonderer Fall des axialen prismatischen Flächenzugs anzusehen.

Die Axe ist die durch den Mittelpunkt des Kreises parallel zur Erzeugenden gezogene Gerade; eine durch die Axe gelegte Ebene heiſst Axenschnitt.

Ist die Erzeugende normal zur Ebene des Leitkreises, so entsteht eine Rotationscylinderfläche (§. 7, 3).

Der Begriff der Cylinderfläche kann weiter ausgedehnt werden, indem jede beliebige Kurve (Fig. 44) als Leitlinie gelten kann. Für die folgenden Berechnungen kommt jedoch nur obige beschränktere Fassung des Begriffs zur Anwendung.

Wird eine Cylinderfläche von zwei parallelen Ebenen durchschnitten, die nicht parallel der Seitengeraden sind, so wird der durch diese drei Flächen begrenzte Raum Cylinder genannt. Derselbe ist als eine besondere Art von Prisma zu betrachten. Daher gilt auch für Cylinder:

Fig. 44.

a) *Die Grundflächen eines Cylinders sind* p. f. *und mit ihnen jede parallele Schnittfläche.*

b) *Jede Schnittfläche parallel einer Seitengeraden eines Cylinders ist ein Parallelogramm.*

Wir unterscheiden auch hier gerade und schiefe Cylinder

je nach der Lage der Seitengerade gegen die Grundflächen. Der Teil der Cylinderfläche zwischen beiden Grundflächen heifst Mantel.

3. Die Rechtecke, welche den Mantel eines geraden Prismas bilden, lassen sich in eine Ebene so abwickeln, dafs sie zusammen ein einziges Rechteck bilden. Das gleiche gilt von dem Mantel des geraden Cylinders, da er als besonderer Fall des geraden Prismas aufzufassen ist. Der Umfang der Grundfläche bildet die eine Seite des Rechtecks, die Seitenkante bezw. Seitenstrecke die zweite Seite. Daher gilt für den Flächeninhalt dieses Mantels:

Der Mantel eines geraden Prismas oder Cylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfang der Grundfläche und einer Seitenkante bezw. Seitenstrecke.

Zusatz: a) Ist a die Grundkante eines regelmäfsigen $n$seitigen Prismas und s die Seitenkante, so ist die gesamte Oberfläche desselben:

$$na\left[s + \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{2R}{n}\right].$$

b) Die Oberfläche eines Quaders, dessen Kanten a, b, c sind, ist $2(ab + ac + bc)$; die des Würfels mit der Kante a ist $6a^2$.

c) Von einem geraden Rotationscylinder, dessen Radius r und Seitenstrecke s ist, ist der Mantel $2\pi rs$, die Oberfläche $2\pi r(r + s)$.

4. In einem schiefen Prisma oder Cylinder ist eine Schnittfläche normal zur Seitengeraden, die Normalschnittfläche, die Normalprojektion f_1 der Grundfläche f. Bilden beide Ebenen den Winkel α, so ist $f_1 = f\cos\alpha$, $f = \frac{f_1}{\cos\alpha}$ (§. 6, 3b).

Ist der Normalschnitt ein Kreis mit dem Radius b, die Grundfläche eine Ellipse, in welcher der zur Schnittgeraden beider Ebenen normale Axenschnitt die Hauptaxe $2a$ ergiebt, so ist $2b = 2a\cos\alpha$ und die Fläche ε der Ellipse: $\varepsilon = \frac{\pi b^2}{\cos\alpha} = \pi ab$. Nun ist auch 2b gleich der auf der Mitte der Hauptaxe normalen Sehne der Ellipse, da diese der Normalschnittfläche parallel ist; a und b heifsen die Halbaxen der Ellipse; daher folgt:

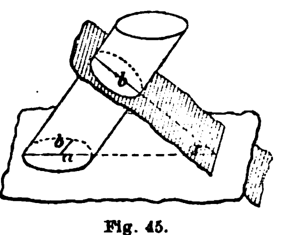


Fig. 45.

Der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem Produkt von π und den beiden Halbaxen.

5. Wird der Mantel eines schiefen Prismas abgewickelt, so werden die Seiten eines Normalschnitts n_1, n_2, n_3 ... zusammen auf eine Gerade fallen, da sie normal zu den untereinander parallelen Seitengeraden sind. Die Seitenflächen sind dann Parallelogramme, welche in einer Seite s übereinstimmen, während die zu diesen Seiten ge-

hörigen Höhen n_1, n_2, n_3 ... sind. Daher ist der Mantel

$$s\,(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots).$$

Hiermit ist bewiesen:

Der Mantel eines schiefen Prismas oder Cylinders ist gleich dem Produkt des Umfangs eines Normalschnitts mit einer Seitenkante bezw. Seitenstrecke.

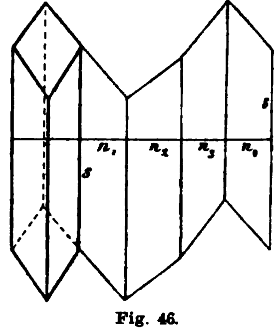


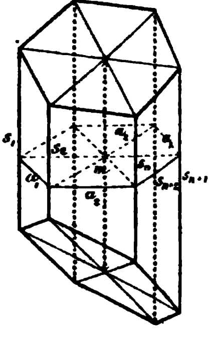
Fig. 46.

Zusatz. a) Ist der Normalschnitt ein regelmäfsiges $n$eck mit der Seite a, ist die Seitenkante s und ist der Winkel der Grundfläche mit dem Normalschnitt α, so ist die Oberfläche $na\left[s + \frac{a}{2\cos\alpha}\cdot\operatorname{cotg}\frac{2R}{n}\right]$.

b) Ist der Normalschnitt eines schiefen Cylinders ein Kreis mit dem Radius b, ist s die Seitengerade und a die grofse Halbaxe der Grundfläche, so ist die Oberfläche $2\pi b\,(a + s)$.

6. Wird ein prismatischer Flächenzug oder eine Cylinderfläche durch zwei nicht parallele Ebenen begrenzt, so heifst der abgegrenzte Raum ein schiefabgeschnittenes Prisma bezw. ein schiefabgeschnittener Cylinder.

In einem schiefabgeschnittenen axialen $2n$seitigen Prisma seien die Seiten eines Normalschnitts a_1, $a_2 \cdots a_n$, a_1, $a_2 \cdots a_n$ und die Seitenkanten s_1, $s_2 \cdots s_n$, s_{n+1}, $s_{n+2} \cdots s_{2n}$. Alsdann ist der Mantel zusammengesetzt aus $2n$ Trapezen, von welchen der Inhalt zweier gegenüberliegenden den Wert ergiebt:


Fig. 47.

$$a_1 \cdot \frac{s_1 + s_2}{2} + a_1\,\frac{s_{n+1} + s_{n+2}}{2}$$

$= \frac{a_1}{2}\,[s_1 + s_{n+1} + s_2 + s_{n+2}]$. Nun ist aber die Axe m Mittelparallele zu den Gegenseiten s_1 und s_{n+1}, s_2 und s_{n+2}, somit $s_1 + s_{n+1} = 2m = s_2 + s_{n+2}$. Daher ist der Inhalt beider Trapeze $\frac{a_1}{2}\cdot 4m = 2a_1 m$; ebenso folgt für ein zweites Paar gegenüberliegender Trapeze $2a_2$m u. s. w., daher der Mantel $(2a_1 + 2a_2 + \cdots 2a_n)\,m = u\cdot m$, wenn mit u der Umfang des Normalschnitts bezeichnet wird, d. h.:

Der Mantel eines schiefabgeschnittenen axialen Prismas oder Cylinders ist gleich dem Produkt seiner Axe und des Umfangs des Normalschnitts.

§. 18. Pyramide und Kegel.

1. Wenn eine Gerade, während sie in einem Punkt festbleibt, auf einem Vieleck hingleitet, das nicht in einer Ebene mit dem Punkt liegt, so entsteht ein pyramidaler Flächenzug. Der von ihm eingeschlossene pyramidale Raum besteht aus einem Eck und seinem Scheiteleck. Ist das Vieleck ein centrisches und liegt der feste Punkt in der Normale des Mittelpunkts, so ist der pyramidale Flächenzug axial in Bezug auf diese Normale als Axe (§. 3, 3).

Der durch den pyramidalen Flächenzug und die Ebene des Vielecks begrenzte Raum heifst Pyramide, die Ebene heifst Grundfläche, ihre Seiten Grundkanten, die übrigen Flächen, welche Dreiecke bilden, heifsen Seitenflächen, die übrigen Kanten Seitenkanten, die Gesamtheit der Seitenflächen Mantel, der Abstand der Spitze von der Grundfläche Höhe.

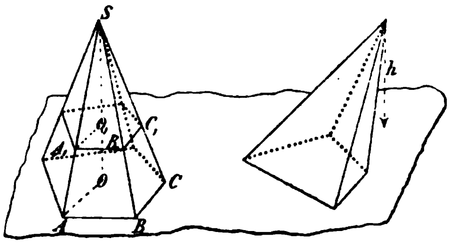


Fig. 48a. u. 48b.

Ist der pyramidale Flächenzug axial, so heifst eine Ebene durch die Axe Axenschnitt und insbesondere der Axenschnitt, der zugleich die Höhe enthält, Hauptaxenschnitt. Ist die Axe selbst normal zur Grundfläche, so heifst die Pyramide axial oder gerade.

Ist die Grundfläche ein regelmäfsiges Vieleck und die Spitze normal über der Mitte der Grundfläche, so heifst die Pyramide regelmäfsig. Die Seitenflächen derselben sind gleichschenkelige Dreiecke (§. 6, 1b). Aus der Übereinstimmung der Kantenwinkel an je zwei Ecken der Grundkanten folgt die Kongruenz der Ecke; daher müssen alle Seitenflächen und ebenso alle Seitenkanten die gleichen Winkel mit der Grundfläche bilden.

Eine Pyramide, deren Grundfläche ein Dreieck ist, heifst Tetraëder; sie wird von vier Dreiecken begrenzt und es kann jede Fläche als Grundfläche angenommen werden. Ist jede derselben ein regelmäfsiges Dreieck, so ist der Körper ein regelmäfsiges Tetraëder.

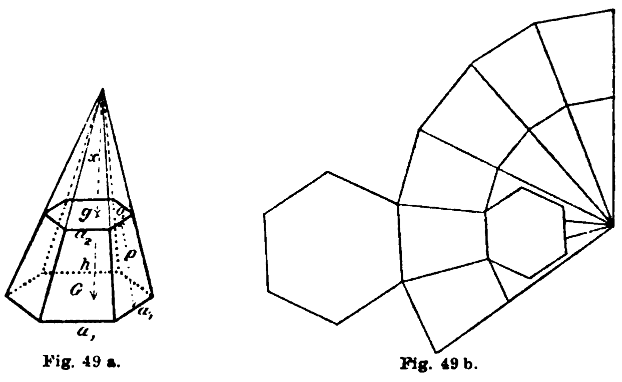
Aus §. 15, 3a folgt:

In einer Pyramide ist jede zur Grundfläche parallele Schnittfläche p. ä. *mit dieser zur Spitze als Ä.-Punkt. Beide Flächen verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer bezüglichen Abstände von der Spitze.*

Das letztere folgt aus der Übereinstimmung der Seitenverhältnisse mit dem der Strahlen von der Spitze und aus II. Teil, §. 25, 5.

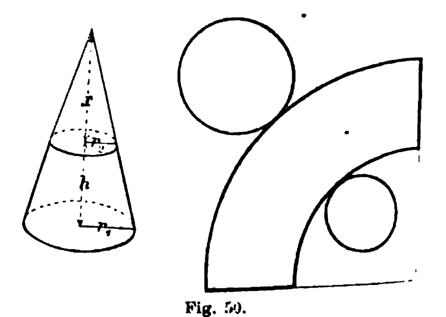
Wird ein pyramidaler Flächenzug einerseits der Spitze von zwei

parallelen Ebenen begrenzt, so heifst der durch diese Flächen begrenzte Raum ein Pyramidenstumpf. Der Abstand der parallelen Flächen


Fig. 49 a. Fig. 49 b.

heifst seine Höhe. Bei einem Pyramidenstumpf sind die Seitenflächen Trapeze, bei einem regelmäfsigen Pyramidenstumpf Antiparallelogramme.

2. Gleitet eine Gerade (als Erzeugende) an dem Umfang eines Kreises (als Leitlinie) hin, während sie in einem Punkt aufserhalb der Fläche dieses letzteren fest bleibt, so entsteht eine Kegelfläche. Dieselbe kann als Grenzgebilde eines pyramidalen Flächenzugs aufgefafst werden. Die Verbindungsgerade der Spitze mit dem Mittelpunkt des Leitkreises wird Axe genannt. Ist die Axe normal zur Ebene des Leitkreises, so ist die Fläche eine Rotationskegelfläche. Die Erzeugende heifst in jeder Lage Seitengerade der Fläche. Der


Fig. 50.

Teil des Raumes, welcher durch die Kegelfläche und die Ebene des Leitkreises begrenzt wird, heifst ein Kegel (Conus). Er heifst gerader Kegel oder Rotationskegel, wenn die Axe normal zur Ebene des Leitkreises ist, im andern Fall schief. Die Bezeichnungen Grundfläche, Höhe, Axenschnitt, Hauptaxenschnitt sind leicht von der Pyramide auf den Kegel zu übertragen. Ebenso folgt:

Jeder Schnitt parallel der Grundfläche eines Kegels ist ein Kreis, welcher mit der Grundfläche p. ä. *ist zur Spitze des Kegels als Ä-Punkt.*

Der zwischen zwei parallele Ebenen fallende Teil des Kegels heifst Kegelstumpf.

3. Wird der Mantel einer regelmäfsigen $n$seitigen Pyramide in

eine Ebene abgewickelt, so entstehen n gleichschenkelige, kongruente Dreiecke, deren Grundkanten einander gleich sind. Ist h die Höhe eines dieser Dreiecke zur Grundkante a, so ist der Flächeninhalt $\frac{ah}{2}$ und die ganze Mantelfläche $\frac{nah}{2} = \frac{na}{2} \cdot h$. Daraus folgt:

Der Mantel einer regelmäſsigen Pyramide oder eines geraden Kegels ist gleich dem Produkt des halben Umfanges seiner Grundfläche mit der Höhe eines Seitendreiecks, bezw. einer Seitenstrecke.

Für den Kegel folgt dies auch daraus, daſs der abgewickelte Mantel einen Sektor bildet, dessen Radius gleich der Seitenstrecke und dessen Bogen gleich dem Umfang der Grundfläche.

Zusatz. a) Von einer regelmäſsigen $n$seitigen Pyramide mit der Grundkante a und der Seitenkante s ist die Oberfläche:

$$\frac{na}{2}\left[\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}\right].$$

b) Von einem geraden Kegel mit dem Radius r und der Seitenstrecke s ist der Mantel $\pi r s$.

4. Sind in einem regelmäſsigen $n$seitigen Pyramidenstumpf a_1 und a_2 die Seiten der Grundfläche, p die Höhe eines Trapezes des Mantels, so ist der Inhalt eines solchen $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot p$ und der ganze Mantel $n \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot p = \frac{na_1 + na_2}{2} \cdot p$, wobei na_1 und na_2 die Umfänge der Grundflächen sind. Der Mantel des geraden Kegelstumpfs kann ebenfalls in elementare Trapeze zerlegt werden. Statt der Seiten können auch die Mittelparallelen der Trapeze in Rechnung gezogen werden, welche zusammen den Umfang des Schnitts der Mittelparallelebene zu den Grundflächen bilden.

Der Mantel eines regelmäſsigen Pyramidenstumpfes oder eines geraden Kegelstumpfes ist gleich dem Produkt des arithmetischen Mittels der Umfänge der Grundflächen (oder des Umfangs des Mittelparallelschnitts) mit der Höhe einer Seitenfläche, bezw. mit einer Seitenstrecke.

Zusatz. Sind r_1 und r_2 die Radien der Grundflächen, s die Seitenstrecke eines geraden Kegelstumpfes, so ist der Mantel $= \pi(r_1 + r_2)s$, oder, wenn ϱ der Radius des mittleren Schnittes ist, $= 2\pi\varrho s$.

5. Während in einem Kegel die der Grundfläche nicht parallelen Schnittebenen Kurven (die sog. Kegelschnitte) ergeben, deren Eigenschaften in dem III. Abschnitt abgeleitet werden sollen, ist in einem schiefen Kegel stets noch eine Lage der Ebene vorhanden, in welcher der Schnitt wiederum ein Kreis ist. Um diese Lage kurz zu bezeichnen, wollen wir zwei Ebenen antiparallel zu 2 Strahlen

eines Punktes nennen, wenn sie auf der Ebene dieser Strahlen normal stehn und wenn ihre Schnittgeraden mit dieser Ebene antiparallel zu den beiden Strahlen sind. Wir behaupten nun:

Jede Schnittebene eines schiefen Kegels, welche mit der Grundfläche antiparallel ist zu den Seitengeraden des Hauptaxenschnittes, ergiebt einen Kreis als Schnittlinie.

Sind nämlich SB_1A und SA_1B die beiden genannten Seitengeraden, AB und A_1B_1 die antiparallelen Schnittgeraden der Grundfläche und der Schnittebene mit der Axenebene, sodafs $\sphericalangle SAB = SA_1B_1$, und legt man durch einen Punkt Y der fraglichen Schnittlinie eine Ebene parallel zur Grundfläche, welche die Seitengeraden SA und SB in A_2 und B_2 treffe, so ist die Schnittlinie dieser Ebene mit dem Kegel ein Kreis (2); die Schnittgerade XY der zur Grundfläche parallelen und der antiparallelen Ebene ist normal zur Ebene SAB (§. 5, 1′ und §. 4, 3e) und somit XY normal zu A_1B_1 und zu A_2B_2. Die Ordinate XY des Durchmessers A_2B_2 giebt die Gleichung $\overline{XY}^2 = A_2X \cdot XB_2 = A_1X \cdot XB_1$; das letztere folgt daraus, dafs A_1B_2 antiparallel B_1A_2 (Teil II §. 8, 1). Daher ist jeder Punkt Y der Schnittlinie ein Punkt des um A_1B_1 als Durchmesser beschriebenen Kreises (Teil II §. 9, 3c).

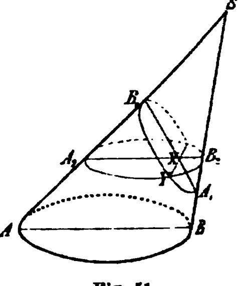


Fig. 51.

§. 19. Die Kugel und andere Rotationsflächen.

1. Eine Ebene teilt eine Kugelfläche in 2 Teile, deren jeder Kugelhaube genannt wird. Der durch die Haube und die Schnittebene begrenzte Körper heifst Kugelabschnitt oder Segment. Unter der Höhe der Haube oder des Kugelabschnitts versteht man die Normalstrecke von dem Mittelpunkt der Grundfläche (d. i. des Schnittkreises) bis zur Haube. — Zwei parallele Ebenen begrenzen auf der Kugelfläche eine zwischen ihnen liegende Kugelzone; der entsprechende Körperteil der Kugel heifst körperliche Zone; der Abstand beider parallelen Ebenen oder Grundflächen heifst die Höhe der Zone.

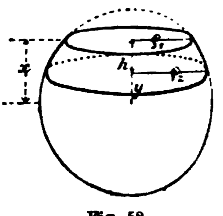


Fig. 52.

Wie die Kugel durch Rotation eines Halbkreises um einen Durchmesser entsteht, so erhält man einen sich an die Kugel anschliefsenden Rotationskörper, wenn ein den Halbkreis berührender Geradenzug um denselben Durchmesser rotiert. Letzterer Körper besteht alsdann aus Kegeln, bezw. Kegelstumpfen oder Cylindern, deren Mantelflächen sich um so mehr an die Kugel anschliefsen, je kleiner die

Seiten derselben angenommen werden. Ist s_1 eine Seite eines solchen Mantels, ϱ_1 der Radius des mittleren Schnittkreises, so ist der Mantel $2\pi\varrho_1 s_1$ (§. 18, 4, Zusatz). Auch für den Fall, dafs der Kegel zu einem ebenen Kreis abgeflacht ist, gilt diese Formel. Zieht man von einem Grenzpunkt von s_1 die Höhe h_1 des Zonenelementes und den Kugelradius r nach dem Endpunkt des (nach dem Berührungspunkt von s gezogenen) Radius ϱ_1, so entstehen zwischen s_1 und h_1, bezw. r und ϱ_1 ähnliche Dreiecke, da die Seiten dieser Dreiecke paarweise zu einander normal sind; daher ist $s_1 : h_1 = r : \varrho_1$ oder $\varrho_1 s_1 = r h_1$. Folglich ist die Fläche des Zonenelementes $= 2\pi r \cdot h_1$; für ein zweites, dessen Höhe h_2, ist sie $= 2\pi r \cdot h_2$ u. s. w., also für die ganze Zone oder Haube $2\pi r\,(h_1 + h_2 + \ldots) = 2\pi r h$, wenn h die Höhe der Haube oder Zone ist. Somit:

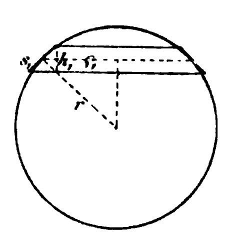


Fig. 53.

$$\boldsymbol{H = 2\pi r h.}$$

Der Flächeninhalt einer Haube oder Zone ist gleich dem Produkt des Umfangs eines Hauptkreises mit der Höhe derselben.

Diese Fläche ist also gleich dem Mantel eines Cylinders von gleicher Höhe, dessen Radius gleich dem Kugelradius ist.

Zusatz. a) Ist s die Sehne vom Umfang der Grundfläche einer Haube bis zum Endpunkt der Höhe, so ist $s^2 = 2rh$, folglich die Oberfläche der Haube $= \pi s^2$, d. i. gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Radius s ist.

b) Ist ϱ der Radius der Grundfläche der Haube, so ist $\varrho^2 + h^2 = s^2$, folglich der Inhalt der Haube $\pi\,(\varrho^2 + h^2)$.

2. Die gesamte Oberfläche O der Kugel ist zusammengesetzt aus Hauben oder Zonen, deren Gesamthöhe $2r$ ist; daher ist $O = 2\pi r \cdot 2r$ oder

$$\boldsymbol{O = 4\pi r^2.}$$

Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so grofs als die Fläche eines Hauptkreises.

3. Wird eine Kugelfläche von einem Keil durchschnitten, dessen Kante durch den Mittelpunkt geht, so begrenzt dieser auf der Kugeloberfläche ein sphärisches Zweieck. Der Winkel des Keils heifst Winkel des sphärischen Zweiecks; er ist zugleich der Winkel der Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Hauptkreise, die das Zweieck begrenzen. Es ergiebt sich sofort, dafs zu gleichen Winkeln auch gleiche sphärische Zweiecke einer Kugel gehören, woraus dann weiter folgt:

Fig. 54.

Ein sphärisches Dreieck verhält sich zur Kugeloberfläche, wie sein Winkel zu 4R.

Ist α der Winkel, so ist die Oberfläche Z des Zweiecks:
$Z = \frac{\text{arc}\,\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi r^2$ oder

$$\mathbf{Z = 2r^2\,arc\,\alpha.}$$

4. Drei Hauptkreise einer Kugel, die einander in den 3 Punkten ABC und den diametralen Punkten $A_1B_1C_1$ schneiden, bestimmen 8 sphärische Dreiecke auf der Kugel, von welchen je zwei z. B. ABC und $A_1B_1C_1$, diametral sind. Dem sphärischen Dreieck ABC entspricht am Mittelpunkt O der Kugel ein Dreikant $O(ABC)$; errichtet man zu 2 Kantenwinkeln AOB und BOC desselben die winkelhalbierenden Normalebenen, welche einander in dem Durchmesser MOM_1 schneiden mögen, so ist $\sphericalangle AOM = BOM = COM$ (§. 10, 1a'). Das sphärische Dreieck AMB ist daher in sich symmetrisch (§. 9, 4b) und als solches kongruent dem diametralen Eck $A_1M_1B_1$ (§. 14, 3); ebenso ist $BMC \simeq B_1M_1C_1$ und $CMA \simeq C_1M_1A_1$. Die beiden diametralen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ bestehn somit aus kongruenten Teilen, woraus folgt:

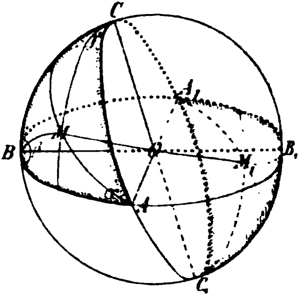


Fig. 55.

a) *Sphärische Scheiteldreiecke sind inhaltsgleich.*

Sind die Winkel des sphärischen Dreiecks bei A, B, C der Reihe nach α, β, γ, und nehmen wir dieses Dreieck mit je einem an einer Seite angrenzenden zusammen zu einem sphärischen Zweieck, so folgt, wenn r der Kugelradius ist:

$$\begin{aligned} ABC + BCA_1 &= 2r^2\,\text{arc}\,\alpha \\ BCA + CAB_1 &= 2r^2\,\text{arc}\,\beta \\ CAB + ABC_1 &= 2r^2\,\text{arc}\,\gamma. \end{aligned}$$

Die Addition ergiebt [mit Berücksichtigung, dafs $BCA_1 = B_1C_1A$ und dafs

$$CAB + B_1C_1A + CAB_1 + ABC_1 = 2\pi r^2$$

nämlich gleich der Halbkugel] für die Oberfläche den Wert:

$$2ABC = 2r^2\,[\text{arc}\,(\alpha + \beta + \gamma) - \pi].$$

oder

$$\mathbf{\Delta = r^2\,arc\,(\alpha + \beta + \gamma - 2R).}$$

Man nennt nun den Überschufs der Winkel des sphärischen Dreiecks über $2R$ den sphärischen Excefs desselben, woraus folgt:

b) *Der Inhalt eines sphärischen Dreiecks ist gleich dem Produkt des Arcus des sphärischen Excesses mit dem Quadrat des Radius.*

5. Rotiert irgend ein Geradenzug $ABCD$ um eine Axe a und sind die Mitten der Strecken desselben der Reihe nach um s_1, s_2, $s_3 \ldots$ von der Axe entfernt, so ist die Rotationsfläche (§. 18, 4):

$$2\pi s_1 \cdot \overline{AB} + 2\pi s_2 \cdot \overline{BC} + 2\pi s_3 \cdot \overline{CD} + \cdots$$
$$= 2\pi (s_1 \cdot \overline{AB} + s_2 \cdot \overline{BC} + \cdots).$$

Fig. 56.

Die Mechanik lehrt, dafs der Schwerpunkt des schweren Geradenzugs $ABCD\ldots$ von der Axe um eine Strecke s entfernt ist, welche bestimmt ist durch die Gleichung:

$$s = \frac{s_1 \cdot \overline{AB} + s_2 \cdot \overline{BC} + s_3 \cdot \overline{CD} + \cdots}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \cdots}.$$

Hiernach ist die Oberfläche:

$$2\pi s(AB + BC + CD + \cdots).$$

Da eine Kurve stets als aus unbeschränkt vielen und kleinen geradlinigen Elementen zusammengesetzt betrachtet werden kann, so folgt allgemein:

Der Inhalt einer Rotationsfläche ist gleich dem Produkt der Länge der Erzeugenden mit dem Weg, welchen der Schwerpunkt derselben beschreibt.

Der Satz gilt auch für den Fall, dafs dieser Weg kein vollständiger Kreis ist.

§. 20. Vielflächner, insbesondere regelmäfsige Vielflächner.

1. Unter einem fFlächner (Polyeder) verstehen wir einen Körper d. i. einen allseitig geschlossenen Raum, der von f Ebenen begrenzt ist. Wir fassen im Folgenden nur solche fFlächner ins Auge, deren Oberfläche von einer Geraden jeweils nur in 2 Punkten geschnitten wird, die also keine konkaven Ecken, d. i. keine solchen, die in den Körperraum hineingewendet sind, haben.

Um von einem solchen fFlächner den Zusammenhang zwischen der Anzahl seiner Flächen, Ecke und Kanten zu bestimmen, projicieren wir seine Flächen normal auf eine Ebene. Den Umrifs dieser Normalprojektion bildet ein Vieleck, von welchem die Projektionen desjenigen Teiles der Flächen, welcher der Projektionsebene abgewandt ist, eingeschlossen sind und ebenso die Projektionen des Teiles der Flächen, welcher der Projektionsebene zugewandt ist. Hat der fFlächner k Kanten, so bilden die Projektionen des ersten und des zweiten Teils zusammen fVielecke, in welchen die Anzahl der Winkel $2k$ ist, da jede Projektion einer Kante 2 Vielecken angehört und jedes Vieleck

ebensoviele Winkel als Kanten hat. Daher ist die Summe aller Winkel der Projektionen der Flächen $s = 2k \cdot 2R - f \cdot 4R = (k - f) \cdot 4R$; denn in jedem Vieleck von p Winkeln ist die Winkelsumme $p \cdot 2R - 4R$ (I. Teil §. 17, 6).

Hat der fFlächner e Ecke, so projiciert sich ein Teil e_1 derselben als Ecke des Umrisses und die übrigen e_2 als innere Ecke der Vielecke. Daher ist die eben berechnete Winkelsumme auch gleich $e_2 \cdot 4R$ (um jeden Eckpunkt $4R$) vermehrt um die doppelte Summe der Winkel des Umrisses, da diese Umrifswinkel erstens für denjenigen Teil in Rechnung kommen, welcher der Projektionsebene ferner liegt und zweitens für den näher liegenden Teil; somit ist $s = e_2 \cdot 4R + 2(2e_1 - 4)R = 4(e_1 + e_2 - 2)R = 4(e - 2)R$. Aus beiden Werten für s folgt: $k - f = e - 2$ oder:

$$\boldsymbol{e + f = k + 2.}$$

Die Zahl der Kanten eines Vielflächners ist um 2 kleiner, als die Summe der Zahlen von Flächen und Ecken (Euler).

2. Regelmäfsig nennen wir einen fFlächner, dessen Berührungsflächen regelmäfsige kongruente Vielecke und dessen Ecke kongruent sind. Ein solcher kann kein konkaves Eck haben, da in diesem Fall alle Ecke konkav sein müssten, was undenkbar.

Die Zahl der kongruenten regelmäfsigen Vielecke, die ein Eck bilden können, ist dadurch beschränkt, dafs die Summe der Kantenwinkel s nicht $4R$ betragen darf (§. 9, 8a).

Es können ein Eck bilden:

I. Drei regelmäfsige Dreiecke ($s = 2R$).

II. Drei regelmäfsige Vierecke ($s = 3R$).

III. Vier regelmäfsige Dreiecke ($s = \frac{8}{3}R$).

IV. Drei regelmäfsige Fünfecke ($s = \frac{18}{5}R$).

V. Fünf regelmäfsige Dreiecke ($s = \frac{10}{3}R$).

Dagegen können 3 regelmäfsige Sechsecke, sowie 6 regelmäfsige Dreiecke u. s. w. kein Eck bilden, da ihre Winkelsumme $4R$ erreicht.

Wird jedes Eck des fFlächners von p Flächen gebildet, deren jede z Seiten oder Ecke hat, so treten an jedem der e Ecke p Kanten zusammen und es ist $pe = 2k$, da jede Kante von 2 Ecken begrenzt wird; ferner ist $zf = 2k$, da jede Kante 2 Flächen begrenzt. Somit ist $k = \frac{zf}{2}$, $e = \frac{2k}{p} = \frac{zf}{p}$ und es folgt aus 1:

$$\frac{zf}{p} + f = \frac{zf}{2} + 2, \qquad f = \frac{4p}{2p - z(p-2)}.$$

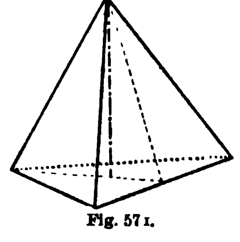
Es ergiebt sich daher für obige 5 Fälle:

I. $p = 3$, $z = 3$; $f = 4$.
Das Tetraëder.

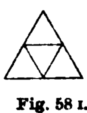
II. $p = 3$, $z = 4$; $f = 6$. Das Hexaëder.	III. $p = 4$, $z = 3$; $f = 8$. Das Oktaëder.
IV. $p = 3$, $z = 5$; $f = 12$. Das Dodekaëder.	V. $p = 5$, $z = 3$; $f = 20$. Das Ikosaëder.

Diese Körper, welche die Pythagoreischen, oft auch die Platonischen heifsen, wurden ihrer Regelmäfsigkeit halber wiederholt zu physikalischen Hypothesen benutzt (Plato, Kepler).

3. Das Tetraëder ist eine dreiseitige Pyramide (Fig. 57 I), deren 3 Seitenflächen, sowie die Grundfläche regelmäfsige Dreiecke sind. Seine Ecke sind kongruent da die 3 Kantenwinkel übereinstimmen.

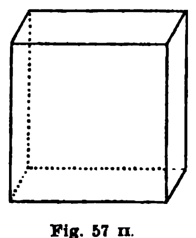

Fig. 57 I.

Das Netz des Körpers (Fig. 58 I), d. i. die Figur, welche bei der Abwickelung der Flächen in einer Ebene entsteht, ist zusammengesetzt aus einem gleichseitigen Dreieck und 3 weiteren solchen, welche sich an die Seiten des ersteren anschliefsen

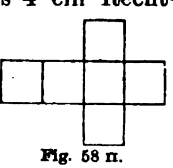

Fig. 58 I.

Ist die Seitenkante a, so ist eine Seitenfläche $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ und die ganze Oberfläche $O_4 = a^2\sqrt{3}$.

Das Hexaëder ist der Würfel (Fig. 57 II).

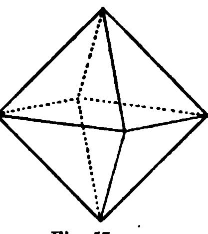

Fig. 57 II.

Das Netz (Fig. 58 II) besteht aus 4 ein Rechteck bildenden Quadraten und zwei weiteren Quadraten, die sich an je eine, auf einer der beiden längeren Seiten des Rechtecks liegenden Quadratseite anschliefsen.


Fig. 58 II.

Ist die Kante a, so ist die Oberfläche $O_6 = 6a^2$.

4. Das Oktaëder (Fig. 57 III) wird von 2 quadratischen Pyramiden gebildet, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind und die mit ihrer Grundfläche beiderseits dieser Ebene an einander gelegt sind. Dafs die Ecke derselben kongruent sind, ergiebt sich in folgender Weise. Eine Diagonale des Quadrats bildet mit den beiden angrenzenden Seitenkanten der Pyramide ein Dreieck, welches mit der durch dieselbe Diagonale begrenzten Hälfte des Quadrats kongruent ist wegen der Übereinstimmung der Seiten. Daher ist auch der Winkel jener Seitenkanten ein R und die Ebene derselben bildet mit zwei Seitenflächen ein Dreikant, welches kongruent ist dem Dreikant aus der quadratischen


Fig. 57 III.

Fläche und denselben beiden Seitenflächen (wegen der Übereinstimmung der 3 Kantenwinkel); jedes Eck des Oktaëders ist aber aus 2 solchen kongruenten entsprechend liegenden Teilen zusammengesetzt.

Das Netz des Oktaëders (Fig. 58 III) besteht aus vier aneinander angrenzenden gleichseitigen Dreiecken mit einem gemeinsamen Eck und aus einer zu dieser Figur diametralen in Bezug auf die Mitte einer nicht an dieses Eck angrenzenden Seite als Centrum.

Fig. 58 III.

Die Oberfläche ist $O_8 = 8 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = 2a^2 \sqrt{3}$.

5. Wenn man an jede Seite eines regelmäfsigen Fünfecks (Fig. 57 IV) ein kongruentes Fünfeck so anschliefst, dafs je 2 benachbarte derselben eine Kante gemeinsam haben, so entstehen an den Ecken des ersteren Fünfecks 5 kongruente Dreikante. Die gemeinsame Kante zweier der angelegten Fünfecke bildet mit 2 freien Kanten derselben ein Dreikant, welches mit ersteren Dreikanten kongruent ist, da 2 Kantenwinkel und der eingeschlossene Ebenenwinkel übereinstimmen und übereinstimmend auf einander folgen. Daher ist der Winkel der beiden freien Seiten ebenfalls gleich dem Winkel des regelmäfsigen Fünfecks; es läfst sich somit der von den genannten 6 Flächen teilweise begrenzte Raum durch eine zu dieser Zusammenstellung von Flächen kongruente Gestalt vollständig begrenzen. Man erhält so das Dodekaëder.

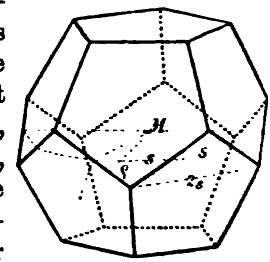


Fig. 57 IV.

Das Netz (Fig. 58 IV) besteht aus einem regelmäfsigen Fünfeck, an dessen Seiten 5 weitere angrenzen und einer zu dieser Figur diametralen in Bezug auf die Mitte einer der äufseren Seiten als Centrum.

Die Oberfläche ist

$$O_{12} = 12 \cdot \frac{5a^2}{4} \cdot \operatorname{cotg} 36^0 = 15a^2 \operatorname{cotg} 36^0.$$

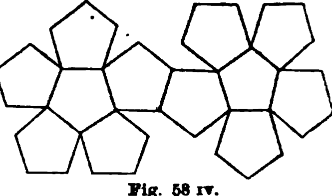


Fig. 58 IV.

6. Ein Eck S, das aus 5 kongruenten Dreiecken zusammengesetzt ist, wird durch eine regelmäfsige 5seitige Pyramide $SABCE$ (Fig. 57 V) erhalten, deren Seitenkanten den Grundkanten gleich sind. Eine Diagonale AC, welche ein Eck A der Grundfläche mit dem zweitnächsten C verbindet, bildet mit den anschliefsenden Seiten ein Dreieck ABC, welches dem Dreieck ASC aus derselben Diagonale und den anschliefsenden Seitenkanten SA und SC kongruent ist. Daraus folgt, dafs das Dreikant an dem Eck B der Grundfläche

kongruent ist dem an der Spitze S liegenden Dreikant dreier aufeinander folgenden Seitenkanten. Letzteres macht einen Teil des 5kantigen Ecks an der Spitze aus; indem wir an das Dreikant an der Grundfläche den übrigen Teil des 5kantigen Ecks anlegen, erhalten wir zu dem Eck B der Grundfläche als Spitze wiederum eine 5seitige regelmäfsige Pyramide, von deren Grundfläche $ASCE_1D_1$ drei Punkte mit den Punkten ASC der ersten Pyramide zusammenfallen, während die beiden weiteren Punkte E_1D_1 eine Seitenstrecke bestimmen, welche mit der gemeinsamen Diagonale AC der Grundflächen beider Pyramiden parallel ist und somit auch parallel und gleich einer Grundkante ED der ersteren Pyramide. Diese beiden Seiten liegen diametral zum Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Grenzpunkte DD_1 und EE_1. Ein regelmäfsiges Fünfeck $D_1E_1A_1B_1C_1$, das in Bezug auf dieses Centrum diametral zu der Grundfläche der ersten Pyramide ist, bestimmt also durch seine Seiten und Ecken im Verein mit den Ecken und Seiten der ersten Grundfläche 10 Flächen, welche an den Ecken der ersten Grundfläche mit den Seitenflächen der ersten Pyramide kongruente 5kantige Ecke bilden. Der Körper wird geschlossen durch eine der ersten in Bezug auf dasselbe Centrum diametrale Pyramide, welche mit dieser auch kongruent ist, da bei der Gleichheit der Winkel deren Reihenfolge nicht in Betracht kommt. Der Körper ist somit von 20 kongruenten regelmäfsigen Dreiecken begrenzt, er ist das Ikosaëder.

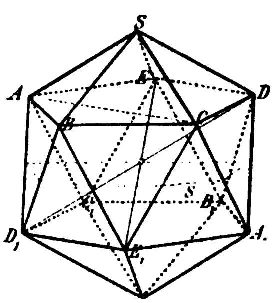
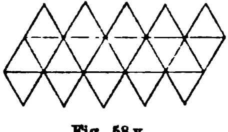


Fig. 57 v.

Die 10 mittleren Dreiecke bilden, wenn sie an einer Seite von einander getrennt und in die Ebene abgewickelt werden (Fig. 58V), zusammen ein Parallelogramm, da je 3 an einem Eck zusammenstofsende Winkel zusammen $3 \cdot \frac{2}{3} R = 2R$ betragen; je 5 Dreiecke an jeder längeren Seite des Parallelogramms, angeschlossen an je eine Dreieckseite, vervollständigen das Netz des Körpers.


Fig. 58 v.

Die Oberfläche desselben ist $O_{20} = 20 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = 5a^2 \sqrt{3}$.

Anmerkung. Halbregelmäfsige (oder Archimedische) Körper heifsen die, welche bei gleichen Kanten und kongruenten Ecken von regelmäfsigen Vielecken verschiedener Art umgrenzt sind.

Sechstes Kapitel.

Die Kubikinhalte der Körper.

§. 21. Volumen-Gleichheit.

1. Unter dem Kubikinhalt oder Volumen eines Körpers versteht man die Gröfse des von seinen begrenzenden Flächen eingeschlossenen Raumes. Die Volumen zweier Körper heifsen gleich, wenn sie entweder als Ganze oder, geteilt durch irgend welche Flächen, mit ihren Teilen so zur Deckung gebracht werden können, dafs je ein Teil des einen Körpers einen Teil des anderen deckt.

Die Summe und Differenz solcher Gröfsen sind in ähnlicher Weise zu erhalten wie im I. Teil §. 45 für die ebenen Flächen angegeben wurde.

2. Wenn zwei gerade Prismen kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben, so sind sie kongruent und haben somit gleiche Volumen. Wenn von zwei geraden Prismen die Höhen übereinstimmen und die Grundflächen einander gleich sind, so lassen sich ihre Grundflächen in paarweise kongruente Teile zerlegen (I. Teil, §. 45, 2) und über diesen je Paare von kongruenten Prismen erhalten; daher sind auch die Summen dieser Prismen, d. i. die Volumen der beiden ursprünglichen Prismen einander gleich. Auch für gerade cylindrische Körper von gleicher Grundfläche und Höhe gilt dasselbe, indem man ihre Grundflächen als aus unbeschränkt kleinen geradlinig begrenzten Flächenteilen zusammengesetzt ansehen kann. Daraus folgt:

Gerade Prismen und Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

3. Gesetzt es lassen sich zwei Körper so zwischen zwei parallele Ebenen legen, dafs jede beliebige weitere parallele Ebene in dem einen Körper eine Schnittfläche von demselben Flächeninhalt wie in dem andern Körper giebt und denken wir durch beide so gelegte Körper unzählig viele solche Ebenen gelegt und zwischen je zwei aufeinander folgenden Ebenen auf jede Schnittfläche ein gerades Prisma (bez. Cylinder) errichtet, so sind je zwei solche Prismen der beiden Körper zwischen denselben Schnittebenen einander gleich, da sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben. Somit ist auch das Gesamtvolum dieser Prismen bei beiden

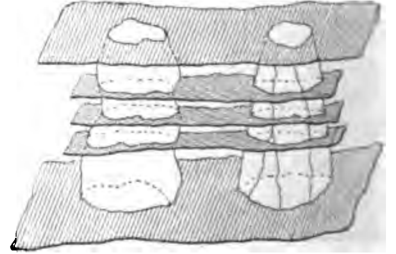


Fig. 59.

Körpern das gleiche. Der Unterschied zwischen einem solchen Prisma und dem mit ihm zwischen einerlei Schnittebenen liegenden Körperteil wird unbeschränkt klein im Verhältnis zu dem Volum des Prismas oder Körperteils, sobald die Schnittebenen unmeſsbar nahe zusammenrücken; der Unterschied hat dann auch bei der Addition der Prismen bez. Körperteile keine Bedeutung. Es stimmen in diesem Fall die Volumen der Körper mit dem Gesamtvolumen ihrer Prismen überein und somit auch unter sich. Dies ist der Satz von Cavalieri († 1647):

Zwei auf eine Ebene gelegte Körper, in welchen jede parallele Ebene ein Paar inhaltsgleiche Schnittflächen ergiebt, haben gleiches Volumen.

4. Solche Cavalieri'sche Körper sind Cylinder und Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe, da jede zur Grundfläche parallele Schnittfläche mit dieser p. f. ist; d. h.:

a. Prismen und Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe haben gleiches Volumen.

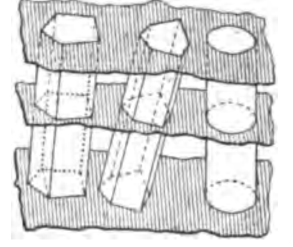


Fig. 60.

Ferner sind solche Körper Pyramiden und Kegel, da hier die Schnittflächen sich verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze (§. 18, 1) und da diese Abstände bei gleicher Höhe der Körper für eine Schnittebene parallel der Grundfläche in beiden ebenfalls einander gleich sind; somit gilt:

b. Pyramiden und Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe haben gleiches Volumen.

Zusatz. Auch Pyramiden und Kegelstumpfe von gleicher Grundfläche und Höhe sind Cavalieri'sche Körper.

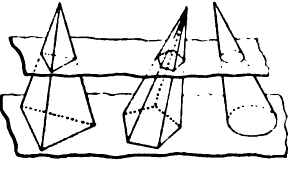


Fig. 61.

5. Zur Vergleichung der Volumen von Prismen und Pyramiden bietet die Zerlegung eines dreiseitigen Prismas $ABCA_1B_1C_1$ in drei Pyramiden den Weg.

Eine Schnittebene von einem Eck A nach einer Diagonale BC_1 der gegenüberliegenden Seitenfläche und eine Schnittebene nach der dem Eck gegenüberliegenden Kante B_1C_1 der anderen Grundfläche zerlegt das Prisma in drei Pyramiden. Von zweien derselben ist das erste Eck A die Spitze, während ihre Grund-

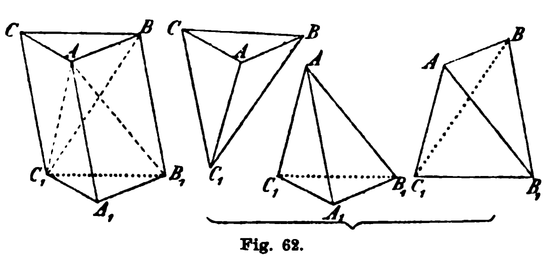


Fig. 62.

flächen BCC_1 und BB_1C_1 die beiden Hälften der Seitenfläche sind; beide haben daher gleiches Volumen. Von einer dieser beiden Pyramiden kann aber auch die dem Eck A zugehörende Grundfläche ABC des Prismas als Grundfläche und ein Eck C_1 der gegenüberliegenden Grundfläche als Spitze angenommen werden; diese Pyramide stimmt daher in Grundfläche und Höhe mit der dritten Pyramide überein, welche ihre Spitze A in dem ersten Eck und als Grundfläche die gegenüberliegende Grundfläche $A_1B_1C_1$ des Primas hat. Es ist also das Prisma in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt. Umgekehrt kann jede dreiseitige Pyramide zu einem dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ergänzt werden, welches das dreifache Volumen hat.

Es folgt hieraus allgemein:

Das Volumen einer Pyramide oder eines Kegels ist der dritte Teil des Volumen eines Prismas oder Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe.

Denn die Pyramide kann stets in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, indem man die Grundfläche in Dreiecke zerlegt und von deren Seiten Ebenen nach der Spitze legt. Die Volumen dieser dreiseitigen Pyramiden sind ein Drittel der Volumen dreiseitiger Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe; das Gesamtvolumen solcher dreiseitiger Prismen läſst sich aber zu einem einzigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe vereinigen.

§. 22. Volumen von Prisma, Cylinder, Pyramide und Kegel.

1. Als Maſs des Kubikinhalts oder Volumen wird am besten ein Würfel gewählt, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist. Ist die Kante eines Würfels a Längeneinheiten, so enthält die Grundfläche a^2 Flächeneinheiten und man kann auf dieselbe a^2 Würfeleinheiten setzen. In den ganzen Würfel gehen dann a solcher Schichten übereinander, also a^3 Kubikeinheiten. Teilt man die Würfelkante in n gleiche Teile und konstruiert zu diesem Teil als Kante den Würfel, so gehen n^3 solcher Würfelchen in die Würfeleinheit; eines derselben ist also $\frac{1}{n^3}$ der Volumeneinheit.

2. Gesetzt es gehen auf die Grundfläche eines geraden Prismas g Flächeneinheiten, so kann man auf dieselbe g Kubikeinheiten setzen und wenn auf die Höhe h Längeneinheiten gehen, so kann man in das Prisma h solcher Schichten übereinander legen; also enthält das Prisma gh Kubikeinheiten. — Ist die Grundfläche nicht in eine Anzahl ganzer Quadrateinheiten zerlegbar, so kann man sie in eine An-

zahl kleinerer Quadrate zerlegen, deren Seite $= \frac{1}{n}$ der Längeneinheit ist; der Rest, welcher hierbei am Umfang der Fläche möglicherweise übrig bleibt, ist um so kleiner, je kleiner $\frac{1}{n}$ angenommen wird, kann also bei unbeschränkt kleinem $\frac{1}{n}$ kleiner als irgend eine mefsbare Gröfse angenommen, bezw. vernachlässigt werden. Das Quadrat zu $\frac{1}{n}$ der Längeneinheit ist dann $\frac{1}{n^2}$ der Flächeneinheit; wenn p solcher Quadrate in die Grundfläche gehen, so ist deren Inhalt $g = \frac{p}{n^2}$ und es gehen auf die Grundfläche p Würfel, deren Kante $\frac{1}{n}$ der Längeneinheit und deren Inhalt $\frac{1}{n^3}$ der Kubikeinheit ist. Ist die Höhe des Prismas $h = q \cdot \frac{1}{n}$, so gehen q solcher Schichten übereinander, somit $q \cdot p$ solcher Würfelchen in das ganze Prisma. Daher ist der Kubikinhalt $q \cdot p \frac{1}{n^3} = \left(q \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \left(p \cdot \frac{1}{n^2}\right) = hg$.

Ein schiefes Prisma, das dieselbe Grundfläche g und Höhe h hat, hat auch dasselbe Volumen. Ein Cylinder ist als besonderer Fall des Prismas aufzufassen.

Indem wir für die Multiplikation der Mafszahlen von Strecken und Flächen, die im II. Teil §. 1, 7 eingeführte Ausdrucksweise gebrauchen, ergiebt sich für die abgeleitete Beziehung folgender Satz:

Das Volumen eines Prismas oder Cylinders ist gleich dem Produkt seiner Grundfläche und Höhe.

Zusatz. Der Inhalt eines Quaders, dessen an einem Eck zusammenstofsende Kanten a, b, c sind, ist abc; der Inhalt eines Würfels, dessen Kante a, ist a^3. Das Volumen eines Prismas von der Höhe h, dessen Grundfläche ein regelmäfsiges $n$eck mit der Seite a ist, beträgt $\frac{na^2h}{4} \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$; das Volumen eines Cylinders, dessen Grundfläche ein Kreis mit dem Radius r und dessen Höhe h ist, $\pi r^2 h$; ist die Grundfläche eine Ellipse mit den Halbaxen a und b, so ist das Volumen πabh.

3. Aus 2 und §. 21, 5 folgt:

Das Volumen einer Pyramide oder eines Kegels ist ein Drittel des Produkts aus Grundfläche und Höhe.

Zusatz. Von einer $n$seitigen regelmäfsigen Pyramide mit der Grundkante a und Höhe h ist das Volumen $\frac{na^2h}{12} \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$, von einem Kegel $\frac{\pi r^2 h}{3}$.

4. Der Inhalt eines Pyramiden- oder Kegelstumpfes (Fig. 49 und 50) ist die Differenz zweier von den Grundflächen begrenzten Körper. Ist G der Inhalt der gröfseren Grundfläche, g der der kleineren und h der Abstand beider, während die kleinere um x von der Spitze entfernt sei, so ist der Inhalt des Stumpfes $V = \frac{G(h+x)}{3} - \frac{gx}{3}$ $= \frac{1}{3}[Gh + (G - g)x]$. Nun ist (§. 18, 1): $(h + x)^2 : x^2 = G : g$ oder $\frac{h+x}{x} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}}$, $\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{\sqrt{g}}$, $x(\sqrt{G} - \sqrt{g}) = h\sqrt{g}$, woraus durch Multiplikation mit $(\sqrt{G} + \sqrt{g})$ folgt: $x(G - g) = h(\sqrt{Gg} + g)$ Dies oben eingesetzt ergiebt: $V = \frac{1}{3}[Gh + h(\sqrt{Gg} + g)]$ oder

$$\boldsymbol{V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)}.$$

Zusatz. Für den Kegel, dessen Grundkreise die Radien r_1 und r_2 haben, ist $V = \frac{\pi h}{3}[r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2]$.

5. Zur Berechnung eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas $ABCA_1B_1C_1$, dessen Kanten $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$ seien, zerlegen wir dasselbe durch eine Ebene von einem Eck A nach der gegenüberliegenden Kante B_1C_1 in eine vierseitige und eine dreiseitige Pyramide. Die Spitze der ersteren ist in dem Eck A und die Grundfläche ist die gegenüberliegende Seitenfläche BCC_1B_1. Die Spitze der dreiseitigen Pyramide sei B_1, ihre Grundfläche AA_1C_1. Im Normalschnitt $A_2B_2C_2 = \Delta$ sei h_1 die Höhe zu B_2C_2, h_2 die zu C_2A_2. Die vierseitige Pyramide hat nun das Volumen $\frac{b+c}{2} \cdot \overline{B_2C_2} \cdot \frac{h_1}{3} = \frac{b+c}{3} \cdot \Delta$, die dreiseitige $\frac{a \cdot \overline{C_2A_2}}{2} \cdot \frac{h_2}{3} = \frac{a}{3} \cdot \Delta$; daher ist das Volumen des Körpers $V = \frac{a+b+c}{3} \cdot \Delta$.

Fig. 63.

Das Volumen eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist gleich dem Produkt des Normalschnitts mit dem arithmetischen Mittel der Seitenkanten.

6. Sind $s_1, s_2 \cdots s_n, s_{n+1} \cdots s_{2n}$ (Fig. 47) die Seitenkanten eines schief abgeschnittenen axialen Prismas, so wird der Körper mittels Ebenen von der Axe m nach den Seitenkanten in n Paare dreiseitiger Prismen zerlegt. Die Prismen an zwei axialsymmetrischen Seitenflächen ergeben zusammen den Inhalt $\Delta_1 \cdot \frac{s_1 + s_2 + m}{3}$ $+ \Delta_1 \cdot \frac{s_{n+1} + s_{n+2} + m}{3} = \frac{\Delta_1}{3} \cdot (s_1 + s_{n+1} + s_2 + s_{n+2} + 2m) = \frac{\Delta_1}{3} \cdot 6m$

$= 2\Delta_1 \cdot m$, wobei Δ_1 der Inhalt des Normalschnitts von beiden dreiseitigen Pyramiden; für ein zweites Prismenpaar folgt ebenso $2\Delta_2 \cdot m$ u. s. w. Da $(2\Delta_1 + 2\Delta_2 + \cdots 2\Delta_n) = f$, dem Flächeninhalt des Normalschnitts ist, so ist der Gesamtinhalt $= m \cdot f$.

Das Volumen eines schief abgeschnittenen axialen Prismas bezw. eines Cylinders ist gleich dem Produkt des Normalschnitts mit der Axe.

7. In zwei ähnlichen dreiseitigen Pyramiden, in welchen a_1 und a_2 entsprechende Kanten sind, verhalten sich die entsprechenden Grundflächen wie $a_1^2 : a_2^2$ und die Höhen wie $a_1 : a_2$, daher die Inhalte wie $a_1^3 : a_2^3$. Ähnliche Körper, welche von irgend welchen Ebenen begrenzt sind, lassen sich durch Schnittebenen in ähnliche dreiseitige Pyramiden zerlegen, deren Volumverhältnis mit dem der dritten Potenzen entsprechender Kanten übereinstimmt. Daher folgt:

Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die dritten Potenzen entsprechender Strecken.

§. 23. Volumen von Kugelteilen und andern Rotationskörpern.

1. Beschreiben wir um eine Kugel einen Cylinder, dessen Mantel und Grundflächen die Kugel berühren, und heben aus diesem Cylinder einen Doppelkegel heraus, dessen Spitze in den Kugelmittelpunkt fällt und dessen Grundflächen mit denen des Cylinders zusammenfallen, so bleibt ein Cavalierischer Körper zur Kugel übrig. Ist nämlich der Kugelradius r, und wird parallel zu den Grundflächen eine Schnittebene gelegt im Abstand z vom Mittelpunkt, so schneidet diese aus der Kugel einen Kreis von der Fläche $\pi(r^2 - z^2)$ und aus dem Körper einen Ring von der Fläche $(\pi r^2 - \pi z^2) = \pi(r^2 - z^2)$; denn auch der Radius des Kegelschnitts ist z, weil die Seitengeraden des Kegels mit der Axe einen Winkel von 45^0 bilden.

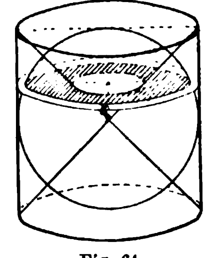


Fig. 64.

Der Kubikinhalt der Kugel ist somit gleich dem des genannten Rest-Körpers oder $K = \pi r^2 \cdot 2r - \pi r^2 \cdot \frac{r}{3}$ oder

$$K = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6},$$

wenn d der Durchmesser der Kugel.

Das Volumen einer Kugel ist gleich dem Produkt seiner Oberfläche mit dem dritten Teil des Radius.

Zusatz. Für ein körperliches Zweieck, dessen Winkel α ist, ergiebt sich der Inhalt $\frac{2}{3} r^3 \cdot arc\, \alpha$.

2. Das Volumen eines Segmentes von der Höhe h stellt sich in dem zugehörigen Cavalierischen Körper dar als die Differenz eines Cylinders $\pi r^2 h$ und eines Kegelstumpfes, dessen Radien r und $r-h$ und dessen Höhe h. Daher ist:

$$\Sigma = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2] = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}(3r^2 - 3rh + h^2)$$

$$\boldsymbol{\Sigma = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).}$$

Ist ϱ der Radius des Grundkreises des Segmentes, so ist $\frac{\varrho^2}{h} = 2r - h$,

$$\frac{\varrho^2 + h^2}{2h} = r, \quad \Sigma = \frac{\pi h^2}{3}\left(\frac{3\varrho^2 + h^2}{2h}\right) = \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2),$$

$$\boldsymbol{\Sigma = \frac{\pi \varrho^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6},}$$

wovon der erste Summand sich als Inhalt eines Cylinders, der zweite als der einer Kugel deuten läfst.

3. Ein Segment und ein Kegel, dessen Grundfläche mit der des Segments und dessen Spitze mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt, bilden einen Kugelsektor. Der Inhalt desselben ist:

$$S = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{\pi h}{3}(2r - h)(r - h) = \frac{\pi h}{3}(3rh - h^2 + 2r^2 - 3rh + h^2)$$

$$\boldsymbol{S = \frac{2\pi r^2 h}{3}.}$$

Da $2\pi rh$ die Oberfläche der zugehörigen Haube ist, so folgt: *Das Volumen eines Sektors ist gleich dem Produkt der Oberfläche der zugehörigen Haube mit dem dritten Teile des Radius.*

Es folgt dies auch unmittelbar daraus, dafs der Sektor als aus elementaren Pyramiden zusammengesetzt gedacht werden kann, deren Spitze der Kugelmittelpunkt, deren Höhe der Radius und deren Grundflächen zusammen die Haube bilden.

4. Für eine körperliche Zone (Fig. 52), deren Grundflächen die Abstände x und y ($x > y$) von dem Mittelpunkt haben, ergiebt sich aus dem zwischen beide Flächen fallenden Teil des oben beschriebenen Körpers:

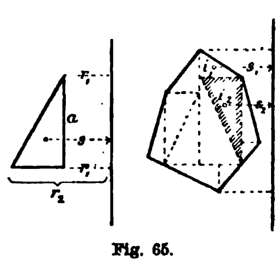
$$Z = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}(x^2 + xy + y^2) = \frac{\pi h}{6}(6r^2 - 2x^2 - 2xy - 2y^2)$$

$= \frac{\pi h}{6}[3(r^2 - x^2) + 3(r^2 - y^2) + (x - y)^2]$. Wenn nun h die Höhe ϱ_1 und ϱ_2 die Radien der Grundflächen sind, so ist $x - y = h$, $r^2 - x^2 = \varrho_1^2$, $r^2 - y^2 = \varrho_2^2$. Hiernach bleibt für Z:

$$\boldsymbol{Z = \frac{\pi h}{6}[3(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) + h^2] = \frac{\pi h}{2}(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) + \frac{\pi h^3}{6}.}$$

5. Rotiert ein rechtwinkeliges Dreieck um eine Axe, welche mit einer Kathete a parallel ist und von den Ecken des Dreiecks die Ab-

stände r_1, r_1 und r_2 hat, so ist der Inhalt des Rotationskörpers $\frac{\pi a}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) - \pi r_1^2 \cdot a = \frac{\pi a}{3}(r_1 r_2 + r_2^2 - 2r_1^2)$ $= \frac{\pi a}{3}(r_2 - r_1)(2r_1 + r_2)$. Nun ist $\frac{2r_1 + r_2}{3} = s$ der Abstand des Schwerpunkts des Dreiecks von der Axe (II. Teil, Aufg. §. 2, 5), und $a(r_2 - r_1) = 2i$ ist der doppelte Inhalt des Dreiecks; daher das Volumen $= 2\pi s i$. Irgend eine Fläche läfst sich in eben solche elementare Dreiecke zerlegen, deren Inhalte i_1, $i_2, \cdots$ und Schwerpunktsabstände s_1, $s_2 \cdots$ seien. Daher ist der Inhalt des Rotationskörpers der Fläche: $2\pi(s_1 i_1 + s_2 i_2 + \cdots)$. Der Schwerpunktsabstand s einer solchen Fläche i von der Axe ist durch die Gleichung bestimmt: $si = s_1 i_1 + s_2 i_2 + \cdots$


Fig. 65.

Somit ist der Inhalt: $I = 2\pi s i$.

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt der erzeugenden Fläche mit dem Weg ihres Schwerpunktes.

Dieser Satz und der entsprechende in §. 19, 5 führen den Namen: „Guldin'sche Regeln."

§. 24. Volumen der regelmäfsigen Körper.

1. Das Volumen eines Hexaëders mit der Kante a ist $V_6 = a^3$.

Das Tetraëder, dessen Kante a, ist eine Pyramide mit der Grundfläche $\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$. Die Höhe h (Fig. 57, I.) ist die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a und andere Kathete $\frac{2}{3}$ der Höhe der Grundfläche, $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$. Daher ist $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ und das Volumen des Tetraëders $V_4 = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$.

Das Oktaëder mit der Kante a ist zusammengesetzt aus zwei Pyramiden mit der Grundfläche a^2 und der Höhe $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, d. i. der halben Diagonale der Grundfläche. Daher ist das Volumen des Oktaëders $\frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$ oder $V_8 = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$.

2. Aus der in §. 20, 5 angegebenen Entstehungsweise des Dodekaëders folgt, dafs der Körper centrisch ist in Bezug auf einen Punkt der Mittelparallelebene zu zwei parallelen Seitenflächen. Der Schnitt dieser Ebene (Fig. 57, IV.) geht durch die Mitte von zehn Kanten und bildet ein regelmäfsiges Zehneck, dessen Seiten s die Hälften der mit ihnen parallelen Diagonalen der Fünfecke sind. (Die Überein-

stimmung der Winkel des Zehnecks folgt aus der Kongruenz der Dreikante, welche die Schnittebene mit den Ebenen des Dodekaëders bildet.) Die Zehnecksseite ist daher $s = a \cos 36^0$, wenn a die Kante des Dodekaëders; der Radius des dem Zehneck umgeschriebenen Kreises ist $\frac{a \cos 36^0}{2 \sin 18^0} = \frac{a \cos 36^0 \cos 18^0}{2 \sin 18^0 \cos 18^0} = a \operatorname{cotg} 36^0 \cos 18^0$. Dies ist der Abstand der Mitte einer Seitenkante von dem Centrum. Die Mitte der Seitenkante ist von der Mitte der Fläche um $\frac{a}{2} \operatorname{cotg} 36^0$ entfernt. Daher ist der Abstand vom Centrum zu einer Seitenfläche $\varrho = \sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2 36^0 \cos^2 18^0 - \frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 36^0} = a \operatorname{cotg}^2 36^0 \sqrt{\cos^2 18^0 - \frac{1}{4}}$. Nun folgt aus II. Teil §. 30, 1 Zus. a, dafs $(2r \sin 36^0)^2 = (2r \sin 18^0)^2 + r^2$ oder $\sin^2 36^0 = \sin^2 18^0 + \frac{1}{4}$, somit auch $\cos^2 36^0 = \cos^2 18^0 - \frac{1}{4}$. Also ist $\varrho = a \operatorname{cotg} 36^0 \cos 36^0$.

Nehmen wir das Centrum als Spitze von Pyramiden, die Seitenflächen als Grundflächen, so zerfällt das Dodekaeder in 12 Pyramiden von der Höhe ϱ. Das Volumen derselben ist das Produkt der Oberfläche $15 a^2 \operatorname{cotg} 36^0$ mit $\frac{\varrho}{3}$, d. i.

$$V_{12} = 5 a^3 \operatorname{cotg}^2 36^0 \cos 36^0.$$

3. Auch das Ikosaëder ist centrisch zu einem Punkt der Mittelparallelebene der Grundflächen beider fünfseitigen Pyramiden. Diese Ebene ergiebt als Schnitt ein regelmäfsiges Zehneck, dessen Seiten s (Fig. 57, V) parallel zu den Grundkanten der beiden Pyramiden und gleich deren Hälften $\frac{a}{2}$ sind; der Radius des umgeschriebenen Kreises ist somit $\frac{a}{4 \sin 18^0} = a \cos 36^0$, da $4 \sin 18^0 \cos 36^0 = 1$ (vgl. II. Teil, §. 29, 2 d und 8 c). Dies ist der Abstand des Centrums von der Mitte der Kante. Letztere ist von der Mitte der Seitenflächen um $\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{6} \sqrt{3}$ entfernt; somit ist der Abstand des Centrums von der Fläche

$$\varrho = \sqrt{a^2 \cos^2 36^0 - \frac{a^2}{12}} = \frac{2 a \cos 36^0}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{16 \cos^2 36^0}} =$$

$$= \frac{2 a \cos 36^0}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2 18^0} = \frac{2 a \cos 36^0}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\cos^2 18^0 - \frac{1}{4}} = \frac{2 a \cos^2 36^0}{\sqrt{3}}.$$

Da die Oberfläche $= 5 a^2 \sqrt{3}$, so ist das Volumen

$$V_{20} = \frac{10 a^3}{3} \cos^2 36^0.$$

Zusatz. ϱ ist zugleich der Radius der eingeschriebenen Kugel; der Radius der umgeschriebenen Kugel, sowie der Winkel der Ebenen an einer Kante sind hiernach ebenfalls bestimmbar.

Siebentes Kapitel.

Strecken und Winkel im Raum.

Elemente der sphärischen Trigonometrie.

§. 25. Raum-Koordinaten.

1. Wie die Lage eines Punktes in der Ebene durch seine Entfernung von zwei zu einander normalen Axen bestimmt wird, so die Lage eines Punktes im Raum durch seine Entfernungen von drei zu einander normalen Ebenen, die einander somit in drei zu einander normalen Axen OX, OY, OZ schneiden. Legen wir durch den Punkt P drei weitere zu diesen Ebenen parallele Ebenen, so entsteht ein Quader, dessen Kanten $OX = x$, $OY = y$, $OZ = z$ die rechtwinkeligen Koordinaten d. i. die Entfernungen des Punktes P von den Ebenen YOZ, ZOX, XOY darstellen. Die drei Axen-Ebenen teilen den Raum in 8 Oktanten; die auf den Halbaxen eines (des ersten) Oktanten gemessenen Koordinaten werden positiv genommen, dagegen die auf den Gegenstrahlen negativ.

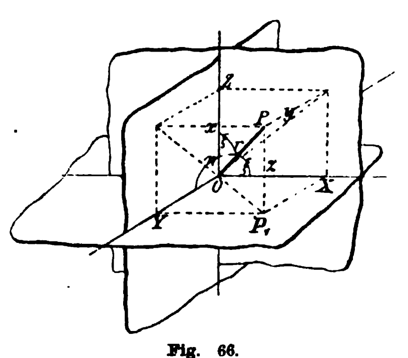


Fig. 66.

Die drei Koordinaten sind die Projektionen der Strecke $OP = r$ auf die Axen. Sind somit ξ, η, ζ die Winkel von OP mit den Axen, so ist:

$$x = r\cos\xi, \qquad y = r\cos\eta, \qquad z = r\cos\zeta,$$

wobei das Zeichen des cos bestimmt, ob die betreffende Koordinate positiv oder negativ ist.

Ist $PP_1 \perp XOY$, $PP_1 = z$, so gilt für die Projektion OP_1 von OP

$$\overline{OP_1}^2 = x^2 + y^2 \text{ und } \overline{OP}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{PP_1}^2 \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2 + z^2},$$

woraus weiter folgt:

$$\boldsymbol{\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1}.$$

Zusatz: a) Entsprechend ergiebt sich für eine Strecke ϱ, deren Grenzpunkte die Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 haben,

$$\varrho^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

b) Die Differenz der beiden auf einer Axe gemessenen Koordinaten der Grenzpunkte einer Strecke stellt die Projektion der Strecke auf die Axe dar. Die im II. Teil §. 37, 2 gegebenen Sätze über die Projektion eines Geradenzugs lassen sich auch auf einen beliebigen Geradenzug im Raum ausdehnen.

c) Die Winkel der Geraden OP mit den drei Axenebenen XOY, XOZ und YOZ ergänzen die Winkel ζ, η, ξ je zu einem R. Daher gilt für diese Winkel α, β, γ:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1,$$

woraus auch folgt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2.$$

2. Eine zweite Bestimmungsart der Lage eines Punktes, entsprechend den Polarkoordinaten der Ebene (II. Teil §. 34, 4), ist folgende. Die Lage eines Punktes B wird in Bezug auf einen Punkt O, einen Halbstrahl OX desselben und eine Halbebene XOM des letzteren bestimmt durch 1) die Entfernung des Punktes B von O, $OB = r$, 2) den Winkel dieses Fahrstrahls mit der Axe, $\sphericalangle XOB = c$, und 3) den Winkel α der Ebene BOX mit der Ebene MOX.

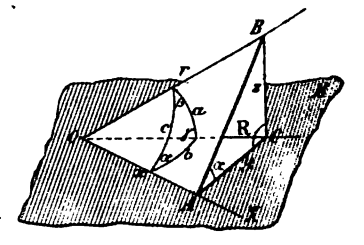


Fig. 67.

Ist OA die Projektion von OB auf die Axe OX, OC die Projektion auf die Ebene XOM, so ist auch $CA \perp OA$ (nach §. 6, 2c da CA die Projektion von BA) und die drei rechtwinkeligen Koordinaten von B sind: $OA = x$, $AC = y$, $CB = z$. Nun ist

$$x = r\cos c, \qquad y = AB\cos\alpha, \qquad z = AB\sin\alpha$$

oder, da $AB = r\sin c$:

$$x = r\cos c, \qquad y = r\sin c\cos\alpha, \qquad z = r\sin c\sin\alpha.$$

§. 26. Das rechtwinkelige sphärische Dreieck.

1. Die drei eben betrachteten Halbstrahlen OA, OB, OC bilden ein Dreikant, dessen Ebenenwinkel an der Kante OC ein R ist. Führen wir die Kantenwinkel $\sphericalangle BOC = a$ und $\sphericalangle COA = b$ in Rechnung, so läfst sich jede der drei Koordinaten x, y, z auf zweifache Weise ausdrücken; dies führt uns zu Gleichungen zwischen den Kanten- und Ebenenwinkeln.

a) $x = OA$ ist die Projektion von OB und OC, also

$$x = r\cos c = OC\cos b = r\cos a\cos b,$$ woraus:

I. $$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

b) $z = BC$ ist Projektion von OB und AB:

$$z = r \sin a = AB \cdot \sin \alpha = r \sin c \sin \alpha,$$ woraus:

II. $$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

c) $y = AC$ ist Projektion von AB und OC:

$$y = r \sin c \cos \alpha = OC \sin b = r \cos a \cdot \sin b,$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}, \quad \text{und da} \quad \cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$$

substituiert werden kann, so ergiebt sich schliefslich:

III. $$\cos \alpha = \frac{tg\, b}{tg\, c}.$$

Dem Dreikant OA, OB, OC entspricht auf einer um O gelegten Kugel ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck mit den Seiten a, b, c (Kantenwinkel) und den Winkeln α, β, R (Ebenenwinkel). Nennen wir a und b die Katheten, c die Hypotenuse des sphärischen Dreiecks, so entsprechen obige Formeln dem Satze:

Im rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ist:

a) *der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Produkt der Cosinus der beiden Katheten.*

b) *der Sinus eines Winkels gleich dem Quotient des Sinus der Gegenkathete zum Sinus der Hypotenuse.*

c) *der Cosinus eines Winkels gleich dem Quotient der Tangens der Ankathete zur Tangens der Hypotenuse.*

2. Wenn von den 5 aufeinander folgenden Gröfsen a, b, α, c, β zwei gegeben sind, so können die anderen berechnet werden. Von drei Stücken, den beiden gegebenen und dem gesuchten, wird immer eines so liegen, dafs es entweder von den beiden andern in der Ordnung a, b, α, c, β, a, b unmittelbar eingeschlossen wird, oder so, dafs es nicht unmittelbar an die beiden andern angrenzt (wobei der R aufser Betracht bleibt). Für diese beiden Fälle hat Neper die Regel aufgestellt:

Im rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ist der Cosinus eines Stückes gleich dem Produkt

a) *der Cotangenten der einschliefsenden Stücke,*

b) *der Sinus der nicht angrenzenden Stücke,*

wobei jedoch für jede Kathete statt der hierdurch bestimmten Funktion die Cofunktion zu setzen ist.

Zu der Gleichung zwischen den drei Seiten (I), den Gleichungen zwischen einer Kathete, der Hypotenuse und einem Winkel (II und III), welche dieser Regel entsprechen, folge hier noch:

a_1) Die Gleichung zwischen einer Kathete a und den Winkeln α, β; α grenzt nicht an a und β, also ist:

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta .$$

Nämlich $\cos a \cdot \sin\beta = \frac{\cos c}{\cos b} \cdot \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} = \cos\alpha .$

b_1) Die Gleichung zwischen den Katheten a und b und einem Winkel α; b wird von a und α eingeschlossen, also ist:

$$\sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cotg}\alpha .$$

Nämlich $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \cdot \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin b \cdot \cos c}{\cos a \cdot \cos b}$ $= \sin b .$

c_1) Die Gleichung zwischen der Hypotenuse c und beiden Winkeln α und β:

$$\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta .$$

Denn es ist $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \cdot \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin b \cdot \cos c}{\cos b \cdot \sin a}$; ebenso ist

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin a \cdot \cos c}{\cos a \cdot \sin b}, \text{ daher } \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta = \frac{\cos^2 c}{\cos a \cdot \cos b} = \cos c .$$

§. 27. Das schiefwinkelige sphärische Dreieck.

1. Ziehen wir in einem beliebigen Dreikant, dessen Kantenwinkel $\sphericalangle BOC = a$, $\sphericalangle COA = b$, $\sphericalangle AOB = c$ sind, von einem Punkt B der einen Kante Normale sowohl auf die beiden andern Kanten, $BA \perp OA$, $BC \perp OC$, als auf die Gegenebene, $BF \perp AOC$, so bestimmen die Winkel $\sphericalangle BAF = \alpha$ und $\sphericalangle BCF = \gamma$ zwei Ebenenwinkel des Dreikants (§. 6, 2 c). Ist $OB = r$, so ist

$$BA = r \sin c , \qquad BC = r \sin a .$$

Fig. 68.

Die dritte Normale BF gehört den beiden Dreiecken ABF und CBF an, woraus folgt:

$$BF = BA \sin\alpha = r \sin c \cdot \sin\alpha , \qquad BF = BC \sin\gamma = r \sin a \sin\gamma ,$$

$$\sin c \cdot \sin\alpha = \sin a \cdot \sin\gamma$$

oder

IV. $$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin a}{\sin c} .$$

In einem sphärischen Dreieck ist das Verhältnis der Sinus zweier Winkel gleich dem Verhältnis der Sinus der Gegenseiten.

2. Die drei genannten Normalen ergeben drei Projektionen von OB. Wir nehmen zunächst alle Winkel als spitze an. Es ist:

$$OA = r\cos c, \qquad OC = r\cos a.$$

Von der dritten Projektion OF kann jede der ersteren, z. B. OC, wiederum als Projektion aufgefafst werden. Statt OF kann aber auch der Geradenzug OAF auf OC projiziert werden (II. Teil §. 37, 2; vgl. auch mit folgendem II. Teil §. 38). Die Projektion von OA ist $OA\cos b = r\cos b\cos c$. Ferner ist:

$$AF = BA\cos\alpha = r\sin c\cdot\cos\alpha.$$

Ist $\alpha < R$, so fällt F mit OC auf einerlei Seite von OA und es ist der Winkel der Richtung AF mit $OC = b + 270^0$; daher die Projektion von AF auf OC

$$AF\cos(b + 270^0) = AF\sin b = r\sin b\sin c\cos\alpha.$$

Somit:

$$r\cos a = r\cos b\cos c + r\sin b\sin c\cos\alpha,$$

V. $$\cos a = \cos\alpha\sin b\sin c + \cos b\cos c.$$

Dies ist die Cosinus-Formel für die Seite.

Ist $\alpha > R$, so ist der Winkel von AF mit OC $(b + 90^0)$. Da AF positiv zu nehmen, so ist $AF = -AB\cos\alpha = -r\sin c\cdot\cos\alpha$ und seine Projektion auf OC

$AF\cos(b + 90^0) = -AF\sin b = r\sin b\sin c\cos\alpha$, wie oben.

Ist $c > R$, so ist $OA = -r\cos c$ und es macht OA mit OC den Winkel $(b + 180^0)$; daher ist die Projektion von OA auf OC:

$-r\cos c\cos(b + 180^0) = r\cos b\cdot\cos c$ wie oben.

Ist $a > R$, so fällt die Projektion von OB auf die Gegenrichtung des Strahles des Dreikants; es ist daher in der vorhergehenden Ableitung überall $(b + 180^0)$ für b zu setzen, wobei alle Glieder ihre Zeichen ändern, somit die Gleichung dieselbe bleibt.

3. Um die der Formel V entsprechende Gleichung für die Winkel des sphärischen Dreiecks zu erhalten, nehmen wir das Polareck des betr. Dreikants zu Hilfe, in welchem die Kantenwinkel $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$, die Ebenenwinkel $2R - a$, $2R - b$, $2R - c$ sind. Daher ist nach V:

$$\cos(2R - \alpha) = \cos(2R - a)\sin(2R - \beta)\sin(2R - \gamma) + \cos(2R - \beta)\cos(2R - \gamma),$$

$$-\cos\alpha = -\cos a\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma,$$

VI. $$\cos\alpha = \cos a\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma.$$

Dies ist die Cosinus-Formel für den Winkel.

§. 28. Berechnung der Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks.

1. Es seien die drei Seiten a, b, c gegeben. Die Formel V liefert:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

1'. Es seien die drei Winkel α, β, γ gegeben. Die Formel VI giebt:

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Zusatz. Für logarithmische Rechnung geeignete Formeln ergeben sich durch Berechnung von

$$\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} \qquad\Big|\qquad \sin\frac{a}{2}, \quad \cos\frac{a}{2}$$

nach den Formeln II. Teil §. 38, VII, V und VIII, wobei wir setzen:

$$\frac{1}{2}(a+b+c) = s, \qquad\Big|\qquad \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \sigma,$$

$$s - a = s_1,\ s - b = s_2,\ s - c = s_3. \qquad\Big|\qquad \sigma-\alpha=\sigma_1,\ \sigma-\beta=\sigma_2,\ \sigma-\gamma=\sigma_3.$$

Es folgt so:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_2\sin s_3}{\sin b\sin c}} \qquad\Big|\qquad \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_1}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\sin s_1}{\sin b\sin c}} \qquad\Big|\qquad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\sigma_2\cos\sigma_3}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

(Vgl. II. Teil §. 43, 3.) Die Gleichungen rechts können aus denen links auch mittels des Polarecks abgeleitet werden.

Durch Division folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_2\sin s_3}{\sin s\sin s_1}}. \qquad\Big|\qquad \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos\sigma_1}{\cos\sigma_2\cos\sigma_3}}.$$

2. Es seien zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben. Die Formel V giebt durch cyklische Vertauschung:

$$\cos c = \cos\gamma\sin a\sin b + \cos a\cos b.$$

2'. Es seien zwei Winkel α und β und die anliegende Seite c gegeben. Die Formel VI liefert:

$$\cos\gamma = \cos c\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta.$$

Die übrigen Stücke folgen dann nach Formel VI:

$$\sin\alpha = \sin\gamma\cdot\frac{\sin a}{\sin c}. \qquad\Big|\qquad \sin a = \sin c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Zusatz. a) Bestimmen wir φ so, dafs

$$\cos\gamma\operatorname{tg}a = \operatorname{tg}\varphi,$$

so folgt:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos\varphi}(\sin b\sin\varphi + \cos b\cos\varphi)$$

$$\cos c = \frac{\cos a\cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

a') Bestimmen wir φ so, dafs

$$\cos c\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi,$$

so folgt

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}(\sin\beta\sin\varphi - \cos\beta\cos\varphi)$$

$$\cos\gamma = -\frac{\cos\alpha\cos(\beta+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

b) Um Formeln zu erhalten, welche die unmittelbare Berechnung von α und β, bezw. a und b gestatten, setzen wir in den Formeln

$$\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mp\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

rechts die Werte aus 1. Zus. ein und benutzen die prosthaphäretischen Formeln II. Teil §. 38, VIII. Es folgt so z. B.

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin s_2+\sin s_1}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\sin s_3}{\sin a\sin b}}=\frac{2\sin\frac{s_1+s_2}{2}\cos\frac{s_2-s_1}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

So erhält man die von Mollweide bewiesenen, meist nach Gaufs genannten Formeln:

$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},\quad\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},\quad\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Um diese Formeln sofort anschreiben zu können, beachte man, dafs für irgend einen die Seiten enthaltenden Ausdruck der entsprechende Ausdruck der Winkel gefunden wird, indem man im Zähler dem Sinus das minus, dem Cosinus das plus gegenüberstellt und umgekehrt dem minus den Sinus, dem plus den Cosinus; im Nenner steht bei den Winkeln die Kofunktion der Funktion des Zählers.

Für die Berechnung der Winkel bezw. Seiten folgen durch Division der entsprechenden Formeln die sog. Neper'schen Analogien:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},\quad\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},\quad\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Zur Berechnung von c bezw. γ können dann die Gaufs'schen Formeln benutzt werden.

Wenn z. B. α, β und c gegeben, so entspricht der Berechnung von a, b und γ folgendes Schema, welches demjenigen im II. Teil §. 43, 2b nachgebildet ist:

I.	$l \sin \frac{c}{2}$	$l \cos \frac{c}{2}$	
II.	$l \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$l \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	
III.	$l \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$l \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$	
IV. (I + II.)	$l \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{a + b}{2}$	$l \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{a + b}{2}$	$l \operatorname{tg} \frac{a + b}{2}$
V. (I + III.)	$l \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{a - b}{2}$	$l \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{a - b}{2}$	$l \operatorname{tg} \frac{a - b}{2}$
VI.	$l \sin \frac{a + b}{2}$	$l \cos \frac{a + b}{2}$	
VII. (IV — VI.)	$l \sin \frac{\gamma}{2}$	$l \sin \frac{\gamma}{2}$	

3. Es seien zwei Seiten a und b gegeben und der Gegenwinkel der ersteren α. Die Formel IV

$$\sin \beta = \sin \alpha \cdot \frac{\sin b}{\sin a}$$

3'. Es seien zwei Winkel α und β und die Gegenseite des ersteren a gegeben. Die Formel IV

$$\sin b = \sin a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

ergiebt im allgemeinen zwei Winkel, die einander zu $2R$ ergänzen.

Die Seite c ist direkt aus der Gleichung

$$\cos a = \cos \alpha \sin b \sin c + \cos b \cos c$$

Der Winkel γ ist direkt aus der Gleichung

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma$$

nach der im II. Teil §. 40, 3c erläuterten Weise zu berechnen.

Zusatz. Aus den Neper'schen Analogien folgen ebenfalls die übrigen Stücke, wenn eines berechnet ist.

Da in den umgeformten Gaufs'schen Gleichungen:

$$\frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{a - b}{2}} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{c}{2}}, \quad \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{a + b}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

die rechten Seiten stets positiv sind, so entsprechen einander die Werte:

$$\alpha \gtreqless \beta \text{ und } a \gtreqless b, \qquad \alpha + \beta \gtreqless 2R \text{ und } a + b \gtreqless 2R.$$

Diese Beziehungen sind bei Bestimmung der fraglichen Gröfsen zu berücksichtigen.

III. Abschnitt.

Abbildung der Figuren einer Ebene auf eine zweite Ebene.

Achtes Kapitel.

Abbildung geradliniger Figuren.

§. 29. Perspektive von Punkten und Geraden, Punktreihen und Strahlenbüscheln.

1. Wir nehmen an, von einem Punkt, dem Centrum der Projektion, gehe ein Strahlenbündel aus nach allen Punkten einer ebenen Figur. Wenn man nun diesen Bündel von Centralstrahlen durch eine andere Ebene schneidet, die willkürlich im Raume liegen mag, so entsteht auf letzterer Ebene eine neue Figur, welche die Projektion oder das Bild der ersteren, des Originals sein wird. Die Beziehung beider Figuren ist der Art wechselseitig, dafs das Original auch als das Bild der neuen Figur betrachtet werden kann; wir nennen daher beide Figuren perspektivisch (𝔭) zu einander, und zwei Figuren, welche in perspektivische Lage gebracht werden können, projektivisch ($\wedge$).

Die perspektivische Geometrie ist die Geometrie des Sehens, insofern das Centrum mit seinen Strahlen das Auge mit dessen Sehstrahlen vertritt; auch insofern, als oft ein blofses Betrachten einer geeigneten Projektion der Figur genügt, um Eigenschaften der Figur selbst zu erkennen. Die geometrische Projektion unterscheidet sich von der unserer Sehstrahlen dadurch, dafs die Centralstrahlen nicht im Centrum einseitig begrenzt angenommen werden, sodafs auch entsprechende Punkte auf den Gegenstrahlen einer Centralen liegen können.

2. Wie ein Punkt mittels eines Centralstrahles, so wird die Gerade mittels einer Centralebene (des Scheines der Geraden, vgl. Entstehung der Ebene Teil I §. 4, 1) abgebildet; das Bild der Geraden ist der Schnitt dieser Ebene mit der Bildebene.

a) *Die Projektion eines Punktes ist ein Punkt.*

a′) *Die Projektion einer Geraden ist eine Gerade.*

Nehmen wir den schon früher betrachteten Fall (§. 15, 3) aus, dafs die Original- und Bildebene parallel sind, so schneiden einander stets beide Ebenen in einer Geraden, der Axe der Projektion. Nun wird irgend eine Centralebene beide Ebenen in perspektivischen Geraden schneiden, welche einander in einem Punkt der Axe treffen müssen (§. 1, 5a'). Somit entsprechen einander die Sätze:

b) *Zwei perspektivische Punkte liegen auf einem Strahl des Centrums.*

b') *Zwei perspektivische Gerade schneiden einander auf einem Punkt der Axe.*

Insbesondere gilt:

c) *Jeder Axenpunkt entspricht sich selbst perspektivisch.*

3. Die Centralstrahlen zweier Punkte A und B (Fig 69) bestimmen mit dem Centrum eine Centralebene SAB, welche auch die Strecke AB und deren Projektion A_1B_1 enthält, d. h.:

a) *Die Projektion der Verbindungsgeraden zweier Punkte ist die Verbindungsgerade der Projektionen der Punkte.*

3.' Die Centralebenen zweier Geraden a und b (Fig. 69) bestimmen durch ihre Schnittgerade einen Centralstrahl, auf welchem der Schnittpunkt ab und der ihrer Projektionen a_1b_1 liegt, d. h.:

a') *Die Projektion des Schnittpunktes zweier Geraden ist der Schnittpunkt der Projektionen der Geraden.*

Gemäfs 2c entsprechen einander nun auch die Sätze:

b) *Die Verbindungsgeraden zweier* p. *Punkte mit einem Axenpunkt sind* p.

b') *Die Schnittpunkte zweier* p. *Geraden mit einem Centralstrahl sind* p.

4. Hieraus folgen unmittelbar die Sätze:

Mit einer Punktreihe ist eine Punktreihe p.

Die Centralstrahlen einer Punktreihe bilden einen Strahlenbüschel des Centrums; dessen Ebene ist die durch das Centrum und die Punktreihe bestimmte.

Mit einem Strahlenbüschel ist ein Strahlenbüschel p.

Die Centralebenen eines Strahlenbüschels bilden einen Ebenenbüschel; dessen Kante ist der Centralstrahl des Scheitels.

Zusatz. Die in diesem §. abgeleiteten Beziehungen zwischen perspektivischen Figuren nennt man graphisch-projektivische Beziehungen. Metrische Beziehungen zwischen projektivischen Punktreihen und Strahlenbüscheln wurden schon im II. Teil §. 21 abgeleitet; bei diesen Ableitungen ist es einerlei, ob wir die beiden perspektivischen Gebilde als solche einer oder zweier Ebenen annehmen. (S. §. 42.)

§. 30. Perspektivische Dreiecke und Dreiseite, Vierecke und Vierseite.

1. Wenn die Ecken eines Dreiecks ABC mit den Ecken eines zweiten Dreiecks $A_1B_1C_1$ paarweise auf den Strahlen $s_1s_2s_3$ eines Punktes S liegen, so sind beide Figuren p. Denn durch 3 Punkte läſst sich stets eine Ebene legen; die beiden Ebenen ABC und $A_1B_1C_1$ schneiden einander in einer Geraden, auf welcher, als der Axe, die Schnittpunkte der p. Seitenpaare der Dreiecke liegen. Daraus folgt:

Liegen die Ecken zweier Dreiecke paarweise auf 3 Strahlen eines Centrums, so sind beide Dreiecke p.; — *ihre Seiten schneiden einander paarweise in 3 Punkten einer Geraden.*

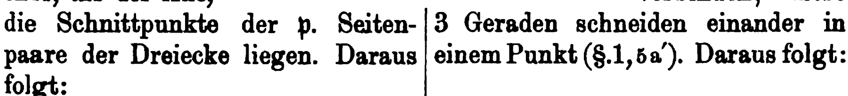


Fig. 69.

1.′ Wenn die Seiten eines Dreiseits abc mit den Seiten eines zweiten Dreiseits $a_1b_1c_1$ paarweise in den Punkten $S_1S_2S_3$ einer Geraden s zusammentreffen, so sind beide Figuren p. Denn die Ebenen $aS_1a_1, bS_2b_1, cS_3c_1$ schneiden einander in 3 Geraden $s_1s_2s_3$, welche die Ecke der Dreiseite paarweise verbinden; diese 3 Geraden schneiden einander in einem Punkt (§.1, 5a′). Daraus folgt:

Gehen die Seiten zweier Dreiseite paarweise durch 3 Punkte einer Axe, so sind beide Dreiseite p.; — *ihre Ecken liegen paarweise auf 3 Strahlen eines Punktes.*

2. Vier Punkte einer Ebene $ABCD$, von welchen nicht drei auf einer Geraden liegen, bilden die Ecken eines **vollständigen Vierecks**; ihre Verbindungsgeraden ergeben 3 Paar **Gegenseiten** und in deren Schnittpunkten 3 **Nebenecken**.

Legen wir von einem Centrum S Strahlen nach den 4 Ecken $ABCD$ und einem Nebeneck P und nehmen wir auf diesen 5 Centralstrahlen entsprechend die 4 Ecke $A_1B_1C_1D_1$ und ein Nebeneck P_1 eines zweiten Vierecks an, so

2.′ Vier Gerade einer Ebene $abcd$, von welchen nicht 3 durch einen Punkt gehen, bilden die Seiten eines **vollständigen Vierseits**; ihre Schnittpunkte bestimmen 3 Paar **Gegenecke** und durch deren Verbindungsgeraden 3 **Nebenseiten**.

Schneiden nun die 4 Seiten $abcd$ und eine Nebenseite p eine Axe s in 5 Punkten und legen wir durch diese Punkte entsprechend die 4 Seiten $a_1b_1c_1d_1$ und eine Nebenseite p_1 eines zweiten Vierseits, so ist $abcd$ p. $a_1b_1c_1d_1$. Denn

ist $ABCD\ \mathfrak{p}.\ A_1B_1C_1D_1$. Denn es ist $ABP\mathfrak{p}.A_1B_1P_1$, $PCD\mathfrak{p}.P_1C_1D_1$ zu dem Centrum S. Es liegen aber ABP und PCD in einer Ebene,. ebenso $A_1B_1P_1$ und $P_1C_1D_1$.

es ist nach 1′: $abp\ \mathfrak{p}.\ a_1b_1p_1$, $pcd\ \mathfrak{p}.\ p_1c_1d_1$ in den Ebenen sp und sp_1. Es haben aber beide Paare $\mathfrak{p}$. Dreiseite als gemeinsames Centrum den Schnittpunkt der Strahlen der Gegenecken von p und p_1.

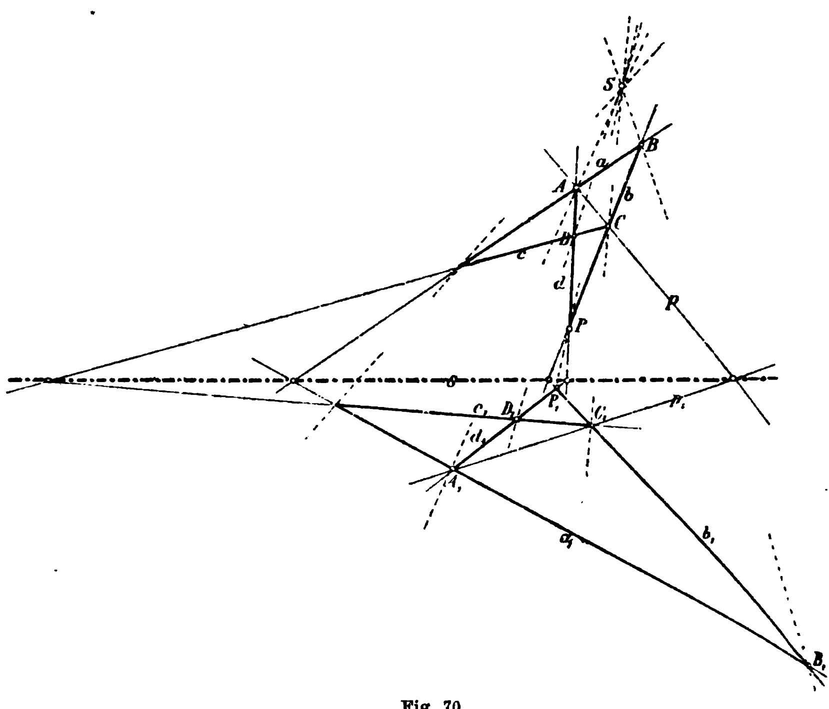


Fig. 70.

Damit sind nun auch die übrigen Teile der Figuren paarweise $\mathfrak{p}$. Insbesondere folgt hieraus:

a) *Wenn irgend welche vollständige Vierecke die Strahlen eines Centrums nach den Ecken und nach einem entsprechenden Nebeneck gemeinsam haben, so sind für sie auch die Strahlen nach den beiden andern Nebenecken eindeutig bestimmt.*

a′) *Wenn irgend welche vollständige Vierseite die Schnittpunkte einer Axe mit den Seiten und mit einer entsprechenden Nebenseite gemeinsam haben, so sind für sie auch die Schnittpunkte mit den beiden andern Nebenseiten eindeutig bestimmt.*

Wir ziehen nun noch eine Folgerung aus a′, während der entsprechende Satz nach a) ebenso leicht gefunden werden kann.

Nehmen wir eine Nebenseite selbst als Axe s an, sodafs wir statt der 4 Schnittpunkte der Seiten mit der Axe nur die 2 Gegenecken

LM diese Nebenseite erhalten, während ein Nebenseitenpaar p und p_1 durch einen bestimmten Punkt P der Axe geht, so ist hiermit auch der Schnittpunkt R des dritten Nebenseitenpaares auf der Axe eindeutig bestimmt; d. h.:

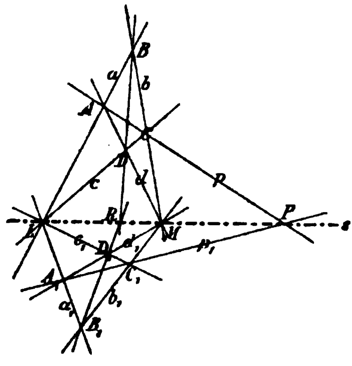


Fig. 71.

b) *Auf einer Nebenseite eines vollständigen Vierseits ist durch den Schnittpunkt mit einer zweiten Nebenseite auch der Schnittpunkt mit der dritten eindeutig bestimmt.*

Vgl. Teil II §. 19, 3b′.

3. Indem wir das Centrum S der in 1 und 2 behandelten räumlichen Gebilde so bewegen, dafs es nahezu in die Ebene der einen Figur gelangt, wird an der p. Lage beider Figuren nichts geändert; dabei kommt auch die zweite Figur mit den Centralstrahlen nahezu in einerlei Ebene mit der ersten. Ebenso wenig ändert sich die p. Lage der in 1 und 2 betrachteten Gebilde, wenn wir die Ebene der einen Figur so um die Axe drehen, dafs sie der Ebene der zweiten Figur unbeschränkt nahe kommt. Es gelten obige Sätze daher auch für den Fall, dafs die Gebilde in einer einzigen Ebene liegen. Da durch Aneinanderreihung von Dreiecken, welche obigen Bedingungen genügen, irgend welche p. Figuren entstehen können, so gilt allgemein der Satz:

a) *Liegen in zwei Figuren einer Ebene je zwei entsprechende Punkte auf einem Strahl eines Centrums und schneiden einander je zwei entsprechende Geraden in einem Punkt einer Axe, so können dieselben als Grenzlagen von p. Figuren zweier Ebenen aufgefafst werden, welch letztere unbeschränkt nahe zusammengerückt sind.*

Dem Satze §. 29, 2c steht alsdann der folgende gegenüber:

b) *In p. Figuren einer Ebene entspricht jeder Centralstrahl sich selbst p.*

Es können nun die im II. Teil, § 22 gegebenen Sätze leicht aus den Beziehungen der Figuren zweier Ebenen abgeleitet werden.

4. Zwei p. Figuren einer Ebene können auch in der Weise entstehen, dafs zwei zu einem Centrum S p. Figuren zweier Ebenen α und β von einem weiteren Centrum S_1 aus auf die erstgenannte Ebene projiciert werden. Es wird alsdann die Projektion von S das Centrum S_2 und die Projektion der Schnittgeraden $\alpha\beta$ die Axe für die Figuren der ersteren Ebene geben. Auf diese Weise entsteht z. B. als Bild einer schief abgeschnittenen Pyramide eine ebene Figur, in welcher die beiden Grundflächen als p. Flächen abgebildet sind. Auch diese Auffassung p. Figuren einer Ebene kann statt der in 3 angegebenen benützt werden.

§. 31. Die Projektion der unendlich fernen Punkte und Geraden.

1. Während jedem Punkt einer Geraden a in der Projektion a_1 ebenfalls ein Punkt entspricht, ist dies nicht der Fall für den Punkt F des zu a_1 parallelen Centralstrahls, $SF \parallel a_1$. Dieser Punkt F, der Fluchtpunkt, hat eine solche Lage, dafs, je näher ihm ein Punkt P oder Q von der einen oder der andern Seite auf der Geraden a kommt, desto mehr rückt die Projektion P_1 oder Q_1 auf der Geraden a_1 in der einen oder andern Richtung in unbeschränkt grofse Entfernung hinaus (I. Teil, §. 3, 4). Da im Übrigen jedem Punkt der Geraden a ein Punkt von a_1 entspricht, so nennt man auch F die Projektion des unendlich fernen Punktes von a_1, als ob die Gerade nur einen unbeschränkt weit entfernten Punkt hätte.

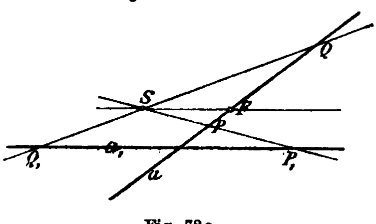


Fig. 72 a.

a) *Die Projektion des unendlich fernen Punktes einer Geraden wird durch den zu dieser Geraden parallelen Centralstrahl auf der Projektion der Geraden bestimmt.*

1'. Während jeder Geraden einer Ebene α in der Projektionsebene α_1 ebenfalls eine Gerade entspricht, gilt dies nicht für die Gerade f der zu α parallelen Centralebene, $Sf \parallel \alpha_1$. Diese Gerade f, die Fluchtgerade, hat eine solche Lage, dafs, je näher ihr eine Gerade p oder q von der einen oder andern Seite mit allen ihren Punkten kommt, desto mehr rückt die Projektion p_1 oder q_1 auf der Ebene α_1 in unbeschränkt grofse Entfernung hinaus (§. 1, 7). Da im Übrigen jeder Geraden der Ebene α eine Gerade von α_1 entspricht, so nennt man die Fluchtgerade auch die Projektion der unendlich fernen Geraden von α_1, gleichsam als ob es nur eine solche Gerade in der Ebene gäbe.

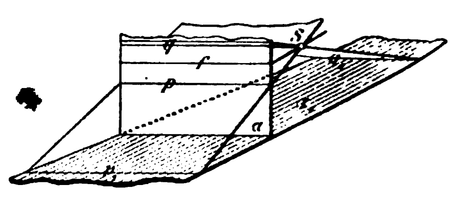


Fig. 72 b.

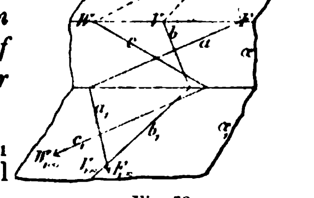
a') *Die Projektion der unendlich fernen Geraden einer Ebene wird durch die zu dieser Ebene parallele Centralebene in der Projektionsebene bestimmt.*

Damit soll nur ausgesprochen sein, dafs, sobald der betr. Punkt oder die betr. Gerade unmefsbar weit hinausgerückt ist, zugleich seine oder ihre Projektion dem Fluchtpunkt bezw. der Fluchtgeraden unbeschränkt nahe gekommen, d. i. mit diesem Gebilde zusammen gefallen ist.

Gemäfs §. 1, 7b folgt noch für die Fluchtgerade:

b) *Die Projektion der unendlich fernen Geraden einer Ebene auf einer zweiten Ebene ist parallel der Axe beider Ebenen.*

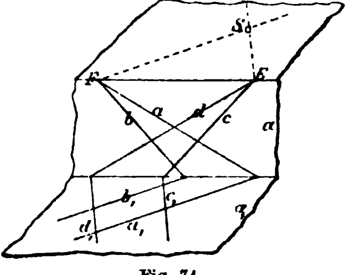
2. Zu irgend welchen Geraden a_1, b_1, c_1 einer Ebene α_1 sind die Centralstrahlen der Fluchtpunkte parallel, $SF \parallel a_1$, $SV \parallel b_1$, $SW \parallel c_1$ und liegen somit (§. 1,7c) in einer zu jener Ebene parallelen Centralebene, d. i. in der Ebene der Fluchtgeraden; somit folgt:


Fig. 73.

Die Projektionen der unendlich fernen Punkte aller Geraden einer Ebene liegen auf der Bildebene in einer einzigen Geraden, der Projektion der unendlich fernen Geraden.

3. Da es für parallele Gerade $a_1 \parallel b_1$ (Fig. 74) nur einen parallelen Centralstrahl SF giebt, so folgt:

a) *Die Projektionen von parallelen Geraden haben einen gemeinsamen Fluchtpunkt. Ein Parallelstrahlenbüschel wird als ein Strahlenbüschel projiciert, dessen Scheitel der Fluchtpunkt zu den parallelen Geraden ist.*


Fig. 74.

Wir schreiben daher auch in der Originalfigur allen parallelen Geraden einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt zu, natürlich nur in Rücksicht auf die Projektionen dieser Geraden.

Sind a, b irgend welche einander in F schneidende Geraden, so können diese auch so projiciert werden, dafs ihre Projektionen a_1 und b_1 parallel werden. Die Bedingung dafür ist die, dafs der Centralstrahl des Scheitels SF parallel der Bildebene ist (§. 1, 6a); daraus folgt:

b) *Irgend ein Strahlenbüschel kann als Parallelstrahlenbüschel projiciert werden der Art, dafs der Scheitel des ersteren die Projektion des unendlich fernen Punktes des letzteren ist.*

4. Mit Rücksicht auf 2 ergiebt sich noch weiter:

a) *Die Projektionen von zwei oder mehreren Parallelstrahlenbüscheln einer Ebene sind ebensoviele Strahlenbüschel, deren Scheitel auf einer Geraden, der Projektion der unendlich fernen Geraden, liegen.*

Dabei ist auszunehmen:

b) *Parallele zur Axe werden stets wieder als solche projiciert;* ihr Fluchtpunkt ist der unendlich ferne Punkt der Fluchtgeraden, d. h. sie sind letzterer parallel (1, b).

Umgekehrt gilt:

c) *Jede Figur kann so projiciert werden, dafs die Projektion von*

irgend einer Geraden in ihr mit allen Punkten in unendliche Entfernung hinausrückt. Irgend welche Strahlenbüschel, deren Scheitel in der Geraden liegen, werden dabei als ebensoviele Parallelstrahlenbüschel projiciert.

Es ist hierzu nur notwendig, dafs die Bildebene parallel zur Centralebene jener Geraden ist.

5. Durch die Projektion ist uns hiernach ein Mittel gegeben, zu irgend einer Figur ein Bild zu erhalten, welches einfachere Beziehungen darbietet als die Originalfigur. So kann z. B. ein Viereck oder Vierseit $abcd$ (Fig. 74) stets als ein Parallelogramm $a_1 b_1 c_1 d_1$ projiciert werden:

a) *Wird ein vollständiges Viereck oder Vierseit so projiciert, dafs die Verbindungsgerade zweier Nebenecke, bezw. eine Nebenseite in unendliche Entfernung fällt, so entsteht ein Parallelogramm.*

Umgekehrt:

b) *Die Projektion eines Parallelogramms ist ein vollständiges Viereck bezw. Vierseit, von welchem die Projektion der unendlich fernen Geraden eine Nebenseite ist.*

Können wir an einem solchen einfachen Bilde projektivische Eigenschaften nachweisen, wie dafs drei oder mehrere Punkte auf einer Geraden liegen oder dafs einander drei oder mehrere Gerade in einem Punkt (in endlicher oder unendlicher Entfernung) schneiden, so gelten diese Eigenschaften auch für die Originalfigur. Von besonderer Wichtigkeit ist aufser diesen graphisch-projektivischen Eigenschaften noch die im folgenden Paragraphen gegebene Beziehung zwischen der Projektion des Mittelpunktes und des unendlich fernen Punktes zu einer Strecke. Wir können hierbei auf das VI. Kapitel des II. Teils verweisen, wollen aber im folgenden Paragraph die genannte Beziehung unabhängig von metrischen Verhältnissen darlegen. Sind die betr. Sätze aus dem zweiten Abschnitt des II. Teils bekannt, so kann hier sofort zum X. Kapitel übergegangen werden.

§. 32. Die Projektion des Mittelpunktes einer Strecke in Verbindung mit der des unendlich fernen Punktes.

1. Sind mit den Grenzpunkten einer Strecke AC, mit deren Mittelpunkt B und dem unendlich fernen Punkt F_∞ der zugehörigen Geraden die Punkte A_1, C_1, B_1, F_1 auf einer zweiten Geraden perspektivisch, so nennen wir letztere beiden Punkte B_1, F_1 **harmonisch zugeordnet** in Bezug auf die Strecke $A_1 C_1$. Ebenso heifsen die Strahlen von irgend einem Centrum nach B_1 und F_1 harmonisch zugeordnet in Bezug auf den Winkel der Strahlen nach A_1 und C_1.

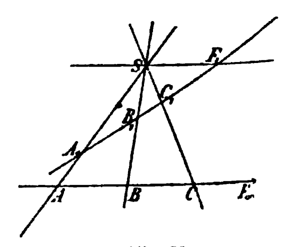


Fig. 75.

Wir können eine Strecke $A_1 C_1$ (Fig. 76b)

stets als die Diagonale eines Parallelogramms und ihren Mittelpunkt P_1 als den Schnittpunkt der zweiten Diagonale auffassen; da die Projektion einer solchen Figur ein vollständiges Vierseit ergiebt, in welchem die Projektion der unendlich fernen Geraden der Originalebene Nebenseite ist, also der Schnittpunkt R der Nebenseite Fluchtpunkt wird, so folgt:

Eine Strecke mit zwei harmonisch zugeordneten Punkten läſst sich als Nebenseite eines vollständigen Vierseits mit den Schnittpunkten der beiden anderen Nebenseiten betrachten.

2. Umgekehrt kann jedes vollständige Vierseit $ABCD$ so projiciert werden, daſs eine Nebenseite EF in unendliche Entfernung

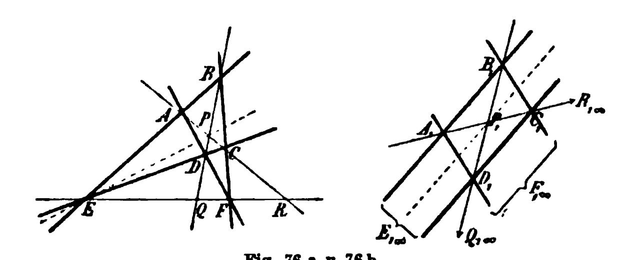


Fig. 76 a. u. 76 b.

fällt, wodurch die Figur als Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ abgebildet wird, in welchem die andern Nebenseiten einander halbieren. Dann ist $APCR$ ⴄ. $A_1P_1C_1R_{1\infty}$; daher folgt nach der in 1 gegebenen Erklärung:

In Bezug auf zwei Gegenecke auf einer Nebenseite eines vollständigen Vierseits sind die Schnittpunkte der beiden anderen Nebenseiten harmonisch zugeordnet.

In Bezug auf zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks sind die Verbindungsgeraden ihres Schnittpunktes nach den beiden andern Nebenecken harmonisch zugeordnet.

Das letztere ergiebt sich leicht aus ersterem, da z. B. die Strahlen von E nach den Punkten P und Q in Bezug auf die nach B und D harmonisch zugeordnet sein müssen.

3. Da die Projektion eines vollständigen Vierseits stets wieder ein solches ist, so folgt aus 1 und 2:

a) *Jede Projektion der Grenzpunkte einer Strecke und zweier harmonisch zugeordneten Punkte ergiebt wiederum solche.*

a′) *Jede Projektion der Schenkel eines Winkels und zweier harmonisch zugeordneten Strahlen ergiebt wiederum solche.*

Ferner schlieſsen wir aus 1, da durch zwei Gegenecke einer Nebenseite und den Schnittpunkt der zweiten Nebenseite auch der Schnittpunkt der dritten eindeutig bestimmt ist (§. 30, 2b):

b. *In Bezug auf zwei Punkte einer Geraden giebt es zu einem dritten Punkte derselben nur einen vierten harmonisch zugeordneten.*

b′. *In Bezug auf zwei Strahlen eines Punktes giebt es zu einem dritten Strahl desselben nur einen vierten harmonisch zugeordneten.*

Das letztere b′ folgt aus b, da andernfalls auf einer Transversalen zwei solche Strahlen auch zwei Punkte als dem dritten zugeordnet ergeben müfsten.

4. Aus dem in 2 hervorgehobenen Fall der Projektion folgt ferner: *Wird eine Strecke mit zwei harmonisch zugeordneten Punkten so projiciert, dafs die Projektion des einen Punktes*

a) in die Mitte der betr. Strecke fällt, so rückt die Projektion des anderen in unbegrenzte Entfernung hinaus.

b) in unendliche Entfernung hinausrückt, so fällt die Projektion des anderen in die Mitte der betr. Strecke.

Für harmonisch zugeordnete Strahlen ergeben sich leicht folgende entsprechende Sätze:

a′. Wenn von zwei harmonisch zugeordneten Strahlen in Bezug auf zwei andere Strahlen der eine den Winkel der letzteren halbiert, so steht der andere normal auf ersterem.

b′. Wenn zwei harmonisch zugeordnete Strahlen in Bezug auf zwei andere Strahlen normal zu einander sind, so halbieren sie die Winkel der beiden anderen Strahlen.

Es sind nämlich solche Strahlen bestimmt durch zwei benachbarte Seiten einer Raute, eine Diagonale und die Richtung der anderen Diagonale.

5. Sind nun E, F die Gegenecken einer Nebenseite eines vollständigen Vierseits $ABCD$, Q und R die Schnittpunkte der beiden

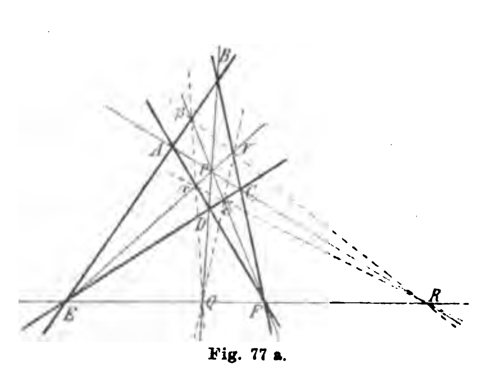


Fig. 77 a.

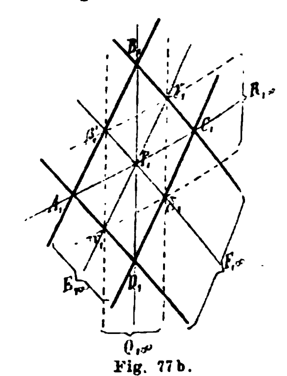


Fig. 77 b.

anderen Nebenseiten und verbindet man den Schnittpunkt P der letzteren mit E und F, so schneiden diese Verbindungsgeraden die vier Seiten in vier Punkten $\alpha\beta\gamma\delta$. Projicieren wir die Figur so, dafs EF in unendliche Entfernung hinausrückt, so wird $A_1B_1C_1D_1$

ein Parallelogramm, $\alpha_1\gamma_1 \parallel A_1B_1 \parallel C_1D_1$, $\beta_1\delta_1 \parallel A_1D_1 \parallel B_1C_1$, so dafs die Punkte $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, wie leicht nachzuweisen, die Seiten des Parallelogramms halbieren und wiederum ein Parallelogramm bestimmen, in welchem $\alpha_1\beta_1 \parallel B_1D_1 \parallel \gamma_1\delta_1$, $\beta_1\gamma_1 \parallel A_1C_1 \parallel \alpha_1\delta_1$; diesen beiden Parallelstrahlenbüscheln entsprechen daher in der Originalfigur Strahlenbüschel, deren Scheitel in Q und R liegen (vgl. II. Teil, §. 19 4 b). Es sind somit auch Q und R die Gegenecken eines vollständigen Vierseits $\alpha\beta\gamma\delta$, und E, F sind die Schnittpunkte der Nebenseiten $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ mit der Nebenseite QR. Daraus folgt (2):

Wenn zwei Punkte (oder Strahlen) harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf zwei andere, so sind es auch letztere in Bezug auf erstere.

Wir nennen daher die vier Punkte kurz harmonische Punkte und die zugehörigen Strahlen harmonische Strahlen.

In Verbindung mit 4 folgt nun, dafs, wenn die Projektion irgend eines der vier Punkte in unbeschränkt grofse Entfernung hinausrückt, der zugeordnete die Strecke der beiden anderen halbiert und umgekehrt. Wir werden hiervon im folgenden den ausgedehntesten Gebrauch machen.

Neuntes Kapitel.

Abbildung des Kreises als Kreis.

§. 33. Pol und Polare im Kreis.

1. Wird ein Kreis von einer Ebene auf eine zweite projiciert, so ist die Gesamtheit der Centralstrahlen, der Schein des Kreises, eine Kegelfläche. Wenn der Kreis von irgend einer Linie geschnitten wird, so geht der Centralstrahl des Schnittpunkts, als gemeinsamer Strahl der Scheine beider Linien, auch durch den Schnittpunkt der Projektionen dieser Linien; für den Fall, dafs beide Linien der Originalfigur in unmefsbar nahe gerückten Punkten zusammentreffen, gilt das gleiche auch für die Projektionen der Linien. Ganz allgemein gilt:

a. Die Projektion eines Schnittspunktes zweier Linien ist der Schnittpunkt der Projektionen dieser Linien.

b. Die Projektion einer Tangente und ihres Berührungspunktes ist Tangente, bezw. Berührungspunkt in den Projektionen der betr. Linien.

2. Nehmen wir auf dem Durchmesser AB (Fig. 78) eines Kreises irgend einen Punkt P und den mit ihm harmonisch zugeordneten Punkt Q an und ziehen in beiden Punkten die Normalen des Durchmessers $MN \perp AB$, $QR \perp AB$, so heifsen P und Q zugeordnete Pole, MN und QR zugeordnete Polaren; P und QR heifsen in Bezug auf einander Pol und Polare, ebenso Q und MN.

Ziehen wir $SQ \perp QR$ und machen $\overline{SQ}^2 = QA \cdot QB$ und nehmen wir nun S als Centrum der Projektion und eine zu SQR parallele Ebene als Bildebene, so erhalten wir als Projektion des Kreises wiederum einen Kreis. Es ist nämlich in der projicierenden Kegelfläche die Ebene SAB der Hauptaxenschnitt, da SQ und AQ normal zu QR (§. 4, 1a u. 3a); ferner wird ein durch ABS gelegter Kreis von QS berührt (II. Teil, §. 9, 2b); daher ist $\sphericalangle BSQ = BAS$, und da $A_1B_1 \parallel SQ$, so ist $\sphericalangle A_1B_1S = BSQ = SAB$; d. h. die Bildebene ist antiparallel zur Grundfläche, somit ihr Schnitt mit der Kegelfläche ein Kreis (§. 18, 5).

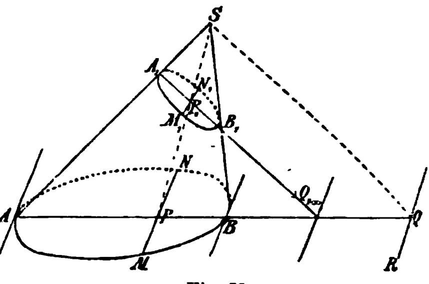


Fig. 78.

In dieser Projektion ist A_1B_1 ein Durchmesser, und da die Projektion von Q in unmeſsbare Entfernung hinausrückt, so wird P_1 Mittelpunkt von A_1B_1, d. i. Mittelpunkt des Kreises. Wie $MN \perp AB$, so bleibt auch $M_1N_1 \perp A_1B_1$, da sowohl MN als $M_1N_1 \parallel QR$ und parallel der Axe (§. 31, 4b.)

Wir haben hierbei P beliebig angenommen; ebensowohl hätten wir von der Geraden QR ausgehen und darnach den Pol P bestimmen können. Es ergiebt sich hieraus:

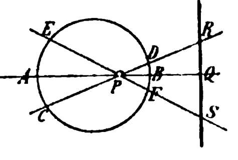
Ein Kreis kann stets als Kreis projiciert werden, während eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a. Ein beliebiger Punkt im Innern des Kreises wird als Mittelpunkt projiciert und seine Polare als unendlich ferne Gerade. Der Durchmesser des Punktes und die zu ihm normale Sehne derselben werden hierbei als zwei zueinander normale Durchmesser abgebildet.

b. Eine beliebige Gerade auſserhalb des Kreises wird als unendlich ferne Gerade projiciert und ihr Pol als Mittelpunkt. Die zugeordnete Polare und der zu ihr normale Durchmesser werden als zwei zu einander normale Durchmesser abgebildet.

3. Aus dieser perspektivischen Beziehung ergiebt sich nun für Sekanten eines Kreises:

a. In Bezug auf die Schnittpunkte aller Strahlen eines Punktes liegen die diesem harmonisch zugeordneten Punkte auf der Polare desselben.



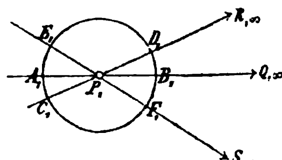


Fig. 79.

Denn wenn der Punkt innerhalb des Kreises liegt,

so läfst er sich als p. zu dem Mittelpunkt eines p. Kreises auffassen, während den Punkten der Polare die unendlich fernen Punkte entsprechen.

Liegt der Punkt aufserhalb des Kreises, so läfst er sich als unendlich ferner Punkt eines Durchmessers in einem p. Kreis projicieren, so dafs alle Geraden durch ihn parallel sind, während die Polare des Punktes als zu ersterem Durchmesser normaler Durchmesser abgebildet wird, der die Sehnen halbiert. In beiden Fällen folgt somit obiger Satz aus der Erklärung §. 32, 1.

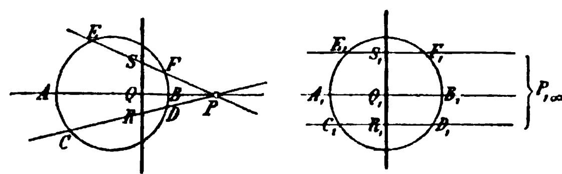


Fig. 80.

Da die harmonischen Punkte in der Projektion eben solche bleiben, so folgt für den Fall, dafs der Kreis als Kreis projiciert wird:

b) *Pol und Polare bleiben auch in der Projektion Pol und Polare.*

Indem wir von der in §. 31 eingeführten Redeweise Gebrauch machen, können wir nun dem in 2 betrachteten Fall der Projektion auch folgenden Ausdruck geben:

c. *Der Mittelpunkt und die unendlich ferne Gerade entsprechen einander als Pol und Polare.*

d. *Ein Durchmesser und der unendlich ferne Punkt der zu ihm normalen Richtung entsprechen einander als Polare und Pol.*

4. Ziehen wir in den Schnittpunkten der Strahlen eines gegebenen Punktes P mit einem Kreis Tangenten, so läfst sich der Punkt, falls er innerhalb des Kreises liegt, als Mittelpunkt P_1 eines p. Kreises projicieren, wodurch die betr. Tangenten paarweise als Parallele projiciert werden. Die Schnittpunkte sind somit in unendliche Entfernung projiciert und es entsprechen diesen in der Originalfigur die Punkte der Polare des gegebenen Punktes; es liegen also auf dieser Polare die Schnittpunkte der Tangenten. Falls der gegebene Punkt P aufserhalb liegt (Fig. 82), läfst sich die durch ihn gezogene Normale der Centralen als unendlich ferne Gerade projicieren, wodurch alle Sekanten des Punktes als Parallele zu der Centralen und die Polare des Punktes als zu ihnen normaler Durchmesser projiciert werden; auf

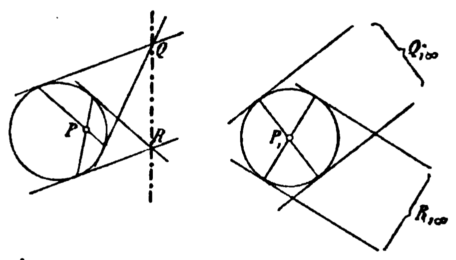


Fig. 81.

diesem Durchmesser liegen aber die Schnittpunkte der Tangenten, daher in der ursprünglichen Figur ebenfalls in der Polare des Punktes.

a) *Die Schnittpunkte der Tangentenpaare zu allen Strahlen eines Punktes liegen auf der Polare des Punktes.*

Fig. 82.

a′) *Die Berührungssehnen der Tangentenpaare von allen Punkten einer Geraden schneiden (in der Verlängerung) einander im Pol der Geraden.*

Insbesondere folgt:

b) *Die Berührungssehne des Tangentenpaares eines Punktes ist Polare desselben.*

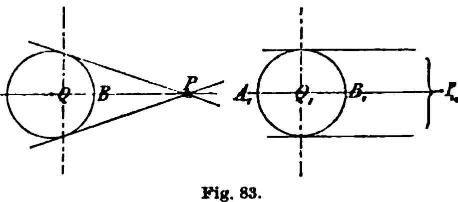


Fig. 83.

Rückt der Punkt dem Kreisumfang unmeſsbar nahe, so wird seine Polare nahezu mit seiner Tangente zusammenfallen, m. a. W.:

c) *Zu einem Punkt des Umfangs ist seine Tangente Polare.*

5. Bestimmen wir von beliebigen Strahlen eines Punktes im Innern des Kreises die Pole, und projicieren wir den Kreis als Kreis so, daſs der Punkt als Mittelpunkt, die Strahlen als Durchmesser abgebildet werden, so liegen deren Pole in unendlicher Entfernung, somit in der Originalfigur auf der Polare des gegebenen Punktes. Liegt der Punkt auſserhalb des Kreises, so projicieren wir ihn als unendlich fernen Punkt eines Durchmessers, während die Polare dieses Punktes als Durchmesser abgebildet wird, welcher zu ersterem Durchmesser normal ist. Auf diesem Durchmesser liegen alle Pole der zu ihm normalen Geraden, welche die Projektionen der Strahlen des gegebenen Punktes sind. In beiden Fällen folgt:

a) *Für alle Punkte einer Geraden gehen die Polaren durch den Pol der Geraden.*

a′) *Für alle Strahlen eines Punktes liegen die Pole auf der Polare des Punktes.*

§. 34. Viereck und Vierseit, Sechseck und Sechsseit des Kreises.

1. Projicieren wir einen Kreis mit dem Sehnenviereck $ABCD$ so, daſs der Kreis als Kreis abgebildet wird, während das Neben-eck R, das innerhalb des Kreises

1.′ Projicieren wir einen Kreis mit dem Tangentenvierseit $abcd$ so, daſs der Kreis als Kreis abgebildet wird, während die Neben-seite r_1, welche auſserhalb des

liegt, Mittelpunkt wird, so wird die Projektion des Sehnenvierecks ein Rechteck und die Projektionen der Nebenecke Q und S fallen

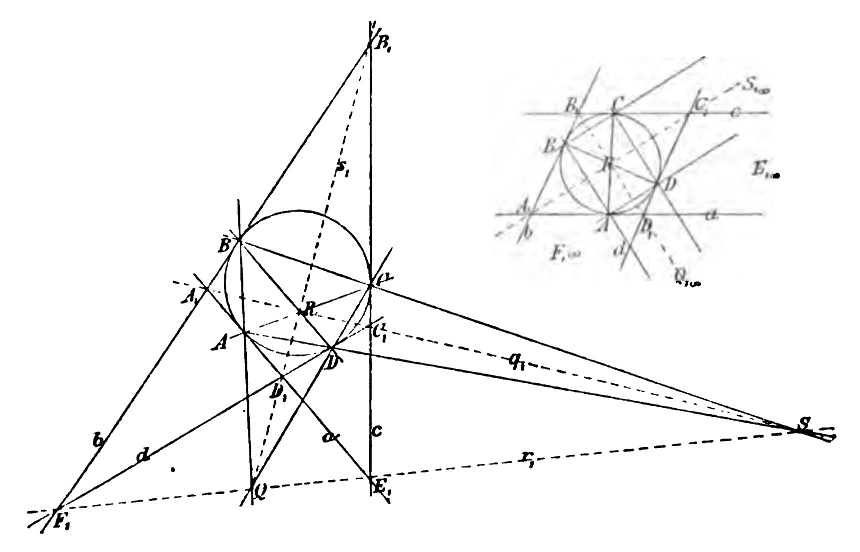


Fig. 84 a u. 84 b.

in unendliche Entfernung, da die Seiten paarweise parallel werden. Es ist somit R Pol zu QS. Da zugleich die Projektion von RQ ein zu der Projektion von RS normaler Durchmesser ist, so ist auch S Pol zu RQ, ebenso Q Pol zu RS.

In dem Sehnenviereck ist die Verbindungsgerade zweier Nebenecke Polare des dritten Nebenecks.

2. Ziehen wir noch in $ABCD$ die Tangenten, so folgt ebenfalls leicht aus der Projektion oder aus §. 33, 4a, dafs die Schnittpunkte der Tangentenpaare paarweise auf den Geraden RS, SQ, QR liegen.

Kreises liegt, in unendliche Entfernung fällt, so wird die Projektion des Tangentenvierseits eine Raute und der Schnittpunkt R der beiden andern Nebenseiten wird als Schnittpunkt der Diagonalen der Raute zugleich Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Daher ist r_1 Polare zu R. Da zugleich die andern Nebenseiten als zu einander normale Durchmesser projiciert werden, so ist A_1C_1 Polare zu Q und B_1D_1 Polare zu S.

In dem Tangentenvierseit ist der Schnittpunkt zweier Nebenseiten Pol der dritten Nebenseite.

2.' Zeichnen wir noch das durch die Berührungspunkte bestimmte Sehnenviereck, so folgt aus der Projektion oder aus §. 33, 4a', dafs die Berührungssehnen einander paarweise in den Schnittpunkten r_1s_1, s_1q_1, q_1r_1 schneiden.

Vier Punkte des Umfangs und deren Tangenten bestimmen ein Sehnenviereck und Tangentenvierseit,

in welchen die Nebenseiten des letztern auf die Verbindungsgeraden der Nebenecke des ersteren fallen.

in welchen die Nebenecke des ersteren in die Schnittpunkte der Nebenseiten des letzteren fallen.

3. Sechs Punkte auf einem Kreis *123456* bestimmen durch die Verbindungsgeraden je zweier aufeinander folgenden Punkte ein Sechseck, von welchen die 3 Schnittpunkte der 3 einander gegenüber liegenden Seitenpaare, P von *12* und *45*, Q von *23* und *56*, R von *34* und *61*, auf einer Geraden liegen.

3.' Sechs Tangenten eines Kreises *I II III IV V VI* bestimmen durch die Schnittpunkte je zweier aufeinander folgenden Geraden ein Sechsseit, von welchen die 3 Verbindungsgeraden der 3 einander gegenüber liegenden Eckenpaare, p von *I II* und *IV V*, q von *II III* und *V VI*, r von *III IV* und *VI I* durch einen Punkt gehen.

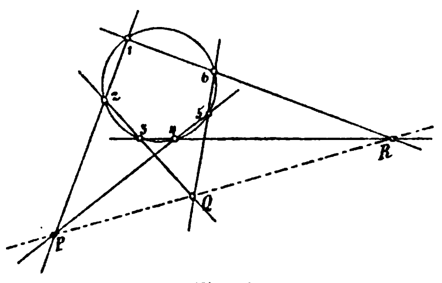


Fig. 85 a.

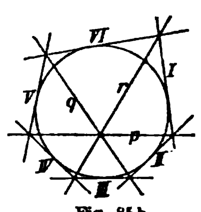


Fig. 85 b.

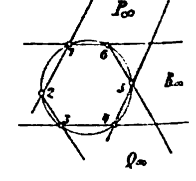
Es ist dies der Satz von Pascal:

In einem Sehnensechseck liegen die Schnittpunkte der Paare gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.

Es ist dies der Satz von Brianchon:

In einem Tangentensechsseit gehen die Verbindungsgeraden der 3 Paare gegenüberliegender Ecke durch einen Punkt.

Um zunächst den ersten Satz zu beweisen, projicieren wir den Kreis als Kreis so, dafs die Gerade PQ in unendliche Entfernung rückt, dafs also $12 \parallel 45$, $23 \parallel 56$ wird. Da dann Bogen $\overset{\frown}{234} = \overset{\frown}{561}$ und $\overset{\frown}{612} = \overset{\frown}{345}$ ist, so ergiebt die Addition, dafs $\overset{\frown}{61234} = \overset{\frown}{34561}$ und die Subtraktion dieser Bögen von dem ganzen Umfang, dafs $\overset{\frown}{456} = \overset{\frown}{123}$, somit $61 \parallel 34$ ist, d. i. der Schnittpunkt dieser beiden Geraden liegt in der Projektion ebenfalls auf der unendlich fernen Geraden. Daher mufs in der Originalfigur der Schnitt R auf der Geraden PQ liegen.


Fig. 85 a₁.

Der Lehrsatz gilt jedoch nicht blos für den Fall, dafs die 6 Punkte in der Ordnung des Umlaufs der Kreislinie aufeinander folgen; die Reihenfolge ist ganz willkürlich. Dabei kann die Schnittgerade,

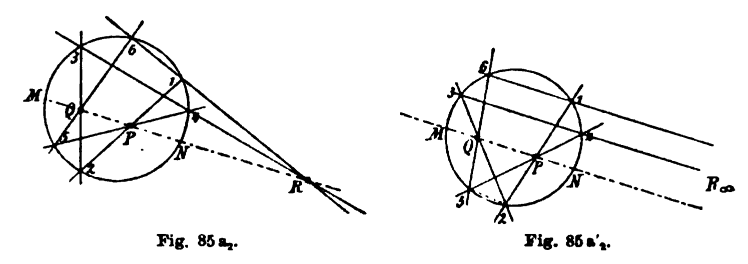


Fig. 85 a_2. Fig. 85 a'_2.

Pascal'sche Gerade, möglicher Weise den Kreis schneiden, sodafs die angeführte Projektionsart nicht möglich ist. Liegt nur ein Schnittpunkt aufserhalb des Kreises, wie in Fig. 85a_2 der von *3 4* und *6 1*, so projiciere man so, dafs, während der Kreis als Kreis abgebildet wird, der Schnittpunkt *3 4* mit *PQ* in unendliche Entfernung fällt. Es ist dann $\widehat{3M} = \widehat{N4}$, $\widehat{3M} + \widehat{2N} = \widehat{2N} + \widehat{N4}$ oder $\sphericalangle 2QN = 452$ (I. Teil §. 3[illegible], 3a). Daher ist *25QP* ein Sehnenviereck, $\sphericalangle\, 5Q2 = 5P2$ oder $\widehat{52} + \widehat{36} = \widehat{52} + \widehat{41}$, $\widehat{36} = \widehat{41}$, $\overline{61} \parallel 34 \parallel PQ$, wor-

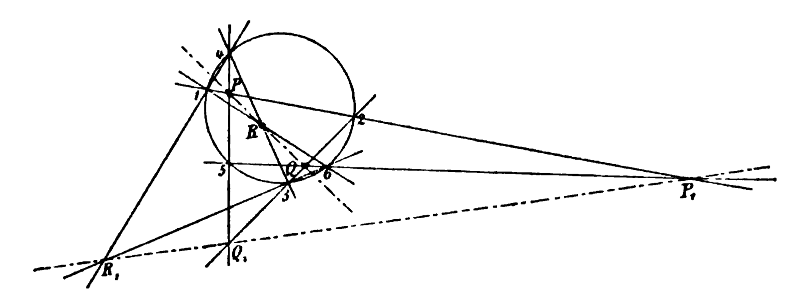


Fig. 85 a_3.

aus folgt, dafs in der Originalfigur *6 1*, *3 4* und *PQ* durch einen Punkt gehen.

Fallen alle 3 Schnittpunkte in den Kreis, wie in Fig. 85a_3, so projicieren wir den Kreis als Kreis so, dafs in dem Sechseck *123654* der Schnittpunkt P_1 von *1 2* und *6 5* und der Schnittpunkt Q_1 von *2 3* und *5 4* in unendliche Entfernung fallen, bezw. $12 \parallel 65$, $23 \parallel 54$ wird. Dann ist $\widehat{15} = \widehat{62}$, $\widehat{53} = \widehat{24}$, also $\widehat{153} = \widehat{624}$ somit $36 \parallel 41$, woraus folgt, dafs der Schnittpunkt *R* von *4 1* und

Fig. 85 a'_3.

36 in der Originalfigur auf der Geraden P_1Q_1 liegt. Alsdann ist das Dreiseit *14P* 𝔭. *63Q* (nach §. 30, 1'). Daher geht die Gerade *61* durch den Schnittpunkt *R* von *PQ* und *34* als dem Centrum der Projektion.

Wenden wir uns zu dem Tangentensechsseit, so wird in einer Projektion des Kreises als Kreis, in welcher 2 Paar Berührungssehnen parallel sind, nach Vorangehendem auch das dritte Paar parallel und die Verbindungsgeraden der Tangentenschnittpunkte mit dem Mittelpunkte fallen paarweise in eine Gerade (I. T. §. 24, 9), bzw. die 3 Verbindungsgeraden der gegenüber liegenden Schnittpunkte schneiden einander im Mittelpunkt, daher auch in der Originalfigur in einem Punkt.

Fig. 85 b₁.

Übrigens sind auch *p*, *q*, *r* die Polaren der Schnittpunkte der Berührungssehnen zu *I II* und *IV V*, bezw. *II III* und *V VI*, *III IV* und *VI I*. Da diese Schnittpunkte auf einer Geraden liegen nach dem Satz von Pascal, so schneiden einander *pqr* in einem Punkt (§. 33, 5a).

Zusatz: Zu weiteren Ableitungen aus diesen Sätzen verweisen wir einerseits auf Teil II §. 17, 5—7, andrerseits auf §. 38, 4 u. 5.

§. 35. Perspektivische Lage zweier Kugelschnitte.

1. Wird eine Kugel von irgend zweien (nicht parallelen) Ebenen geschnitten und legen wir eine weitere Ebene durch die Normalen des Mittelpunkts nach den beiden Ebenen, so steht diese Ebene auf den beiden Kugelschnitten normal, schneidet sie in zwei Durchmessern *AB* und A_1B_1 und schneidet die Kugel in einem Hauptkreis in welchem die Grenzpunkte jener Durchmesser ein Sehnenviereck AA_1BB_1 bestimmen. In diesem Sehnenviereck kann nun jedes der beiden nicht auf den Durchmessern liegenden Nebenecke *S* oder S_1 als Centrum der Projektion für beide Kreise betrachtet werden. Denn die Winkel des Sehnenvierecks ergeben, dafs in dem projicierenden Kegel die Ebene des einen Kreises antiparallel zu der des andern ist; es mufs

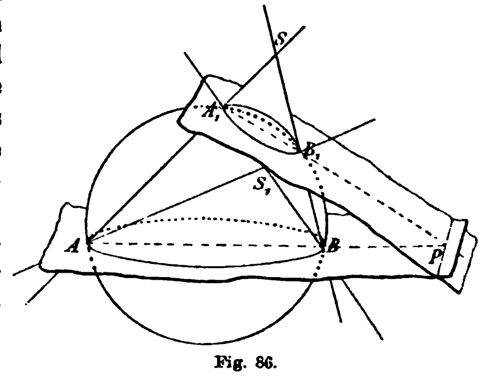


Fig. 86.

also der betr. Kegelschnitt ebenfalls ein Kreis um den Durchmesser sein, der auch dem Kugelschnitt angehört.

a) *Irgend zwei Kreise einer Kugel sind* 𝔭. *der Art, dafs die Durchmesser beider Kreise, welche auf der durch den Kugelmittelpunkt gelegten Normalebene liegen, einander* 𝔭. *entsprechen.*

Umgekehrt gilt aber auch:

b) *Wenn zwei Kreise auf zweien einander schneidenden Ebenen* 𝔭. *sind, so kann man eine Kugel durch sie legen.*

Denn in solchen Kreisen müssen die zur Axe p parallelen Tangenten 𝔭. sein, somit auch die zur Axe normalen Durchmesser AB und A_1B_1; die das Centrum der Projektion enthaltende Ebene ABA_1B_1 dieser Durchmesser ist somit normal zur Axe, also auch normal zu den Ebenen beider Kreise; eine Umkehrung der in §. 18, 5 gegebenen Ableitung zeigt, dafs beide letztere Ebenen antiparallel sind in Bezug auf den projicierenden Kegel, so dafs ein Kreis um ABA_1B_1 gelegt werden kann, dessen Rotation eine Kugel ergiebt, und dieser Kugel gehören ebenfalls die Kreise um AB und A_1B_1 an.

2. Aus 1 b folgt in Verbindung mit §, 7, 5 c:

Bei zwei 𝔭. *Kreisen auf zweien einander schneidenden Ebenen ist:*

a) *das Produkt der Abschnitte von jedem Strahl des Centrums nach zwei* 𝔭. *Punkten konstant.*

b) *die Potenz irgend eines Punktes der Axe für beide Kreise die gleiche.*

Die Axe heifst daher auch Potenzgerade beider Kreise.

3. Als besondere Fälle der 𝔭. Lage auf zwei Ebenen sind hervorzuheben:

a) *Irgend zwei einander in zwei Punkten schneidende Kreise zweier Ebenen sind* 𝔭. *in Bezug auf die gemeinsame Sekante als Axe.*

b) *Irgend zwei einander berührende Kreise zweier Ebenen sind* 𝔭. *in Bezug auf die gemeinsame Tangente als Axe.*

In beiden Fällen gehören nämlich die beiden Kreise der Kugel an, welche durch die Rotation des Kreises entsteht, der durch die Grenzpunkte der zur Axe normalen Durchmesser gelegt werden kann.

4. Drehen wir die eine Ebene beider 𝔭. Kreise um die Axe, so wird in den Bedingungen für die 𝔭. Lage nichts geändert. Dabei kann die zweite Ebene der ersteren unmefsbar nahe kommen. Daher gelten obige Sätze auch für zwei Kreise einer einzigen Ebene.

Irgend zwei Kreise einer Ebene können betrachtet werden als die Grenzlagen 𝔭. *Kreise zweier einander schneidenden Ebenen der Art, dafs die in dem Punkt gleicher Potenzen auf der Centralen gezogene Normale die Axe ist und der Ähnlichkeitspunkt beider Kreise Centrum der Projektion. Es entsprechen einander die nicht* 𝔭. ä. *liegenden Punkte eines Centralstrahls.*

Dafs hierbei in der That das Centrum der Projektion in den Ähnlichkeitspunkt fällt, folgt aus 2 a, da nach diesem Satze, wenn r und r_1 die Radien, m und m_1 die Abstände der Kreismittelpunkte von dem auf den Centralen liegenden Centrum der Projektion sind, die Gleichung gelten mufs:

$$(m + r)(m_1 - r_1) = (m - r)(m_1 + r_1)$$

oder $\frac{m_1 - r_1}{m_1 + r_1} = \frac{m - r}{m + r}$, woraus folgt; $\frac{m_1}{r_1} = \frac{m}{r}$, $\frac{m}{m_1} = \frac{r}{r_1}$.

Es schliefsen sich hier die schon im II. Teil §. 23 abgeleiteten Sätze an.

Zehntes Kapitel.

Abbildung des Kreises als Kegelschnitt.

§. 36. Graphisch-projektivische Eigenschaften der Kegelschnitte.

1. Unter dem Namen Kegelschnitt begreifen wir das perspektivische Bild eines Kreises sowie irgend eine perspektivische Projektion eines solchen Bildes, den Kreis selbst natürlich mit eingeschlossen.

Anmerkung. Die in §. 7, 2 angegebene Entstehungsart von Kegelschnitten ist ein besonderer Fall der hier gegebenen. Dafs die aus jenem Fall abgeleiteten Sätze auch bei dieser allgemeinen Begriffsbestimmung ihre Giltigkeit behalten, wird im folgenden (§. 41 und 43) nachgewiesen werden.

Da irgend welche projektivische Eigenschaft einer Figur auch bei der Projektion eines Bildes derselben sich nicht ändert, so haben alle solche für den Kreis geltende Eigenschaften auch ihre Giltigkeit für alle Kegelschnitte. Gemäfs §. 33, 1 folgt somit:

a) *Eine Gerade in der Ebene eines Kegelschnitts schneidet denselben entweder in zwei Punkten, oder sie berührt ihn oder sie hat keinen Punkt mit dem Kegelschnitt gemein.*

b) *Von einem Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts können an denselben entweder zwei Tangenten gezogen werden, oder keine, oder eine; das letztere nämlich, sobald der Punkt auf dem Kegelschnitt selbst liegt.*

Im ersteren Fall sagt man, der Punkt liege aufserhalb des Kegelschnitts, im zweiten Fall innerhalb.

2. Wird ein Kreis oder Kegelschnitt so abgebildet, dafs eine Gerade, welche das Original nicht schneidet, Fluchtgerade wird, so hat das Bild keinen unendlich fernen Punkt und heifst Ellipse (Fig. 87 a); berührt die Fluchtgerade das Original, so hat das Bild einen unendlich fernen Punkt und eine unendlich ferne Tangente und heifst Parabel

(Fig. 87b); schneidet die Fluchtgerade das Original, so hat das Bild zwei unendlich ferne Punkte und heifst Hyperbel (Fig. 87c). Im letzteren Fall heifsen die Projektionen der Tangenten jener Schnittpunkte die Asymptoten des Kegelschnittes; dieselben sind als Tangenten aufzufassen, deren Berührungspunkte in unendliche Ferne hinausgerückt sind, denen sich also der Kegelschnitt mehr und mehr nähert, ohne sie in endlicher Entfernung zu erreichen.

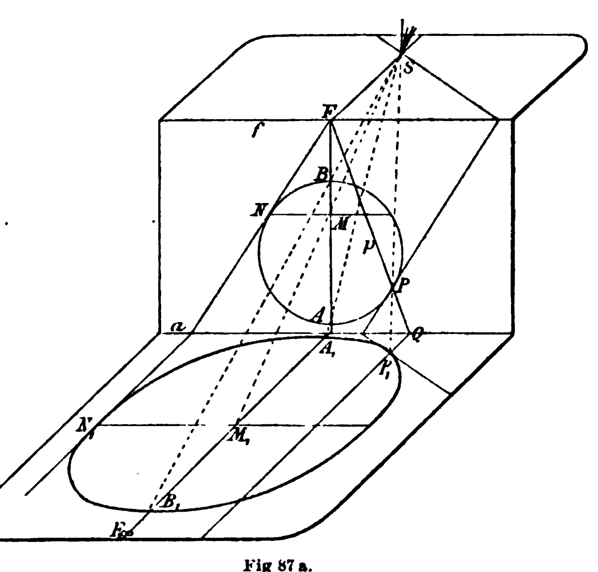


Fig 87 a.

Da bei einer Projektion nur eine Gerade in unendliche Entfernung hinausrücken kann, so folgt aus a, dafs jeder Kegelschnitt einer der drei genannten Formen angehören mufs.

3. Ist das Centrum S, die Axe a und die Fluchtgerade f gegeben so findet man zu einem Punkt P des Originals den p. Punkt, indem man durch den Punkt P eine Gerade p in der Originalebene zieht, welche die Axe in Q, die Fluchtgerade in F schneide. Das Bild dieser Geraden ist die durch Q parallel zu SF gezogene Gerade. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Centralstrahl SP ist das Bild des Punktes P. Wählt man als Gerade p die Tangente in P, so ist deren Projektion ebenfalls Tangente.

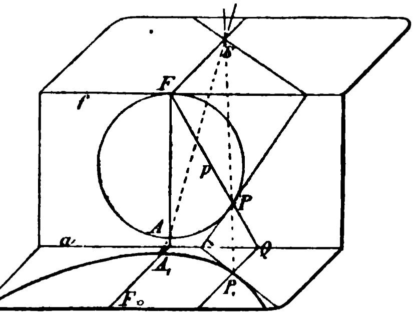


Fig. 87 b.

4. Bei der Ellipse und Parabel erhält man alle Punkte des Bildes durch die Halbstrahlen des Centrums nach den Punkten des Originals, bei der Hyperbel dagegen nur den Teil einerseits der Fluchtgeraden auf diese Weise, den andern Teil dagegen durch die Gegenstrahlen

der betr. Punkte. Deshalb liegen bei der Ellipse und Parabel wie beim Kreis alle Punkte des Kegelschnittes einerseits von einer Geraden, welche den Kegelschnitt in einem Punkt berührt oder in keinem Punkt trifft; dagegen besteht die Hyperbel aus zwei Teilen, welche je auf den Gegenseiten solcher Geraden liegen.

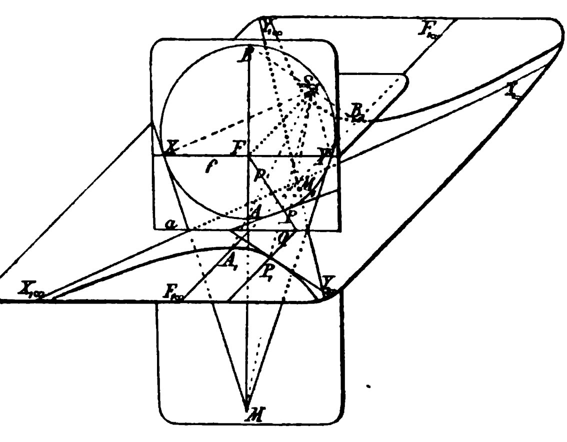


Fig. 87 c.

§. 37. Mittelpunkt und zugeordnete Durchmesser in Kegelschnitten.

1. Aufser den graphisch-projektivischen Eigenschaften des Kreises lassen sich sofort auch alle auf harmonische Punkte und Strahlen bezügliche den Kegelschnitten zuschreiben. Aus §. 33, 3 folgt:

a) *In Bezug auf die Schnittpunkte der Strahlen eines Punktes mit einem Kegelschnitt liegen die dem Punkt harmonisch zugeordneten Punkte auf einer Geraden, der Polare des Punkts.*

Der Punkt selbst heifst auch hier der Pol der Geraden.

Auch die in §. 33, 4 und §. 34 gegebenen Sätze gelten für die Kegelschnitte, da sie sich nur auf Pol und Polare und die Schnittpunkte von Geraden beziehen.

Zur Konstruktion der Polare eines Punktes P kann daher ein Sehnenviereck gezeichnet werden, von welchem der Punkt ein Nebeneck ist; die Polare ist die Verbindungsgerade der beiden andern Nebenecke. Liegt der Punkt aufserhalb des Kreises, so ist damit auch die Aufgabe gelöst, die Berührungspunkte seiner Tangenten zu bestimmen (§. 33, 4 b).

Um zu einer beliebigen Geraden den Pol zu finden, bestimmt man die Polaren zweier Punkte der Geraden, deren Schnittpunkt dann den gesuchten Pol liefert (nach §. 33, 5 a).

b) *Zu jedem Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts giebt es eine Polare, zu jeder Geraden einen Pol.*

2. Bei der Entstehung eines Kegelschnitts durch Projektion eines Kreises oder irgend eines Originalkegelschnittes wird immer das Bild einer Geraden der Originalebene in unendliche Entfernung hinausrücken, nämlich die Projektion der Fluchtgeraden f, welche durch die

zur Bildebene parallele Centralebene bestimmt ist. Der Pol M dieser Geraden wird daher im Bild als Mittelpunkt M_1 aller durch ihn gezogenen Sehnen erscheinen (Fig. 87). Bei der Ellipse liegt dieser Punkt im Innern, da die Fluchtgerade das Original nicht schneidet; bei der Hyperbel liegt er aufsen, im Schnittpunkt der Asymptoten, da diese die Projektionen der Tangenten in den Schnittpunkten XY der Fluchtgeraden sind und somit (nach §. 33, 4b) ihr Schnittpunkt Pol der Berührungssehne ist. Bei der Parabel ist der Pol der Fluchtgeraden ihr Berührungspunkt (nach §. 33, 4c) und seine Projektion fällt somit ebenfalls in unendliche Entfernung. Indem wir von der früher eingeführten Redeweise Gebrauch machen, die jedoch stets nur in Rücksicht auf die Projektion ihre Bedeutung hat, können wir alle drei Fälle in der Form zusammenfassen (vgl. §. 33, 3c):

a) *Der Pol der unendlich fernen Geraden eines Kegelschnitts ist Mittelpunkt desselben, d. h. alle Sehnen durch ihn werden in ihm halbiert.*

b) *Der Mittelpunkt der Hyperbel ist der Schnittpunkt der Asymptoten.*

c) *Der Mittelpunkt der Parabel ist ihr unendlich ferner Punkt.*

3. Alle durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes gezogenen Sehnen heifsen **Durchmesser** desselben.

a) *Bei Ellipse und Hyperbel sind die Grenzpunkte eines Durchmessers vom Mittelpunkt gleichweit entfernt; bei der Parabel sind alle Durchmesser parallel und einerseits unbegrenzt.*

Die Tangenten in den Grenzpunkten eines Durchmessers müssen einander auf der Polare des Mittelpunktes schneiden (§. 33, 4a), in

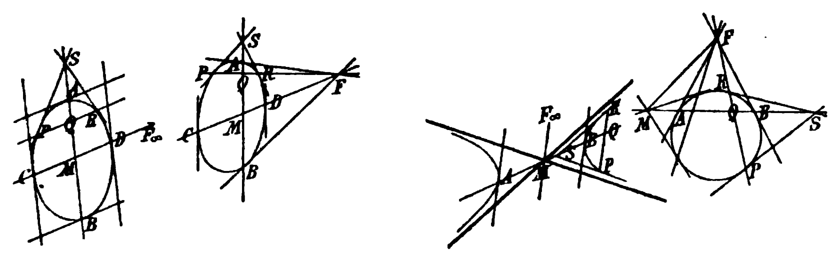


Fig. 88 I. Fig. 88 II.

dem Original zu dem Kegelschnitt auf der Fluchtgeraden, in dem Kegelschnitt selbst in unendlicher Entfernung, m. a. W.:

b) *Die Tangenten an den Grenzpunkten eines Durchmessers sind parallel.*

Die Richtung der Tangente an dem Grenzpunkte eines Durchmessers heifst diesem **zugeordnet** (konjugiert), ebenso die ihr parallelen Sehnen und der ihr parallele Durchmesser.

In der Originalfigur schneiden einander diese Geraden im Schnittpunkt der betr. Tangenten, dem Pol der Berührungssehne, m. a. W.:

c) *Ein Durchmesser ist die Polare des unendlich fernen Punktes der zugeordneten Richtung,*
(vgl. §. 33, 3d) woraus dann folgt:

d) *Ein Durchmesser halbiert alle ihm zugeordneten Sehnen,*
und umgekehrt:

e) *Wird eine Sehne von einem Durchmesser halbiert, so ist sie ihm zugeordnet.*

4. Da die zu AB zugeordnete Sehne PR in der Originalfigur durch den Pol F der Geraden AB geht, so müssen die Tangenten in den Grenzpunkten derselben einander in der Polare des Punktes F, d. i. auf der Geraden AB schneiden (§. 33, 4a).

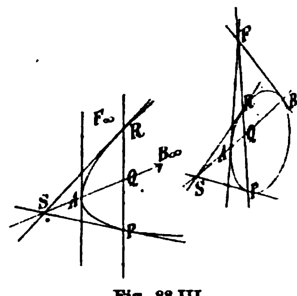


Fig. 88 III.

a) *Die Tangenten in den Grenzpunkten der einem Durchmesser zugeordneten Sehnen schneiden einander paarweise auf dem Durchmesser.*

Insbesondere müssen hiernach die Tangenten in den Grenzpunkten des zugeordneten Durchmessers CD einander in dem unendlich fernen Punkt des ersten Durchmessers AB schneiden. Daher ist dieser dem Durchmesser CD zugeordnet, woraus dann folgt:

b) *Wenn ein Durchmesser einem anderen zugeordnet ist, so ist auch letzterer dem ersteren zugeordnet.*

Ist AC ein Durchmesser und B ein Punkt des Kegelschnitts, und zieht man MO durch die Mitten von AC und BC, so ist BC eine zu MO zugeordnete Sehne, wobei $MO \parallel AB$. Daraus folgt:

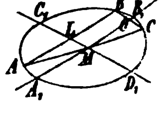


Fig. 89.

c) *Verbindet man einen Punkt auf einem Kegelschnitt mit den Grenzpunkten eines Durchmessers, so sind die zu diesen Verbindungsgeraden parallelen Durchmesser einander zugeordnet.*

Aus a folgt sofort als Umkehrung:

d) *Die Verbindungsgerade des Schnittpunktes zweier Tangenten mit dem Mittelpunkt der Berührungssehne enthält den zu letzterer zugeordneten Durchmesser.*

Da die Berührungssehne zugleich Polare des Schnittpunktes, so folgt:

e) *Die Polare eines Punktes hat die dem Durchmesser desselben zugeordnete Richtung.*

Für den inneren Punkt P (Fig. 90) und dessen äufsere Polare RS gilt dasselbe, da die letztere durch den unendlich fernen Punkt der dem Durchmesser APC zugeordneten Sehne BPD gehen mufs.

Die beiden in Bezug auf den Durchmesser AC harmonisch zu-

geordneten Punkte P und Q heifsen auch hier **zugeordnete Pole**, die Polaren RS und BD derselben **zugeordnete Polaren**.

In dem vollständigen Vierseit, von welchem ein Durchmesser AC und eine zugeordnete Sehne BD Nebenseiten sind, ist letztere die Berührungssehne des zugehörigen Poles Q. Wir werden im Folgenden die durch dasselbe Vierseit bestimmte Nebenseite RS die **ideelle Berührungssehne** zu P nennen. Hiernach läfst sich zu jedem Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts eine **reelle** oder eine **ideelle Berührungssehne** bestimmen.

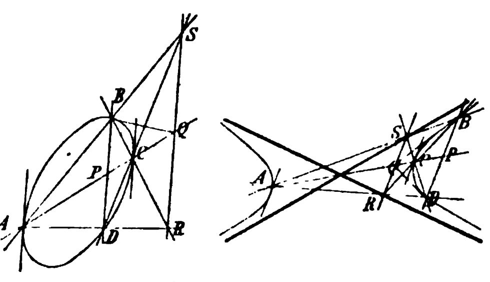


Fig. 90a. und 90b.

5. Für die Parabel und Hyperbel ergeben sich aus Vorangehendem noch besondere Eigenschaften in Bezug auf die unendlich ferne Tangente oder Sekante. So folgt für die Parabel aus §. 33, 4b, da ein Grenzpunkt des Durchmessers in unendliche Entfernung rückt, $QA = AP$, d. h.:

a) *Die Parabel halbiert die Strecke vom Schnittpunkt zweier Tangenten nach dem Mittelpunkt der Berührungssehne.*

Fig. 91.

Rückt in der Hyperbel der Punkt P auf dem Durchmesser AC in unendliche Entfernung, so fällt der zugeordnete Pol Q in den Mittelpunkt, und man erhält als ideelle Berührungssehne zu P, mittels der zu den Asymptoten parallelen Seiten des Parallelogramms $ASCR$, den zum Durchmesser AC **zugeordneten ideellen Durchmesser** SR.

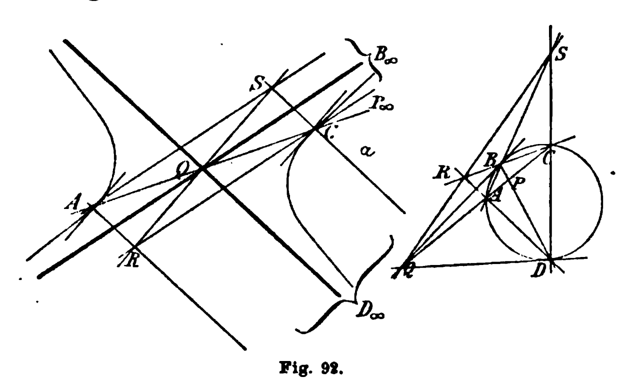


Fig. 92.

In dem Viereck $ASCR$ sind alsdann die Asymptoten QB_∞

und QD_∞ harmonisch zugeordnet in Bezug auf QC und QS. Daher folgt:

b) *In der Hyperbel bilden die Asymptoten mit irgend einem Paar einander zugeordneter Durchmesser harmonische Strahlen.*

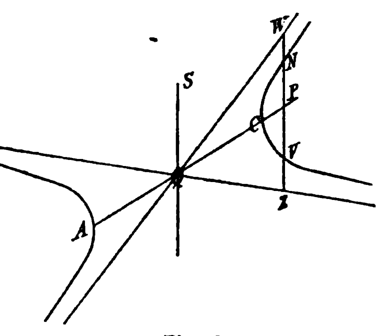


Fig. 93.

Hieran schliefst sich ein für die Construktion der Hyperbel brauchbarer Satz:

c) *Die Abschnitte einer Sekante oder Tangente zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten sind einander gleich.*

Denn die Sehne VN wird durch den zugeordneten Durchmesser QP halbiert, $NP = PV$, und ebenso der Abschnitt der Sekante zwischen den Asymptoten, $WP = PZ$, da der zu P harmonisch zugeordnete Punkt in unendliche Entfernung fällt, indem der zugeordnete Durchmesser $QS \parallel WZ$ ist. Daher ist $WP - NP = PZ - PV$ oder $WN = VZ$.

Eine ebenso einfache Beziehung, wie die eben abgeleitete, ergeben auch zwei Tangenten a und b und die Asymptoten cd. Diese

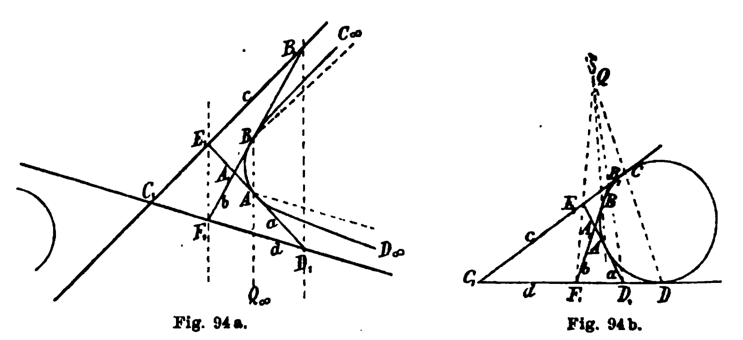


Fig. 94 a. Fig. 94 b.

vier Geraden bilden nämlich ein Tangentenvierseit $A_1 B_1 C_1 D_1$, wobei eine Seite des zugehörigen Sehnenvierecks $ABC_\infty D_\infty$ in unendlicher Entfernung liegt. Daher mufs (nach §. 34, 2') der Schnittpunkt der Nebenseiten $B_1 D_1$ und $E_1 F_1$ in den Schnittpunkt von AB und $C_\infty D_\infty$, d. i. in unendliche Entfernung fallen, m. a. W.:

d) *Die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte zweier Hyperbeltangenten mit den Asymptoten sind parallel der Berührungssehne.*

§. 38. Bestimmung der Kegelschnitte durch Punkte und Tangenten.

1. Die beiden zuletzt erhaltenen Sätze können dazu dienen, die Aufgabe zu lösen:

Wenn von einer Hyperbel die beiden Asymptoten und ein Punkt gegeben ist, weitere Punkte derselben zu konstruieren.

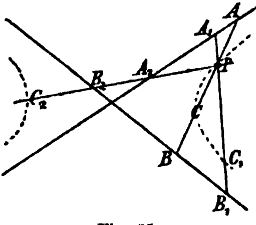


Fig. 95 a.

Wir ziehen durch den Punkt P beliebige Sekanten AB bis zu den Asymptoten und tragen jeweils den Abschnitt PA nach BC, so ist C ein Punkt der Hyperbel.

Wenn von einer Hyperbel die beiden Asymptoten und eine Tangente gegeben ist, weitere Tangenten derselben zu konstruieren.

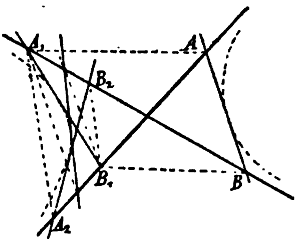


Fig. 95 b.

Wir ziehen durch die Schnittpunkte der Tangente und Asymptoten beliebige Paare von Parallelen. Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Parallelen mit den Asymptoten ist dann Tangente.

In der That können stets zwei Seiten eines Dreiecks a und b die Asymptoten, die dritte Seite c eine Tangente, bezw. deren Mittelpunkt C ein Punkt einer Hyperbel sein. Denn beschreibt man in einer durch c gelegten Ebene ein Quadrat über dieser Seite und den eingeschriebenen Kreis dieses Quadrats, so wird dieser Kreis als die betr. Hyperbel projiciert von einem Centrum S, welches auf der durch den Schnittpunkt von ab parallel zu den Quadratseiten gezogenen Strecke in dem Abstand $\frac{c}{2}$ liegt.

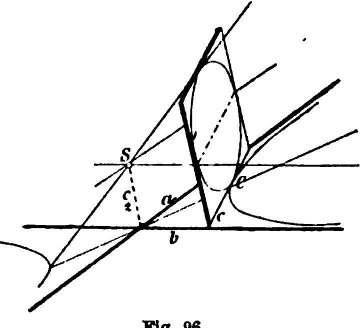


Fig. 96.

Ist statt der Tangente c der Punkt C gegeben, so kann immer eine Strecke zwischen a und b gefunden werden, die in C halbiert und somit Tangente ist.

2. Es können ferner die Ecke ABC eines Dreiecks als Punkte eines Kegelschnitts und je eine

2'. Es können ferner die Seiten abc eines Dreiseits als Tangenten eines Kegelschnitts und je ein

weitere Gerade durch zwei dieser Ecke als Tangenten desselben Kegelschnitts betrachtet werden.

weiterer Punkt auf zwei dieser Seiten als Punkte desselben Kegelschnitts betrachtet werden.

Denn projicieren wir die Figur so, dafs die beiden letztgenannten Punkte, bezw. jene beiden Ecke in unendliche Entfernung fallen, so läfst sich in dieses Bild nach dem Vorangehenden eine Hyperbel zeichnen, welcher die Projektionen der Punkte und Geraden angehören. Mit dieser Hyperbel ist alsdann in der Originalebene der verlangte Kegelschnitt perspektivisch.

Man erhält zu den gegebenen Elementen einen weiteren Punkt, indem man durch den Schnittpunkt E_1 beider Tangenten eine beliebige Gerade QE_1S zieht, welche

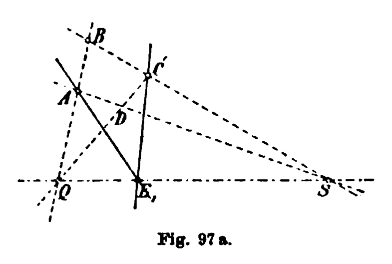
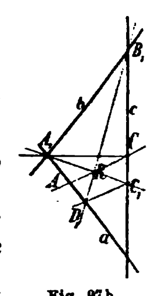


Fig. 97 a.

AB in Q, BC in S treffe; der Schnittpunkt D von AS und CQ ist dann ein Punkt des Kegelschnitts. Denn von dem durch die Sekanten AS und BS bestimmten Sehnenviereck mufs (§. 34, 2) die Verbindungsgerade des Nebenecks S mit einem zweiten Nebeneck auf einer Nebenseite des zugehörigen Tangentenvierseits, d. i. auf einer Geraden durch E_1 liegen; dieses zweite Nebeneck mufs der Schnittpunkt von SE_1 mit AB sein.

Man erhält zu den gegebenen Elementen eine weitere Tangente, indem man auf der Verbindungsgerade AC der beiden Berührungspunkte einen beliebigen Punkt R mit dem Schnittpunkt A_1 (ab) und B_1 (bc) verbindet; die Verbindungsgerade des Schnittpunktes C_1 (von c und A_1R) und D_1 (von a, B_1R) ist dann Tangente. Denn von dem durch die Punkte $A_1B_1C_1$ bestimmten Tangentenvierseit mufs der Schnittpunkt der Nebenseite A_1C_1 mit einer zweiten von B_1 ausgehenden Nebenseite in einem Nebeneck des zugehörigen Sehnenvierecks, also auf der Geraden AC liegen; diese zweite Nebenseite mufs durch den Schnittpunkt R von A_1C_1 und AC gehen.


Fig. 97 b.

Daraus ergiebt sich auch, dafs die gegebenen Elemente den Kegelschnitt eindeutig bestimmen.

Denn eine beliebige Sekante AS durch A kann nicht einen zweiten durch dieselben Elemente bestimmten Kegelschnitt in einem zweiten Punkt D_1 schneiden, da dieser

Denn von dem beliebig auf c angenommenen Punkt C_1 kann nicht eine zweite Tangente an einen zweiten Kegelschnitt gezogen werden, der durch dieselben

Punkt ebenfalls auf der Geraden CQ liegen müfste.

Elemente bestimmt wäre, da diese Tangente ebenfalls die Tangente a in dem durch $B_1 R$ bestimmten Punkt treffen müfste.

Es folgt somit:

Die drei Ecke eines Dreiecks und je eine weitere Gerade durch zwei dieser Ecke bestimmen als Punkte, bezw. Tangenten stets einen einzigen Kegelschnitt.

Die drei Seiten eines Dreiseits und je ein weiterer Punkt auf zwei dieser Seiten bestimmen als Tangenten, bezw. Punkte stets einen einzigen Kegelschnitt.

Die Tangente zu dem gegebenen Punkte, bezw. der Berührungspunkt zu der gegebenen Tangente kann je durch eine Ergänzung der Figur gemäfs Fig. 98 erhalten werden.

3. Es sei ein vollständiges Viereck $ABCD$ gegeben und durch ein Eck A desselben eine weitere Gerade AE_1, welche die Verbindungsgerade der Nebenecke SQ in E_1 treffe. Man ziehe E_1C. Nun läfst sich stets ein Kegelschnitt zeichnen, welcher durch ABC geht und welchen die Geraden AE_1 und CE_1 berühren. Nehmen wir in diesem Kegelschnitt AB, BC und CQ als drei Seitengerade eines Sehnenvierecks an, so dafs Q ein Nebeneck desselben

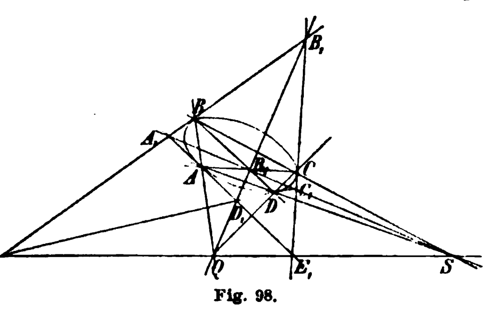


Fig. 98.

ist, so ist E_1 ein Eck des zugehörigen Tangentenvierseits. Nun mufs QE_1 eine Nebenseite des letzteren sein (§. 34, 2') und auf ihr ein zweites Nebeneck in S liegen; d. h. die vierte Seite des Sehnenvierecks ist AS; der Schnittpunkt D von CQ und AS gehört somit als Eck dieses Sehnenvierecks dem fraglichen Kegelschnitt an. Es läfst sich also stets ein Kegelschnitt bestimmen, der durch $ABCD$ geht und AE_1 berührt.

Umgekehrt mufs nun auch in irgend einem so bestimmten Kegelschnitt die zu C gehörige Tangente durch den Schnittpunkt E_1 der Tangente A_1A mit QS gehen, d. h. es mufs diese Tangente E_1C sein, woraus (nach 2) folgt, dafs durch jene Elemente nur ein Kegelschnitt möglich ist.

Das Gleiche gilt für ein Vierseit und einen Punkt auf einer Seite desselben.

Die vier Ecke eines vollständigen Vierecks und eine weitere Gerade durch ein Eck desselben bestimmen

Die vier Seiten eines vollständigen Vierseits und ein weiterer Punkt auf einer Seite desselben bestimmen

als Punkte und Tangente stets einen einzigen Kegelschnitt.

als Tangenten und Punkt stets einen einzigen Kegelschnitt.

4. Die für alle Kegelschnitte geltenden Sätze von Pascal und Brianchon können dazu dienen, die Aufgaben zu lösen:

Es ist zu fünf Punkten eines Kegelschnitts ein sechster Punkt zu finden.

Die fünf gegebenen Punkte seien *1 2 3 4 5* und der gesuchte Punkt sei der Schnittpunkt der beliebig durch *1* gezogenen Geraden *1R*

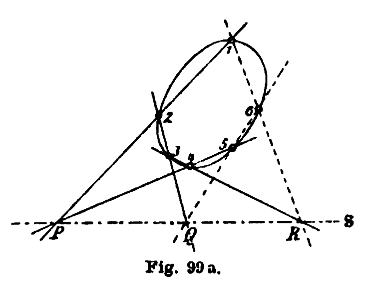


Fig. 99 a.

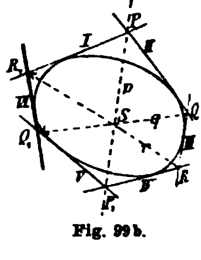
mit dem Kegelschnitte. Diese treffe *3 4* im Punkte *R*; der Schnittpunkt von *1 2* und *4 5* sei *P*, und *PR* (oder *s*) werde von *2 3* in *Q* getroffen; alsdann mufs nach Pascal der sechste Punkt auch auf *Q5* liegen, also der Schnittpunkt von *1R* und *Q5* sein.

Indem man die Gerade *s* sich um *P* drehen läfst, gleiten die Schnittpunkte *Q* und *R* auf *2 3* und *3 4* hin und man erhält durch die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit *5* und *1* beliebig viele Punkte der Curve.

5. Rücken zwei Punkte des Sehnensechsecks einander unbeschränkt nahe, so wird die betr. Seite eine Tangente, wobei nun der Pascal'sche Satz auch für diese Seite gilt.

Es ist zu fünf Tangenten eines Kegelschnitts eine sechste Tangente zu finden.

Die fünf gegebenen Tangenten seien *I II III IV V* und die gesuchte Tangente schneide die Tangente *I* in dem beliebigen Punkt R_1; man verbinde denselben mit dem Schnittpunkt *III IV* durch eine Gerade *r*. Die Verbindungsgerade *p* der Schnittpunkte *I II* und *IV V* schneide diese


Fig. 99 b.

Gerade *r* in einem Punkt *S*; alsdann mufs nach Brianchon die sechste Tangente mit der fünften in einem Punkt Q_1 der Verbindungsgeraden *q* von *S* und *II III* zusammentreffen.

Indem man den Punkt *S* auf *p* hingleiten läfst, drehen sich *q* und *r* um *Q* und *R* und man erhält durch den Schnittpunkt dieser Geraden mit *V* und *I* beliebig viele Tangenten des Kegelschnitts.

5'. Rücken die Berührungspunkte zweier Tangenten einander unbeschränkt nahe, so kommt ihr Schnittpunkt selbst diesen Punkten unbeschränkt nahe, ohne dafs der Satz von Brianchon seine Geltung verliert.

Hiernach lassen sich nun die Aufgaben lösen:

Zu fünf Punkten eines Kegelschnitts sind die Tangenten zu konstruieren.

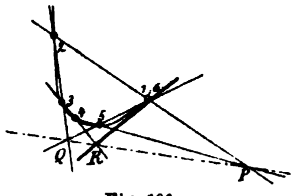


Fig. 100 a.

Wir numerieren die fünf Punkte so, dafs der Punkt, in welchem die Tangente gezogen werden soll, die Nummer *1* und *6* erhält, konstruieren die Pascal'sche Gerade PQ, auf welcher durch 3 4 ein Punkt R der Tangente erhalten wird.

Zu fünf Tangenten eines Kegelschnitts sind die Berührungspunkte zu konstruieren.

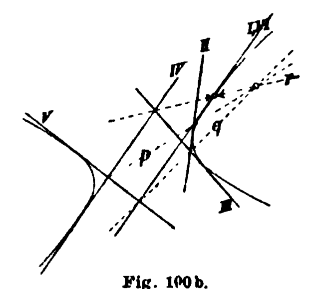


Fig. 100 b.

Wir numerieren die fünf Tangenten so, dafs die Tangente, deren Berührungspunkt gefunden werden soll, die Nummer *I* und *VI* erhält, konstruieren den Brianchon-schen Punkt pq, durch welchen mit *III IV* die Gerade r nach dem Berührungspunkt erhalten wird.

6. Sind fünf Punkte *1 2 3 4 5* gegeben, so läfst sich in der angegebenen Weise (Fig. 100a) durch den Punkt *1* eine Gerade $1R$ konstruieren. Durch die Punkte *1 2 3 4* und zu der Geraden $1R$ als Tangente ist aber nach 3 stets ein Kegelschnitt möglich. Ein weiterer Punkt X dieses Kegelschnitts auf der Geraden *4 5* mufs nun so liegen, dafs der Schnittpunkt P von *1 2* und $4X$, der Schnittpunkt R von *3 4* und $1R$ und der Schnittpunkt von *2 3* und $X6$ auf der Geraden PR liegen, d. h. X mufs auch auf $Q6$ liegen und sonach mit *5* zusammenfallen; der Kegelschnitt durch die fünf Punkte ist also möglich. — Es ist aber auch nur einer möglich; denn gäbe es zwei Kegelschnitte durch die fünf Punkte *1 2 3 4 5* (Fig. 99a), so müfste es auf der beliebig durch *1* gezogenen Geraden $1R$ aufser dem schon gemäfs 4 konstruierten Punkt *6* noch einen zweiten Schnittpunkt X geben der Art, dafs *1 2* und *4 5* sich in P, $1X$ und *3 4* in R und *2 3* mit $5X$ in Q scheiden müfste, d. h. X müfste eben auch auf $Q5$ liegen und mit dem schon konstruierten Punkt *6* zusammenfallen.

Ebenso bestimmen 5 Gerade als Tangenten einen Kegelschnitt.

Durch 5 Punkte, von welchen keine 3 auf einer Geraden liegen, ist ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt.

Durch 5 Gerade, von welchen keine 3 durch einen Punkt gehen, ist ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt.

Jeder Punkt, welcher mit jenen ein Pascal'sches Sechseck bildet, gehört dem Kegelschnitt an.

Jede Gerade, welche mit jenen ein Brianchon'sches Sechsseit bildet, gehört dem Kegelschnitt als Tangente an.

Auch die in 2 und 3 behandelten Fälle können den zuletzt betrachteten untergeordnet werden, indem man gemäfs 5 wiederholt je zwei Punkte bezw. je zwei Tangenten in eine zusammenfallen läfst.

§. 39. Kegelschnitte als Erzeugnisse projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel.

1. Im II. Teil §. 21, 7 haben wir gesehen, wie durch einen Kreis projektivische Punktreihen und Strahlenbüschel bestimmt sind. Da diese Gebilde auch in der Projektion projektivisch bleiben, so folgt:

a) *Die Schnittpunkte der Tangenten eines Kegelschnitts mit zwei bestimmten Tangenten bilden auf diesen als Trägern zwei projektivische Punktreihen. Dem gemeinsamen Punkte beider Träger entsprechen deren Berührungspunkte.*

a') *Die Verbindungsgeraden der Punkte eines Kegelschnitts mit zwei bestimmten Punkten desselben bilden in diesen als Scheiteln zwei projektivische Strahlenbüschel. Dem gemeinsamen Strahl beider Scheitel entsprechen deren Tangenten.*

Nehmen wir umgekehrt von den 5 Geraden I, II, III, IV, V (Fig. 101a) die Geraden I und V als Träger zweier Punktreihen, welche durch die

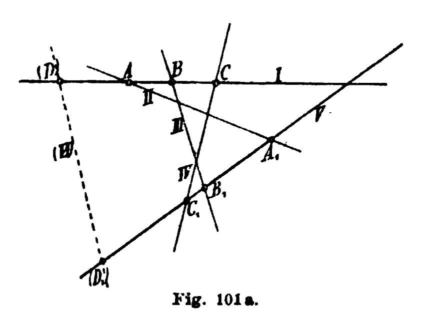
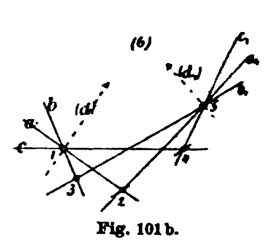


Fig. 101a.


Fig. 101b.

3 Paare entsprechender Punkte AA_1, BB_1, CC_1 (in welchen I und V von den 3 Geraden II, III, IV geschnitten werden) eindeutig bestimmt sind (II. Teil §. 21, 3b oder III. Teil §. 42, 2), so wird jedes weitere Punktpaar auf einer Geraden liegen, das mit den 5 gegebenen Geraden ein Brianchon'sches Sechsseit bildet (II. Teil, §. 21, 6a). Alle solche Geraden sind somit (§. 38, 6') Tangenten des durch die 5 Geraden bestimmten Kegelschnitts. Daraus folgt die Umkehrung zu a, welcher wir die sich ebenso ergebende zu a' (Fig. 101b) zufügen:

b) *Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektivischen Punktreihen einer Ebene bilden die Tangenten eines Kegelschnitts.*

b') *Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel einer Ebene bilden die Punkte eines Kegelschnitts.*

Zusatz. In besonderen Fällen gehen diese Gebilde wie auch die Kegelschnitte über in zwei Gerade, eine Gerade, eine Strecke, die Gegenstrahlen der Grenzpunkte einer Strecke oder einen Punkt.

2. Die verschiedenen Arten der Kegelschnitte ergeben sich nun aus projektivischen Punktreihen folgendermafsen. Nehmen wir zunächst an, der dem unendlich fernen Punkte der einen Reihe entsprechende Punkt liege ebenfalls in unendlicher Entfernung, so wird die durch sie bestimmte Tangente in unendlicher Entfernung liegen; der Kegelschnitt ist eine Parabel. Zwei solche projektivische Punktreihen aber, in welchen die unendlich fernen Punkte einander entsprechen, besitzen, in perspektivische Lage gebracht, einen gemeinsamen ihnen parallelen Strahl; d. h. die Träger müssen in dieser Lage parallel, die Punktreihen ᵱ. ă. sein. Wir erhalten somit die Tangenten einer Parabel, wenn wir z. B. auf einer Geraden Punkte in gleichen Abständen auftragen, ebenso auf einer zweiten Geraden, und wenn wir dann diese Punkte der Reihe nach verbinden.

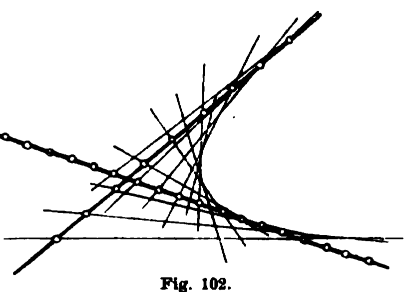


Fig. 102.

a) *Zwei ähnliche Punktreihen erzeugen durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte eine Parabel.*

Bei einer Ellipse oder Hyperbel können stets zwei parallele Tangenten $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ als Träger der Punktreihen angenommen werden. Eine

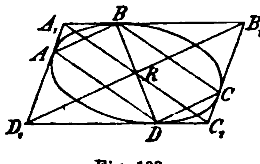


Fig. 103a.

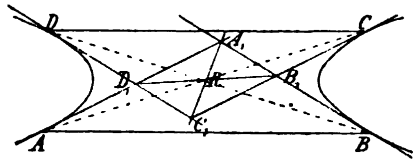


Fig. 103b.

Tangente in einem beliebigen Punkt A ergiebt die projektivischen Punkte A_1 und D_1 und die zu ihr parallele Tangente in C ein zweites solches Paar B_1, C_1. Das Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ mufs alsdann den Kegelschnitt entweder ganz ein- oder ganz ausschliefsen, und zwar wird (nach §. 34, 1 und §. 37, 2a) der Schnittpunkt der Diagonalen R Mittelpunkt des Kegelschnitts sein. Der erste Fall, da der Kegelschnitt keinen unendlich fernen Punkt hat, tritt ein, wenn die Berührungspunkte B und D einerseits

von $A_1 D_1$ liegen (§. 36, 4), der letztere Fall dagegen, wenn B und D auf den Gegenseiten von $A_1 D_1$ liegen. Rückt der Berührungspunkt A gegen D, so rückt D_1 gegen D und A_1 in der Richtung BA_1 in unendliche Entferunung; D ist Fluchtpunkt zu $A_1 B_1$, B zu $C_1 D_1$. Im ersten Fall sind die Punktreihen gegengerichtet (nach II. Teil, §. 21, a), im letzteren gleichgerichtet. Die Berührungssehne zu R mufs in letzterem Fall in unendliche Entfernung fallen.

b) *Zwei parallele projektivische (nicht perspektivische) Punktreihen erzeugen durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte eine Ellipse, wenn sie gegengerichtet, dagegen eine Hyperbel, wenn sie gleichgerichtet sind.*

Nehmen wir nun $D_1 A_1$ und $D_1 C_1$ als die Träger der Punktreihen, so sind A_1 und C_1 die Fluchtpunkte, dagegen A und D die zu dem Schnittpunkt D_1 projektivischen Punkte. Im Falle der Ellipse liegt D auf der Strecke $D_1 C_1$, in dem der Hyperbel aufserhalb derselben.

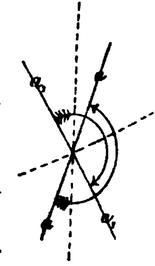
c) *Wenn in zwei projektivischen (nicht perspektivischen) Punktreihen der dem Schnittpunkt entsprechende Berührungspunkt jeweils auf der Strecke zwischen Schnittpunkt und Fluchtpunkt liegt, so ist der erzeugte Kegelschnitt eine Ellipse; liegt der Berührungspunkt aufserhalb dieser Strecke, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.*

Eine Drehung der Punktreihe um den Punkt D_1 bewirkt somit keine Änderung in der Art des Kegelschnitts.

3. Zwei projektivische, nicht perspektivische Strahlenbüschel können entweder 0, 1 oder 2 Paare paralleler projektivischer Strahlen haben, nicht mehr. Denn hätten sie 3 solche Paare, so würden in irgend einer Projektion derselben 3 Paare entsprechender Geraden einander auf einer Geraden, der Projektion der unendlich fernen Geraden, schneiden; die Strahlenbüschel wären in diesem Bild (II. T. §. 21, 3) und somit im Original perspektivisch. Da parallele Strahlen einem unendlich fernen Punkt entsprechen, so folgt:

Zwei projektivische Strahlenbüschel bestimmen durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wenn sie bezüglich kein, ein oder zwei Paar paralleler projektivischer Strahlen haben.

Die Verschiebung der Scheitel ändert die Richtung der Strahlen nicht; somit bewirkt eine Verschiebung auch keine Änderung in der Art des Kegelschnitts. Verschiebt man sie an einen einzigen Scheitel, so werden parallele Strahlen zu Doppelstrahlen; auf einer Geraden bilden dann die Büschel konjektivische Punktreihen. Nach der Zahl der Doppelpunkte dieser Reihen kann daher die Art des Kegelschnitts bestimmt werden (vgl. II. T. §. 21, 8 und 9, Aufgaben §. 11, 29).


Fig. 104.

In gegenwendigen Strahlenbüscheln müssen immer zwei Paare entsprechender Strahlen parallel sein. Ver-

legt man nämlich ihre Scheitel an einen Punkt, so müssen bei einer halben Umdrehung (durch welche alle Lagen der Strahlen beschrieben werden, vgl. I. Teil, §. 3, 4) zweimal entsprechende Strahlen einander decken, einmal im spitzen und einmal im stumpfen Winkel zweier entsprechenden Strahlen. Der erzeugte Kegelschnitt mufs also eine Hyperbel sein, und zwar entspricht dies dem Fall, da die Scheitel beider Büschel auf zwei getrennten Hyperbelästen liegen.

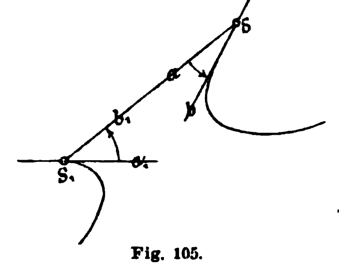


Fig. 105.

Liegen die Scheitel auf einerlei Ast des Kegelschnitts, so müssen die Strahlenbüschel wie beimKreis gleichwendig sein. Es seien S und S_1 die Scheitel, b und a_1 die dem Scheitelstrahl (ab_1) entsprechenden Tangenten, die sich in P schneiden; ferner sei Q die Mitte von SS_1. Alsdann ist PQ die Richtung eines Durchmessers, dessen Grenzpunkt auf die Strecke PQ fällt, während der Mittelpunkt des Kegelschnitts bei der Ellipse auf die P gegenüberliegende Seite von SS_1, bei der Hyperbel auf einerlei Seite mit P und bei der Parabel. in unendliche Entfernung fallen mufs. Ist nun q der durch $S \parallel QP$ gezogene Strahl, q_1 der ihm entsprechende Strahl durch S_1, so liegt für eine Ellipse auch der Schnittpunkt Q_1 von qq_1 auf der P gegenüberliegenden Seite von SS_1, für eine Hyperbel auf einerlei Seite mit P, während bei der Parabel q und q_1 als Durchmesser parallel laufen.

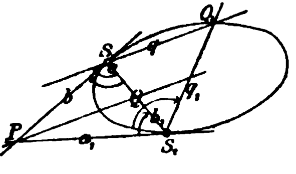


Fig. 106.

§. 40. Perspektivische Lage zweier Kegelschnitte.

1. In §. 38 wurde die Zahl der Punkte und Tangenten angegeben, durch welche ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist. Wenn in solcher Zahl die Elemente zwei Kegelschnitten paarweise 𝔭. sind, so sind es die Kegelschnitte selbst. Denn projiciert man den ersten Kegelschnitt mit den gegebenen Elementen, so erhält man einen mit ihm 𝔭. Kegelschnitt, welchem die Projektionen der Elemente angehören und welcher somit identisch ist mit dem durch letztere eindeutig bestimmten Kegelschnitt.

Zwei Kegelschnitte sind 𝔭., *wenn es sind:*

a) *5 Punkte desselben.*	a') *5 Tangenten desselben.*
b) *4 Punkte und die Tangente in einem derselben.*	b') *4 Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben.*
c) *3 Punkte und die Tangenten in zweien derselben.*	c') *3 Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben.*

2. Diese Sätze geben uns ein Mittel, zu bestimmen, in welchem Fall die Projektion eines Kegelschnitts ein Kreis ist, bezw. der Kegelschnitt selbst als die Projektion eines Kreises erscheint. Zunächst ergiebt sich zur Beurteilung, wann ein Kegelschnitt Kreis zu nennen ist, der Satz:

Ein Kegelschnitt, in welchem 2 zugeordnete Durchmesser einander gleich und normal zu einander sind, ist ein Kreis.

Denn durch diese Durchmesser sind nicht blos 4 Punkte des Kegelschnitts, sondern auch die Tangenten desselben gegeben, da sie parallel diesen Durchmessern sein müssen; der Kegelschnitt ist also dadurch eindeutig bestimmt. Einem Kreis um einen der Durchmesser gehören aber alle diese Elemente an; daher ist der betr. Kegelschnitt ein Kreis.

3. Es kann nun ein Kegelschnitt stets als Kreis projiciert werden oder als Projektion eines Kreises aufgefafst werden unter Bedingungen, welche den in §. 33, 2 gegebenen Bedingungen für die Projektion eines Kreises als Kreis entsprechen.

Ist P ein Punkt im Innern des Kegelschnitts, AB dessen Durchmesser, CD dessen zugeordnete Sehne und RL dessen ideelle Berührungssehne (vgl. §, 37, 4), und errichtet man in deren Mitte M die Normale $SM = MR$, so ist die Projektion des Kegelschnitts von S als Centrum auf eine zu SRL parallele Ebene ein Kreis. Denn P_1 ist der Mittelpunkt der Projektion als Projektion des Pols der Fluchtgeraden RL; A_1B_1 und C_1D_1 sind zugeordnete Durchmesser, da sowohl CD und C_1D_1, als die

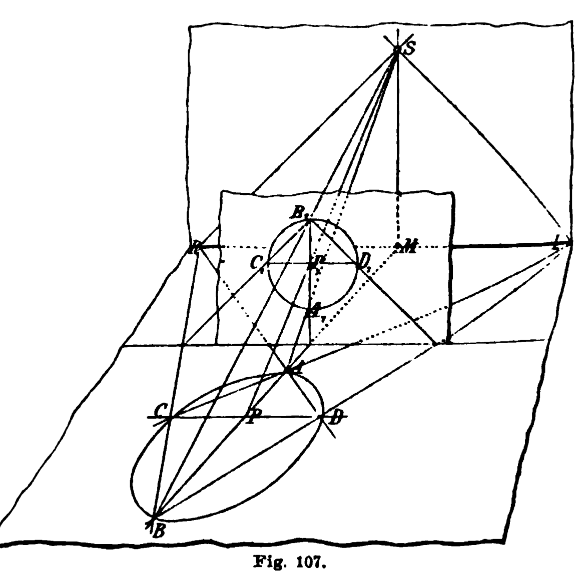


Fig. 107.

Tangenten in A, B, A_1, B_1 parallel zu der mit RL parallelen Axe sind. Ferner ist $B_1P_1 \parallel SM$ und $B_1C_1 \parallel RS$ als Schnittgeraden der projicierenden Ebenen mit 2 parallelen Ebenen. Also ist $B_1C_1P_1$ ꝑ. ā. SRM, woraus folgt: $B_1P_1 \perp P_1C_1$ und $B_1P_1 = P_1C_1$, da das Gleiche

für die entsprechenden Geraden des Dreiecks SRM gilt. Es sind somit für die Projektion die in 2 gegebenen Bedingungen erfüllt.

Wir haben hierbei P beliebig im Innern des Kegelschnitts angenommen. Wir hätten ebensowohl von der aufserhalb liegenden Geraden RL ausgehen, ihren Pol P und dessen ideelle Berührungssehne RL bestimmen können.

Es folgt hieraus, entsprechend §. 33, 2a u. b:

Ein Kegelschnitt kann stets als Kreis projiciert werden, während zugleich eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) *Ein beliebiger Punkt im Innern des Kegelschnitts wird als Kreismittelpunkt projiciert und seine Polare als unendlich ferne Gerade. Der Durchmesser des Punktes und seine zugeordnete Sehne werden als zwei zu einander normale Durchmesser abgebildet.*

b) *Eine beliebige Gerade aufserhalb des Kegelschnitts wird als unendlich ferne Gerade projiciert und ihr Pol als Kreismittelpunkt. Die der Geraden zugeordnete Polare und der zugeordnete Durchmesser werden als zwei zu einander normale Durchmesser abgebildet.*

Die Bedingung dafür ist die, 1) dafs das Centrum der Projektion auf der Mittelnormalebene der ideellen Berührungssehne des inneren Pols liegt in einem Abstand von dieser Berührungssehne, welche gleich ihrer Hälfte ist, und 2) dafs die Bildebene der durch das Centrum und diese Berührungssehne gelegten Ebene parallel ist.

4. Wenn in einer Ebene zwei Kegelschnitte so liegen, dafs einem und demselben Punkt im Innern der beiden Kegelschnitte dieselbe ideelle Berührungssehne zugehört, so können diese Kegelschnitte als Projektionen zweier koncentrischen Kreise aufgefafst werden der Art, dafs der genannte Punkt Projektion des Kreismittelpunktes und seine Polare Fluchtgerade für die unendlich fernen Punkte der Ebene beider Kreise ist. Zwei konzentrische Kreise sind aber 𝔭. ä. in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Centrum, woraus dann folgt, dafs beide Kegelschnitte 𝔭. sind in Bezug auf jenen Punkt als Centrum und seine Polare als Axe.

Wenn dagegen die beiden Kegelschnitte zu einem bestimmten aufserhalb liegenden Punkt eine gemeinsame Berührungssehne haben und beide Kegelschnitte innerhalb oder beide aufserhalb des bezüglichen Tangentenwinkels liegen, so sind sie ebenfalls 𝔭. zu jenem Punkt als Centrum und der Berührungssehne als Axe. Denn die Tangenten von jenem Punkt an die Kegelschnitte sind diesen gemeinsam, ebenso ihre Berührungspunkte; es liegen somit 2 Tangenten und deren Berührungspunkte 𝔭. Durch den Schnittpunkt der Tangenten läfst sich eine Sekante ziehen, welche die beiden Kegelschnitte schneidet, sobald sie und die Kegelschnitte einerseits der gemeinsamen Tangente liegen. Diese Schnittpunkte geben das fünfte 𝔭. liegende Paar von Elementen; die Kegelschnitte sind 𝔭. nach 1c.

Zwei Kegelschnitte einer Ebene, welche zu ein und demselben Punkt eine gemeinsame ideelle bezw. reelle Berührungssehne haben, wobei letztere aufserhalb bezw. innerhalb beider Kegelschnitte liegt, sind p. *in Bezug auf den Punkt als Centrum und seine Polare als Axe.*

5. Wenn man in 2 Kegelschnitten, welche eine gemeinsame Berührungssehne zu einem Punkt haben, ein Dreieck ABC so bewegt, dafs seine Ecken auf dem einen Kegelschnitt liegen, eine Seite AB den anderen Kegelschnitt berührt und eine zweite Seite AC stets durch einen bestimmten Punkt P der genannten Geraden geht, so

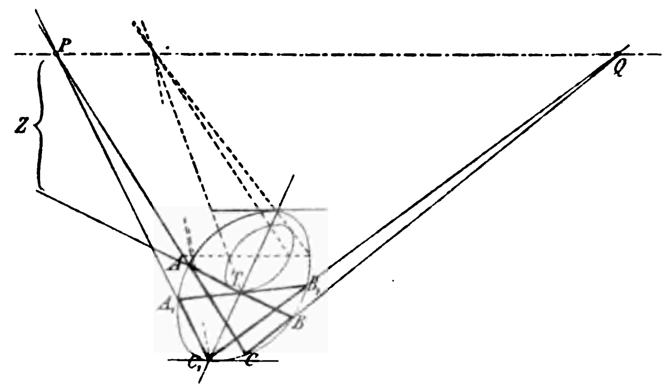


Fig. 108 a.

bleibt im ersten Fall, da die Berührungssehne ideell ist, in der Projektion der Figur (Fig. 108b), in welcher die Kegelschnitte als konzentrische Kreise erscheinen und P in unendliche Entfernung fällt, die Seite AC in allen Lagen parallel, $A_1C_1 \parallel AC$, während die Tangente AB bei unveränderter Entfernung vom Kreismittelpunkt ihre Gröfse beibehält, $A_1B_1 = AB$. Daraus folgt nun, dafs $\sphericalangle ACB = A_1C_1B_1$ und $B_1C_1 \parallel BC$. Im Original müssen daher auch die Seiten BC und B_1C_1 stets durch einen und denselben Punkt Q der Polare gehen.

Fig. 108 b.

Im zweiten Fall, da die Kegelschnitte eine reelle gemeinsame Berührungssehne XY zu einem äufseren Punkt O haben (Fig. 109a), bilden die Tangenten AB, OY, A_1B_1, OX ein Tangentenvierseit $X_1Y_1Y_2X_2$, in welchem der Schnittpunkt L der Nebenseiten X_1Y_2 und Y_1X_2 auf der Berührungssehne YY liegen mufs (§. 34, 2′). Liegt L aufserhalb des Kegelschnitts um ABC, so projicieren wir diesen als Kreis der Art, dafs die Gerade LO in unendliche Entfernung fällt. Die Figur (Fig. 109b) wird alsdann axig zur Mittelnormale von XY, woraus folgt, dafs auch $AB_1 \parallel A_1B \parallel XY$

(vgl. I. Teil, Aufg. §. 10, 17); im Original schneiden einander also AB_1 und A_1B ebenfalls in L. Für das Pascal'sche Sechseck $ACBA_1C_1B_1$ sind dann P und L die Schnittpunkte der Gegenseiten AC, A_1C und

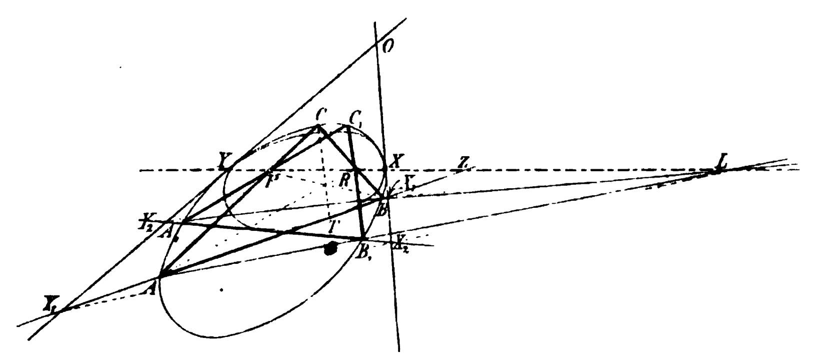


Fig. 109 a.

BA_1, B_1A; daher mufs auch der Schnittpunkt R von CB und C_1B_1 auf PL liegen. — Liegt L innerhalb des Kegelschnitts, so projiciert man diesen als Kreis, so dafs die Projektion von L Mittelpunkt wird und es folgt dann dieselbe Sache aus einer centrischen Figur (vgl. I. Teil, Aufg. §. 10, 15).

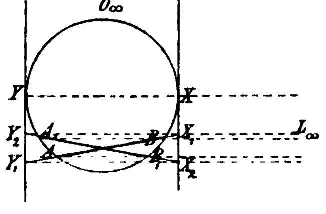


Fig. 109 b.

a) *Wenn in einem Kegelschnitt ein Dreieck so bewegt wird, dafs seine Ecken stets auf dem Kegelschnitt bleiben, eine Seite desselben stets einen zweiten Kegelschnitt berührt, welcher mit ersterem zu einem Punkt eine (reelle oder ideelle) Berührungssehne gemeinsam hat, während eine zweite Seite des Dreiecks stets durch einen bestimmten Punkt dieser Geraden geht, so dreht sich auch die dritte Seite um einen bestimmten Punkt derselben.*

b) *Auf der tangierenden Seitenstrecke des Dreiecks sind der Berührungspunkt und der Schnittpunkt der Geraden harmonisch zugeordnete Punkte.*

Das letztere folgt leicht im Fall der ideellen Sehne aus der angegebenen Kreisprojektion, im Fall der reellen Sehne aus einer Projektion, in welcher XY in unendliche Entfernung fällt, so dafs beide Kegelschnitte zu Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten werden, wo dann $AY_1 = BX_1$ und $Y_1T = TX_1$, somit $AT = TB$ wird, während der auf XY liegende Punkt Z in unendliche Entfernung fällt.

Man erhält daher T, indem man AR und PB zieht und deren Schnittpunkt mit C verbindet; diese Verbindungsgerade trifft AB in T.

§. 41. Axen, Brennpunkte und Leitgeraden der Kegelschnitte.

1. Beschreiben wir um den Punkt M einer Ellipse oder Hyperbel einen Kreis, welcher diese in zwei Punkten A und B schneidet, so mufs derselbe auch durch die diametralen Punkte A_1 und B_1 gehen, da der Kreis und der Kegelschnitt centrische Figuren sind. Nun bestimmen BA_1 und AB die Richtungen zweier zugeordneten Durchmesser SS_1 und VV_1 (§. 37, 4 c), wobei $AB \perp BA_1$.

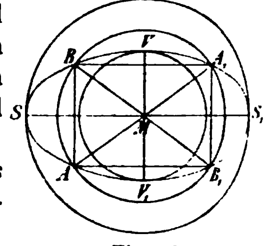


Fig. 110.

a) *In der Ellipse und Hyperbel giebt es zwei zu einander normale zugeordnete Durchmesser.*

Dieselben heifsen Axen des Kegelschnitts.

b) *In der Hyperbel halbieren die Axen die Winkel der Asymptoten,* da die zugeordneten Durchmesser und die Asymptoten vier harmonische Strahlen bilden (§. 37, 5 b und §. 32, 4 b'). Von beiden Axen trifft jedoch nur eine die Hyperbel; sie heifst reelle Axe.

Beschreibt man um eine (reelle) Axe als Durchmesser einen Kreis, so hat derselbe mit dem Kegelschnitt in den Grenzpunkten der Axe auch die Tangenten gemeinsam; dieser Kreis kann somit den Kegelschnitt in keinem weiteren Punkt treffen, da er andernfalls mit ihm ganz zusammenfallen müfste (§. 38, 2). Der Kreis mufs somit den Kegelschnitt ganz ein- oder ganz ausschliefsen; jeder andere Durchmesser mufs daher im ersten Fall kleiner, im zweiten gröfser als die betreffende Axe sein. Bei der Ellipse unterscheiden wir hiernach die kleine und grofse Axe, als kleinsten und gröfsten Durchmesser; bei der Hyperbel ist die reelle Axe der kleinste Durchmesser.

Zugleich folgt hieraus, dafs ein Kegelschnitt, mit Ausnahme des Kreises, nur ein Paar Axen haben kann.

Ziehen wir in einer Parabel eine Sehne s normal zu einem Durchmesser a_1, so heifst der ihr zugeordnete Durchmesser a die Axe der Parabel. Da in ihr alle Durchmesser parallel sind, so hat sie auch nur eine Axe.

Die Grenzpunkte der grofsen Axe einer Ellipse, die der reellen Axe einer Hyperbel und den Grenzpunkt der Axe einer Parabel nennt man die Scheitel dieser Kegelschnitte.

Fig. 111.

2. Ein um die grofse Axe der Ellipse oder die reelle Axe einer Hyperbel als Durchmesser beschriebener Kreis hat mit dieser eine reelle Berührungssehne gemeinsam. Bewegt man daher (§. 40, 5) ein Sehnendreieck ABC dieses Kreises so, dafs eine Seite AB den Kegelschnitt berührt, eine zweite AC durch den

Mittelpunkt O des Kegelschnitts geht, so geht auch die andere BC stets durch einen bestimmten Punkt F der Axe. Dieser Punkt heifst

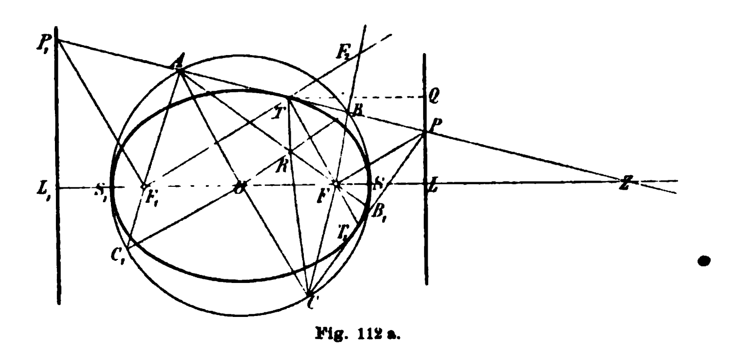


Fig. 112 a.

Brennpunkt des Kegelschnitts. Läfst man die Seite BC_1 durch den Mittelpunkt gehen, so ergiebt AC_1 einen zweiten Brennpunkt F_1. Da $AC_1 \parallel BC$ als Normale zu AB und da $AO = OC$, so ist auch $F_1O = OF$.

a) *Beide Brennpunkte eines Kegelschnitts haben den gleichen Abstand vom Mittelpunkt.*

Dieser Abstand heifst die lineare Excentricität.

Den Berührungspunkt T auf AB findet man nach §. 40, 5 b, indem man AF und OB zieht und deren Schnittpunkt R mit C verbindet; CR trifft AB in dem Berührungspunkt T. Von dem Vierseit $BTRF$ ist AC eine Nebenseite, welche durch die Nebenseite BR in O halbiert wird; daher mufs die dritte Nebenseite $TF \parallel AC$ sein. In gleicher Weise kann der Berührungspunkt T aus dem Dreieck ABC_1 mit den Punkten F_1 und O erhalten werden, woraus dann folgt, dafs $TF_1 \parallel BC_1$. Nun ist $\sphericalangle FTB = OAB$ und $\sphericalangle F_1TA = OBA$ und da $\sphericalangle OAB = OBA$, so ist auch $FTB = ATF_1$.

Die Verbindungsstrecken eines Punktes des Kegelschnitts mit den Brennpunkten nennt man die Fahrstrahlen des Punktes. Daher gilt der Satz:

b) *Die Fahrstrahlen eines Punktes auf einem Kegelschnitt bilden mit dessen Tangente gleiche Winkel.*

Schneiden einander FB und F_1T in F_2, so ist somit $F_2 \wedge F$ in Bezug auf AB als Axe und $TF_2 = TF$; ferner ist nach obigem $F_2F_1C_1B$ ein Parallelogramm, in welchem $F_1F_2 = BC_1$, d. i. gleich der Axe des Kegelschnitts ist. In der Ellipse ist F_1T und TF_2 gleichgerichtet, in der Hyperbel sind beide Strecken gegengerichtet. Da nun $F_1T + TF_2 = F_1F_2 = BC_1$, so folgt für erstere $F_1T + TF = BC_1$, für letztere $F_1T - TF = BC_1$.

c) *In der Ellipse ist die Summe der Fahrstrahlen, in der Hyperbel*

deren Differenz für jeden Punkt konstant, nämlich gleich der grofsen, bezw. reellen Axe.

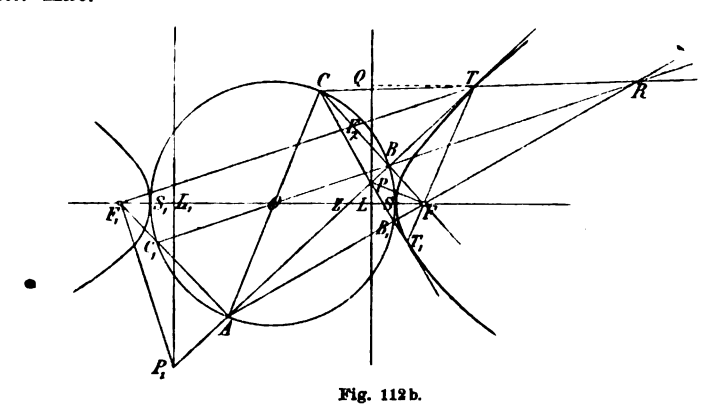


Fig. 112b.

Trifft die Gerade TF den Kegelschnitt in dem Punkte T_1, so wird von dem zur Tangente dieses Punktes gehörenden Sehnendreieck die durch O gehende Seite $\| FT_1$ sein müssen, d. h. AC wird diese Seite sein; das dritte Eck des betr. Dreiecks ist daher der Schnittpunkt B_1 von AF und dem Kreis. Die beiden Tangenten zu TT_1 mögen einander im Punkt P schneiden, dem Pol zu TT_1. Da dann im $\triangle APC$ die Höhen BC und AB_1 einander in F schneiden, so mufs $PF \perp AC$ oder $PF \perp TT_1$ sein, d. h.:

d) *Der Pol eines Fahrstrahls liegt auf der in seinem Brennpunkt errichteten Normalen.*

3. Die Parabel kann als eine Ellipse aufgefasst werden, in welcher der eine Grenzpunkt der grofsen Axe in unbeschränkt grofse Entfernung hinausgerückt ist und mit diesem Punkt auch der Mittelpunkt O und der eine Brennpunkt F_1 auf derselben Geraden. Der im Scheitel berührende Teil des um die grofse Axe beschriebenen Kreises geht dabei in eine im Scheitel berührende Gerade über. Der Winkel ABC des Dreiecks, dessen eine Seite AB den Kegelschnitt berührt, während die andere BC stets durch den Brennpunkt geht, bleibt hierbei stets ein rechter Winkel und auch die Bestimmung des Berührungspunkts bleibt die gleiche.

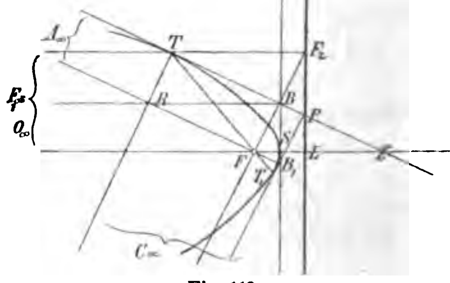


Fig. 112 c.

a) *Wenn ein rechter Winkel so bewegt wird, dafs sein Scheitel auf der Scheiteltangente einer Parabel hingleitet und ein Schenkel die*

Parabel berührt, so geht der andere Schenkel stets durch einen Punkt der Axe, den Brennpunkt.

Entsprechend 2b folgt:

b) *Der Fahrstrahl und der Durchmesser eines Punktes der Parabel bilden mit der Tangente desselben gleiche Winkel.*

Ist S der Scheitel der Parabel, $F_2 \wedge F$ zur Tangente TB als Symmetrieaxe und $F_2L \perp FS$, so ist $FS = SL$, da $FB = BF_2$ ist. Es liegt also F_2 stets auf der Normalen der Axe, deren Abstand vom Brennpunkt durch den Scheitel halbiert wird. Diese Normale ist zugleich die Polare des Brennpunkts und heisst Leitgerade der Parabel. Da $FT = TF_2$, so folgt:

c) *In der Parabel ist der Abstand eines Punktes vom Brennpunkt gleich dem von der Leitgeraden.*

Zusätze. a) Die Umkehrung des Satzes 3a kann zur Konstruktion der Parabel, bezw. deren Tangenten benutzt werden. Allgemein gilt:

Dreht man einen rechten Winkel so, dafs ein Schenkel stets durch einen Punkt geht, während der Scheitel auf einem Kreis oder einer Geraden hingleitet, so beschreibt der andere Schenkel tangierend einen Kegelschnitt.

b) Die Sätze 2c und 3c stellen die Kegelschnitte als geometrische Örter dar, deren einzelne Punkte leicht konstruiert werden können.

4. Auch in der Ellipse und Hyperbel nennt man die Polare eines Brennpunktes die Leitgerade desselben. Wir erhalten nach 2d die Schnittpunkte der Tangente AB mit diesen Leitgeraden, indem wir auf den Fahrstrahlen des Berührungspunktes die Normalen ziehen (Fig. 112a und b), $FP \perp FT$, $F_1P_1 \perp F_1T$. Da dann $\triangle FTP \backsim F_1TP_1$ ist, so ist $FT : F_1T = PT : P_1T$ oder

$FT : F_1T \pm TF = PT : P_1T \pm TP$, oder wenn $2a$ die grofse bezw. reelle Axe ist: $FT : 2a = PT : PP_1$, $FT : PT = 2a : PP_1$. Ist TQ der Normalabstand von T und der Leitgeraden LP, so ist auch: $PT : TQ = PP_1 : LL_1$. Die Multiplikation beider Proportionen ergiebt

$$FT : TQ = 2a : LL_1 = a : OL.$$

Dieses Verhältnis ist somit für alle Punkte des Kegelschnitts das gleiche, auch für den Scheitel S:

$$FS : SL = a : OL.$$

Ist die lineare Excentricität $OF = c$, so ist hiernach

$$(a - c) : (OL - a) = a : OL \text{ oder } (a - c) : a = (OL - a) : OL,$$

woraus: $c : a = a : OL$; somit allgemein:

$$FT : TQ = c : a$$

Das Verhältnis $\frac{c}{a} = e$ heifst die Excentrität des Kegelschnitts.

In jedem Kegelschnitt ist das Verhältnis der Abstände eines Punktes von dem Brennpunkt und dessen Leitgeraden konstant, nämlich gleich der

Excentricität e des Kegelschnitts. Es ist $e < 1$ in der Ellipse, $e = 1$ in der Parabel, $e > 1$ in der Hyperbel.

Hiernach können die Kegelschnitte zusammengefaſst werden in dem Begriff des geometrischen Ortes für einen Punkt, dessen Entfernungen von einem Punkt und einer Geraden ein konstantes Verhältnis haben.

5. Ist FT die Ordinate des Brennpunkts, LR die Hälfte der ideellen Berührungssehne desselben und S der Scheitel, so ist $e = \frac{FT}{FL} = \frac{FS}{SL} = \frac{FT}{LR}$, woraus folgt: $LR = FL$. Es liegt somit der Brennpunkt so, daſs er die in §. 40, 3 gegebenen Bedingungen erfüllt für das Centrum der Projektion, von welchem aus der Kegelschnitt als Kreis projiciert wird, wenn die Bildebene $\| FLR$ ist. Hier fällt das Centrum und somit auch die Bildebene in die Originalebene hinein. Zugleich muſs nach dem angeführten §. der Brennpunkt F als der Mittelpunkt des $\mathfrak{p}$. Kreises projiciert werden.

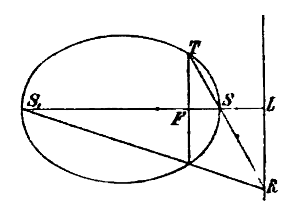


Fig. 113.

Jeder Kreis in der Ebene eines Kegelschnitts, dessen Mittelpunkt in einem Brennpunkt des letzteren liegt, ist mit diesem perspecktivisch in Bezug auf den Brennpunkt als Centrum der Projektion und die Leitgerade als Projektion der zum Kreis gehörigen unendlich fernen Geraden.

Hiernach lassen sich Beziehungen der Winkel centraler Strahlen eines Kreises nach Schnittpunkten und Berührungspunkten zugehöriger Geraden sofort auf Strahlen von dem Brennpunkte eines Kegelschnitts übertragen, wobei jedoch darauf zu achten ist, daſs in der Projektion an die Stelle eines Halbstrahles auch dessen Gegenstrahl treten kann. (Siehe die Aufgaben.)

Elftes Kapitel.

Metrische Verhältnisse in projektivischen Gebilden.

§. 42. Metrisch-projektivische Beziehungen geradliniger Figuren.

1. Wird eine Strecke AB von einem Centrum S aus projiciert und sind $SA = a$, $SB = b$ die Strahlstrecken und h der Abstand des Centrums von der Geraden AB, so kann die Strecke selbst in diesen von der Lage des Centrums abhängigen Gröſsen ausgedrückt werden. Es ist nämlich $2 \cdot \triangle ABS = \overline{AB} \cdot h = ab \sin(ab)$, somit $\overline{AB} = \frac{ab}{h} \sin(ab)$. Nehmen wir auf derselben Geraden eine an B

angrenzende Strecke BC, so ergiebt sich für dieselbe auf gleiche Weise $BC = \frac{bc}{h} \sin(bc)$, und der Quotient beider Strecken ist

$$\frac{AB}{BC} = \frac{a}{c} \frac{\sin(ab)}{\sin(bc)}.$$

S a h c A B C

Fig. 114.

(Vgl. II. Teil, §. 16, 1 a u. a'.) Schliefst sich in C eine zweite Gerade an, auf welcher die Strecken CD und DE liegen, so folgt ebenso:

$$\frac{CD}{DE} = \frac{c}{e} \frac{\sin(cd)}{\sin(de)}$$

Gehen wir in dieser Weise weiter auf eine dritte Gerade mit den Strecken EF und FG und eine vierte Gerade GA mit dem Teilpunkt H, so ergiebt sich schliefslich aus der Multiplikation der entsprechenden Verhältnisse:

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GH}{HA} = \frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} \cdot \frac{\sin(cd)}{\sin(de)} \cdot \frac{\sin(ef)}{\sin(fg)} \cdot \frac{\sin(gh)}{\sin(ha)}.$$

Der Ausdruck rechter Hand ist aber nur noch abhängig von den Winkeln der projicierenden Strahlen und bleibt für alle Projektionen der Figur von einem bestimmten Centrum unverändert; es mufs also der Wert des Ausdrucks für eine Projektion $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$ der gleiche bleiben, d. h.:

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GH}{HA} = \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} \cdot \frac{C_1 D_1}{D_1 E_1} \cdot \frac{E_1 F_1}{F_1 G_1} \cdot \frac{G_1 H_1}{H_1 A_1}.$$

Wird andrerseits das Centrum der Projektion verlegt, so bleibt doch der links stehende Ausdruck unverändert und es gilt somit für die neuen Strahlen:

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} \cdot \frac{\sin(cd)}{\sin(de)} \cdot \frac{\sin(ef)}{\sin(fg)} \cdot \frac{\sin(gh)}{\sin(ha)} = \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(b_1 c_1)} \cdot \frac{\sin(c_1 d_1)}{\sin(d_1 e_1)} \cdot \frac{\sin(e_1 f_1)}{\sin(f_1 g_1)} \cdot \frac{\sin(g_1 h_1)}{\sin(h_1 a_1)}.$$

Daher mufs der Wert dieses Ausdrucks für alle Projektionen der Figur und für alle Projektionen der Projektionen unverändert bleiben. Es ist dies eine metrisch-projektivische Beziehung:

Wenn in einer geradlinigen Figur aus Strecken der Geraden ein Produkt von Quotienten der Art gebildet wird, dafs 1) jeder Punkt ebenso oft einen Dividenden als einen Divisor begrenzt und 2) von jeder Geraden ebenso oft ein Dividend als ein Divisor entnommen wird, so ist das Produkt konstant für alle Projektionen der Figur, und zwar gleich dem entsprechend gebildeten Ausdruck aus dem Sinus der Winkel zwischen den projicierenden Strahlen.

Gemäfs der ersten Bedingung fallen nämlich in den oben für die Strecken abgeleiteten Ausdrücken die Strahlstrecken nach den einzel-

nen Punkten aus der Rechnung und gemäfs der zweiten Bedingung auch die Abstände der Geraden vom Centrum.

2. Wird z. B. eine Strecke AB durch zwei Punkte C und D irgendwie innen oder aufsen geteilt, so hat der Ausdruck $\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}$ oder $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ die verlangten Eigenschaften. Dieses Doppelverhältnis bleibt also konstant für alle Projektionen (vgl. II. Teil, §. 21, 2). Es folgt hieraus, dafs durch drei projektivische Elementenpaare zweier Punktreihen zu jedem vierten Element D das projektivische D_1 bestimmt ist durch die beiden Gleichungen

$$\frac{A_1 D_1}{D_1 B_1} = \frac{A_1 C_1}{C_1 B_1} \cdot \frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB} \text{ und } A_1 D_1 + D_1 B_1 = A_1 B_1.$$

(Vgl. II. Teil, §. 21, 3.)

Für den Fall, dafs C und D harmonisch zugeordnete Punkte in Bezug auf AB sind, wird der Wert des Ausdrucks am einfachsten aus der Projektion berechnet, in welcher $A_1 C_1 = C_1 B_1$ und D_1 in unendliche Entfernung fällt. Da dann der projicierende Strahl d parallel dem Träger g_1 der Punktreihe ist, so ist $\sin(ad) = \sin(ag_1)$, $\sin(db) = \sin(bg_1)$, und es verhält sich

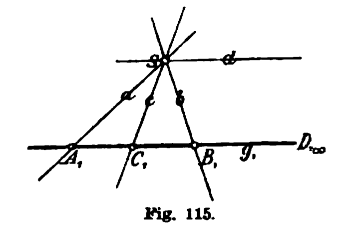


Fig. 115.

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(ag_1)} = \frac{A_1 C_1}{S C_1} = \frac{B_1 C_1}{S C_1} = \frac{\sin(cb)}{\sin(bg_1)},$$

also mit Berücksichtigung, dafs ad und db gegenwendig sind:

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)} = -1,$$

woraus für alle Projektionen folgt:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1. \quad \text{(Vgl. II. T. §. 18.)}$$

3. Im Falle C_1 in den Mittelpunkt fällt, mufs somit auch $\frac{A_1 D_{1\infty}}{B_1 D_{1\infty}} = 1$ sein. Wir können noch allgemeiner aussagen:

Wenn ein Punkt sich unmefsbar weit von zwei festen Punkten entfernt, so kommt das Verhältnis seiner Abstände von diesen Punkten dem Zahlwert 1 unbeschränkt nahe.

Denn tragen wir den Abstand DB (Fig. 116) auf DA ab, $DC = DB$, so ist

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC + CA}{DB} = 1 + \frac{CA}{DB}$$

d. h. dies Verhältnis ist stets um so viel gröfser als 1, als der Quotient der Differenz beider Strecken durch die kleinere Strecke beträgt. Letzterer Quotient kommt aber der Null unbeschränkt nahe, wenn

der Punkt D in unendliche Entfernung hinausrückt, da dann der Nenner des Bruchs unendlich grofs wird, während der Zähler mehr und mehr gleich dem Abstand des Punktes A von der durch B zu AD gezogenen Normalen wird. Es ist also $\frac{AD_\infty}{BD_\infty} = 1$.

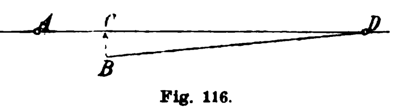
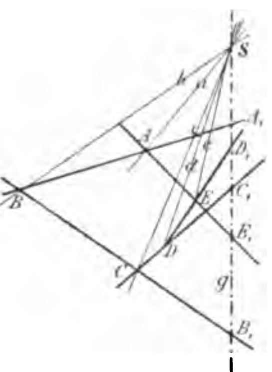


Fig. 116.

4. Werden die Seiten des Vielecks $ABCDE$ der Reihe nach von einer Geraden g in den Punkten $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ getroffen, so entspricht der Ausdruck

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1E} \cdot \frac{EE_1}{E_1A}$$

den in 1 gestellten Bedingungen. Um seinen Wert zu bestimmen, nehmen wir das Centrum S der Projektion auf der Geraden g an; es ist dann $\sin(aa_1) = \sin(ae_1)$, $\sin(a_1b) = \sin(b_1b)$ u. s. f., da die Strahlen $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ auf g fallen. Es folgt somit, dafs der Ausdruck $= + 1$ ist; dies ist eine Erweiterung des Satzes von Menelaos (II. T. §. 17, 1a).


Fig. 117a.

Wenn man in einem Vieleck $ABCDE$ mit ungerader Seitenzahl von einem Punkt S die Ecktransversalen zieht, welche die gegenüberliegenden Seiten je in einem Punkt schneiden, so ist der Ausdruck:

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1E} \cdot \frac{EE_1}{E_1A} = \pm 1.$$

Denn es ist $\sin(aa_1) = \sin(c_1d)$, $\sin(a_1b) = \sin(dd_1)$ u. s. w. Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva (II. T. §. 17, 1b′).

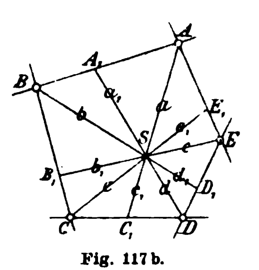


Fig. 117b.

§. 43. Metrische Beziehungen in Kegelschnitten.

1. Wird ein Kegelschnitt von den Seiten des Dreiecks ZOO_1 in den Punkten P, L, A, B, P_1, L_1 getroffen (Fig. 118), so ist

$$\frac{PO \cdot OL}{AO \cdot OB} \cdot \frac{AO_1 \cdot O_1B}{P_1O_1 \cdot O_1L_1} \cdot \frac{P_1Z \cdot ZL_1}{PZ \cdot ZL} = 1.$$

Dafs nämlich diese Gleichung für ein Dreieck, dessen Seiten einen Kreis schneiden, giltig ist, folgt leicht aus dem Satz von den Sehnenabschnitten im Kreis (II. Teil, §. 17, 4, Satz von Carnot). Der Ausdruck entspricht aber auch den in §. 42, 1 gestellten Bedingungen; sein Wert bleibt somit für die Projektionen und für deren weitere

Projektionen unverändert. Nehmen wir nun an, Z rücke in unendliche Entfernung hinaus, so wird der letzte Quotient $\frac{P_1 Z \cdot Z L_1}{PZ \cdot ZL}$ dem Werte 1 unbeschränkt nahe kommen (§. 42, 3), so dafs für die beiden andern Faktoren folgt:

$$\frac{PO \cdot OL}{P_1 O_1 \cdot O_1 L_1} = \frac{AO \cdot OB}{AO_1 \cdot O_1 B}.$$

Fig. 118.

Nehmen wir noch AB als den zu $PL \parallel P_1 L_1$ zugeordneten Durchmesser, so wird $OL = PO$, $O_1 L_1 = P_1 O_1$, und man erhält:

$$\frac{\overline{PO}^2}{\overline{P_1 O}^2_1} = \frac{AO \cdot OB}{AO_1 \cdot O_1 B}$$

Für die Parabel (Fig. 119 b) insbesondere wird noch $\frac{OB_\infty}{O_1 B_\infty} = 1$, so dafs nur $\frac{\overline{PO}^2}{\overline{P_1 O_1}^2} = \frac{AO}{AO_1}$ übrig bleibt. Nennen wir die Hälfte der

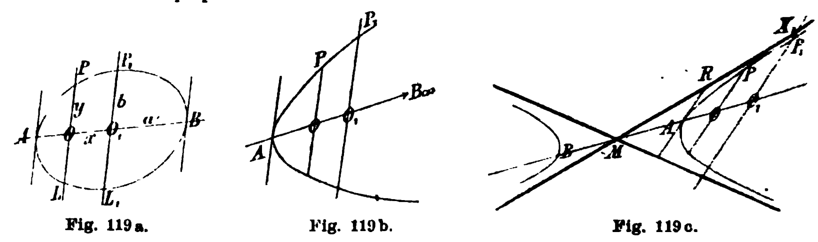


Fig. 119 a. Fig. 119 b. Fig. 119 c.

einem Durchmesser zugeordneten Sehne Ordinate des Durchmessers, so gilt also der Satz:

In einer Ellipse oder Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweier Ordinaten eines Durchmessers wie die Produkte der zugehörigen Abschnitte des Durchmessers, in einer Parabel wie die zugehörigen Abschnitte des Durchmessers.

2. In der Parabel ist $\frac{\overline{PO}^2}{AO} = \frac{\overline{P_1 O_1}^2}{AO_1} = p$ eine konstante Gröfse. Wird $PO = y$, $AO = x$ gesetzt, so ist:

$$\boldsymbol{y^2 = px.}$$

Zusatz. a) Wird x auf der Hauptaxe gemessen, so ist nach §. 41, 3 für den Brennpunkt $y_1 = 2x_1$, also $y_1^2 = p \cdot \frac{y_1}{2}$, $y_1 = \frac{p}{2}$, d. h. p ist die zugeordnete Sehne des Brennpunkts.

b) Wird x auf dem durch den Punkt T (Fig. 112 c) gehenden Durchmesser gemessen, so ist für den Scheitel S die Ordinate $= TZ$, die Abscisse $= SZ$, also $\overline{TZ}^2 = p \cdot \overline{SZ}$. Nun ist aber auch im rechtwinkeligen Dreieck FBZ

$$\overline{BZ}^2 = FZ \cdot SZ, \text{ oder da } FZ = TF = f,$$

d. i. gleich dem Fahrstrahl vom Brennpunkt nach dem Anfangspunkt T des Durchmessers, $BZ = \frac{TZ}{2}$, somit $\overline{TZ}^2 = 4f \cdot SZ$, woraus folgt $p = 4f$. Die Parabel-Gleichung für den Durchmesser durch T ist also:

$$y^2 = 4fx.$$

3. Ist O_1 der Mittelpunkt einer Ellipse (Fig. 119 a) und sind $AO_1 = a$ und $P_1O_1 = b$ die Hälften der zugeordneten Durchmesser, so ist $\frac{PO^2}{b^2} = \frac{AO \cdot OB}{a^2}$. Setzen wir die Ordinate $PO = y$ und den Abschnitt $O_1O = x$ (Abscisse), so ist $AO = a - x$, $OB = a + x$; also:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{(a-x)(a+x)}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Zusatz. Sind a und b die Halbaxen, c die lineare Excentricität, so ist der Fahrstahl nach dem Grenzpunkt der kleinen Axe $= a$ (§. 41, 2c), somit $b^2 = a^2 - c^2$.

Für die zugeordnete Sehne p des Brennpunkts folgt:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{4b^2} = 1, \qquad \text{woraus } p^2 = \frac{4b^2}{a^2}(a^2 - c^2) = \frac{4b^4}{a^2}, \qquad p = \frac{2b^2}{a}.$$

4. Wenn in einer Hyperbel der Punkt P_1 in unbeschränkt grofse Entfernung hinausrückt, so kommt er der Asymptote unbeschränkt nahe. Trifft die Ordinate O_1P_1 die Asymptote in X_1, so nähert sich somit bei dem Weiterrücken der Ordinate der Wert $\frac{O_1P_1}{O_1M}$ mehr und mehr dem Wert $\frac{O_1X_1}{O_1M} = \frac{AR}{AM}$, wenn AR der Tangentenabschnitt von A bis zur Asymptote ist. Nun ist:

$$\frac{PO^2}{AO \cdot OB} = \frac{P_1O_1^2}{AO_1 \cdot O_1B} = \left(\frac{P_1O_1}{O_1M}\right)^2 \cdot \frac{O_1M}{AO_1} \cdot \frac{O_1M}{O_1B}.$$

Rückt P_1O_1 in unbeschränkt grofse Entfernung, so wird $\frac{P_1O_1}{O_1M} = \frac{X_1O_1}{O_1M} = \frac{AR}{MA}$, $\left(\frac{O_1M}{AO_1}\right) \cdot \left(\frac{O_1M}{O_1B}\right) = 1$ (§. 42, 3), somit ist:

$$\frac{\overline{PO}^2}{AO \cdot BO} = \frac{\overline{AR}^2}{\overline{AM}^2}, \qquad \frac{\overline{PO}^2}{\overline{AR}^2} = \frac{AO \cdot BO}{\overline{AM}^2}$$

Wird $PO = y$, $MO = x$, $MA = a$, $AR = b$ gesetzt, so ist:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{(x-a)(x+a)}{a^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hierbei ist b die Hälfte des ideellen a zugeordneten Durchmessers. (§. 37, 5).

Zusatz. a) Ist a die halbe reelle Axe, c die lineare Excentricität,

so folgt für die zugeordnete Sehne p des Brennpunkts: $\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{4b^2} = 1$, $p^2 = \frac{4b^2}{a^2}(c^2 - a^2), p = \frac{2b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}$. Aus §. 41,2c folgt aber, da der Grenzpunkt von p um $2a$ weiter vom zweiten als vom ersten Brennpunkt entfernt ist: $\left(\frac{p}{2} + 2a\right)^2 = \frac{p^2}{4} + (2c)^2$, woraus folgt: $p = 2\frac{(c^2 - a^2)}{a}$.

Die Vergleichung beider Werte von p ergiebt, dafs $b^2 = c^2 - a^2$, $p = \frac{2b^2}{a}$.

Ist hierbei $b = a$, so heifst die Hyperbel **gleichseitig**; ihre Asymptoten stehen normal zu einander.

b) Zeichnen wir durch einen Punkt P der Hyperbel parallele Gerade x und y zu den Asymptoten, so folgt aus §. 37, 5 d, dafs $2x \cdot 2y$ eine konstante Gröfse ist, da $2x$ und $2y$ die von der Tangente gebildeten Abschnitte der Asymptoten sind. Die im Scheitel der Hyperbel gezogene Tangente bildet aber den Abschnitt $\sqrt{a^2 + b^2} = c$; somit ist

$$xy = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

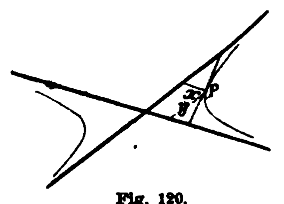


Fig. 120.

5. Bezeichnen wir nicht den Mittelpunktsabstand eines Punktes O der Axe, sondern den Abstand vom Scheitel A mit x, so folgt aus $\frac{PO^2}{b^2} = \frac{AO \cdot BO}{a^2}$

für die Ellipse $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x(2a - x)}{a^2}$, $y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$, $y^2 = px - \left(\frac{bx}{a}\right)^2$,

für die Parabel $y^2 = px$,

für die Hyperbel $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x(2a + x)}{a^2}$, $y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$, $y^2 = px + \left(\frac{bx}{a}\right)^2$.

Das Quadrat der Ordinate ist daher in der Parabel (*παραβάλλειν*) geradezu **gleichzusetzen** dem Rechteck aus dem zugehörigen Scheitelabschnitt und aus der dem Brennpunkt zugeordneten Sehne (dem **Parameter** des Kegelschnitts), in der Ellipse (*ἐλλείπειν*) **fehlt** ihm noch etwas zu dieser Gröfse; in der Hyperbel (*ὑπερβάλλειν*) **übertrifft** sie diese Gröfse.

6. Die Ordinate zu der grofsen Axe einer Ellipse ist bestimmt durch die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, die Ordinate des um diese Axe gelegten Kreises ist für dieselbe Abscisse bestimmt durch: $Y^2 = a^2 - x^2$, woraus folgt

$$y : Y = b : a.$$

Zerlegen wir die Segmente der Ellipse und des Kreises, welche durch eine Normale der grofsen Axe begrenzt sind, in unbeschränkt schmale

Streifen parallel dieser Normale, so gilt dasselbe Verhältnis für diese Streifen, daher auch für die Segmente selbst.

Für die gesamte Ellipsenfläche folgt hieraus der Inhalt $= \pi a b$.

Wird ein Parabelsegment durch irgend welche Sehne AB begrenzt und sind CA und CB Tangenten, S der Grenzpunkt des zu AB zugeordneten Durchmessers, PQ Tangente in S, so ist $\triangle CPQ = \frac{1}{2} ASB$, da $\triangle ASB = \frac{1}{2} ABC$ (§. 37, 5 a) und $\triangle CPQ = \frac{1}{4} ABC$. Sind S_1 und S_2 die Grenzpunkte der zu AS und BS zugeordneten Durchmesser, P_1Q_1, P_2Q_2 die Tangenten in diesen Punkten, so ist ebenso: $\triangle PP_1Q_1 = \frac{1}{2} ASS_1$, $\triangle QP_2Q_2 = \frac{1}{2} BSS_2$.

Fährt man in dieser Zerlegung fort, so ist die Summe der Dreiecke

$$ASB + ASS_1 + BSS_2 + \cdots = \Sigma,$$

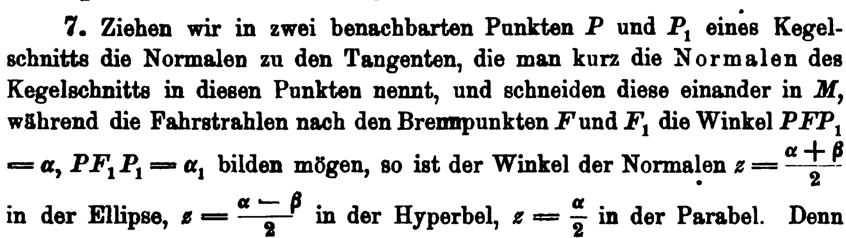
d. i. gleich dem Parabelsegment, dagegen die Summe der Dreiecke

$$CPQ + PP_1Q_1 + QP_2Q_2 + \cdots = \frac{1}{2}\Sigma,$$

gleich dem Teil der Fläche des Dreiecks ABC, welcher außerhalb der Parabel liegt; somit

$$\Sigma + \frac{1}{2}\Sigma = \triangle ABC, \quad \Sigma = \frac{2}{3} \cdot \triangle ABC.$$

Fig. 121.



7. Ziehen wir in zwei benachbarten Punkten P und P_1 eines Kegelschnitts die Normalen zu den Tangenten, die man kurz die Normalen des Kegelschnitts in diesen Punkten nennt, und schneiden diese einander in M, während die Fahrstrahlen nach den Brennpunkten F und F_1 die Winkel $PFP_1 = \alpha$, $PF_1P_1 = \alpha_1$ bilden mögen, so ist der Winkel der Normalen $z = \frac{\alpha + \beta}{2}$ in der Ellipse, $z = \frac{\alpha - \beta}{2}$ in der Hyperbel, $z = \frac{\alpha}{2}$ in der Parabel. Denn sind z. B. in der Ellipse die Winkel der Normalen mit den Fahrstrahlen w und w_1, so folgt aus Dreiecken mit ein Paar Scheitelwinkeln:

$$\begin{aligned} z + w &= \alpha_1 + w_1 \\ z + w_1 &= \alpha + w \\ \hline z &= \frac{\alpha + \alpha_1}{2}. \end{aligned}$$

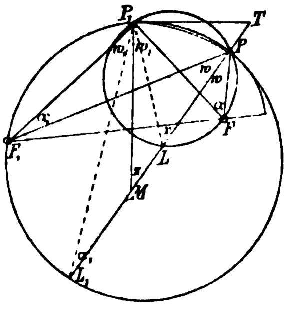


Fig. 122.

Legen wir nun durch PP_1F und durch PP_1F_1 je einen Kreis, welcher die Normale PM in L bezw. L_1 schneiden möge, so ist

$\sphericalangle\, PLP_1 = \alpha$, $PL_1P_1 = \alpha_1$, woraus folgt $\sphericalangle\, LP_1M = \alpha - z = \frac{\alpha - \alpha_1}{2}$ und $\sphericalangle\, L_1P_1M = z - \alpha_1 = \frac{\alpha - \alpha_1}{2}$; also halbiert die Normale P_1M den Winkel LP_1L_1. Schneidet die Tangente P_1T die Normale PM in T, so sind M, T harmonisch zugeordnete Punkte mit L, L_1. — Indem der Punkt P_1 sich dem Punkt P nähert, gilt das gleiche für T. Die Kreise gehen alsdann in solche über, welche sich in P berühren, und der in der Strecke LL_1 (Fig. 123.) zu P harmonisch zugeordnete Punkt M ist die *Grenzlage des Schnittpunkts der Normalen zweier Punkte des Kegelschnitts, welche einander unmeſsbar nahe gerückt sind.*

Denken wir uns durch 3 Punkte P, P_1, P_2 des Kegelschnitts einen Kreis gelegt, so liegt dessen Mittelpunkt auf der Mittelnormale zu PP_1 und PP_2. Rücken P_1 und P_2 unbeschränkt nahe an P heran, so werden diese Mittelnormalen zwei unbeschränkt nahe beieinander liegende Normalen des Kegelschnitts und der Mittelpunkt des Kreises rückt nach M. Es kann dieser Punkt daher als Mittelpunkt eines Kreises betrachtet werden, welcher 3 unbeschränkt nahe benachbarte Punkte mit dem Kegelschnitt gemein hat. Ein solcher Kreis heiſst der **Krümmungskreis** des betr. Punktes, da er sich am meisten von allen Kreisen in diesem Punkt an den Kegelschnitt anschmiegt; sein Mittelpunkt heiſst **Krümmungsmittelpunkt**.

Die Punkte L und L_1 werden auch erhalten durch die Normalen $FL \perp PF$ und $F_1L_1 \perp PF_1$. Für das Teilverhältnis ergiebt sich: $LM : ML_1 = PL : PL_1 = PF : PF_1 = FN : NF_1$, wenn N der Schnittpunkt der Normale mit der groſsen Axe ist. Ziehen wir MX und L_1F_2 normal zu PF, so ist auch

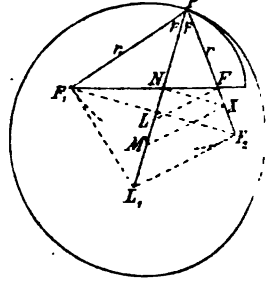


Fig. 123.

$$FX : XF_2 = LM : ML_1 = FN : NF_1,$$

daher $NX \parallel F_1F_2$, und da $F_1F_2 \perp PL_1$, so folgt nun auch $NX \perp PN_1$. Man erhält also M, indem man $NX \perp PN$, $XM \perp PF$ zieht.

Ist ϱ der Winkel zwischen der Normalen und den Fahrstrahlen, so ist der Krümmungsradius $PM = \varrho$ bestimmt durch $\varrho \cos^2 \alpha = PN$, während (II. Teil, §. 26, 4b) $PN = \frac{b}{a}\sqrt{rr_1}$, wenn r und r_1 die beiden Fahrstrahlen sind (mit Berücksichtigung, daſs $\frac{r + r_1}{2} = a$ und $a^2 - c^2 = b^2$ ist). Somit ist:

$$\varrho = \frac{b\sqrt{rr_1}}{a \cos^2 \varphi}$$

Da aber auch $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{rr_1}}$ (II. Teil §. 43, 3), so ist:

$$\varrho = \frac{b^2}{a \cos^3 \varphi} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{(\sqrt{rr_1})^3}{ab}.$$

Anmerkung.

Eine geradlinige gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c ergiebt in t Sekunden den Weg $y = ct$, eine geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung g den Weg $x = \frac{1}{2} g t^2$. Werden beide Bewegungen nach dem Gesetz von dem Parallelogramm der Bewegungen vereinigt, so ergiebt sich für den geometrischen Ort des Punktes durch Elimination von t die Gleichung $y^2 = \frac{2c^2}{g} \cdot x$, d. i. die Gleichung einer Parabel. Die Bewegung heifst Wurfbewegung; die Wurflinie ist eine Parabel.

Bewegt sich ein Punkt gleichförmig auf einem Kreis mit der Geschwindigkeit v, so kann seine Bewegung innerhalb eines Bahnelements als eine Wurfbewegung mit der Centralbeschleunigung γ betrachtet werden. Da zu den Abscissen x und $(2\varrho - x)$ die Kreisordinate bestimmt ist durch $y^2 = 2\varrho x - x^2$, dagegen die Parabelordinate durch $y^2 = \frac{2v^2}{\gamma} x$, so werden diese übereinstimmen, wenn $\frac{2v^2}{\gamma} x = 2\varrho x - x^2$ oder $\frac{2v^2}{\gamma} = 2\varrho - x$. Da für ein Bahnelement x unbeschränkt klein anzunehmen ist, so ergiebt sich hieraus: $\gamma = \frac{v^2}{\varrho}$.

Bezeichnet für irgend einen Zeitpunkt v die Geschwindigkeit eines Planeten, welcher sich in einer Ellipse bewegt, deren einer Brennpunkt in der Sonne liegt (I. Kepler'sches Gesetz) und ist h der Abstand dieses Brennpunktes von der Tangente des Punktes, in welchem sich der Planet gerade befindet, so ist (nach dem II. Kepler'schen Gesetz): $vh = k$ eine konstante Gröfse; da aber $h = r \cos\varphi$, wenn r der Fahrstrahl und φ der Winkel desselben mit der Normalen, so ist:

$$v = \frac{k}{r \cos\varphi}.$$

Wird die bis zu einem gewissen Punkt (P) erlangte Geschwindigkeit v nach Gröfse und Richtung durch einen Pfeil dargestellt, und tritt an ihre Stelle in dem betr. Punkt die ebenso dargestellte Geschwindigkeit v_1, so sind die durch v, r bezw. v_1, r bestimmten Dreiecke (nach dem II. Kepler'schen Gesetz) einander gleich, die Verbindungsgerade der Pfeilspitzen ist parallel zu r, d. h. die Geschwindigkeit, welche zu v hinzukommt, um v_1 als Resultante zu ergeben, fällt in die Richtung nach dem Brennpunkt.

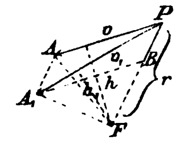


Fig. 124.

Die Bewegung innerhalb eines Bahnelements kann hiernach aufgefafst werden einerseits als eine Wurfbewegung mit der Tangential-

geschwindigkeit v und einer gegen die Sonne gerichteten Beschleunigung g, andrerseits als eine Bewegung auf dem Krümmungskreis mit der Normalbeschleunigung $\gamma = \frac{v^2}{\varrho}$. Da die Beschleunigung g in die Tangentialbeschleunigung $g \sin \varphi$ und in die Normalbeschleunigung $g \cos \varphi$ zerlegt werden kann, so mufs $\gamma = g \cos \varphi = \frac{v^2}{\varrho}$ sein, somit $g = \frac{v^2}{\varrho \cos \varphi} = \frac{k^2}{r^2 \varrho \cos^3 \varphi}$ $= \frac{ak^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$, d. h. die Beschleunigung ist dem Quadrat der Entfernung vom Brennpunkt umgekehrt proportional (Newton's Gravitationsgesetz).

Anhang.

Zwölftes Kapitel.

Von der Abbildung körperlicher Gestalten auf der Ebene.

§. 44. Die Elementar-Aufgaben der darstellenden Geometrie.

1. Ziehen wir durch die Punkte eines räumlichen Gebildes parallele Gerade bis zu deren Schnittpunkten mit einer Ebene, so erhalten wir auf dieser die Parallelprojektion des Gebildes. Dieselbe wird Normalprojektion genannt (vgl. §. 6), wenn die projicierenden Parallelstrahlen normal zur Bildebene sind, im andern Falle schiefe Projektion.

Für die Parallelprojektion gelten die Sätze:

a) Punktreihen und Strahlenbüschel werden wiederum als solche projiciert, ebenso parallele Gerade.

b) Die Projektion einer Punktreihe ist dieser ähnlich (II. Teil, §. 6, 4a).

c) Die Projektionen paralleler Strecken stehen im selben Verhältnis, wie die Strecken selbst.

d) Strecken, welche der Bildebene parallel sind, werden in wahrer Gröfse projiciert, ebenso Winkel und ebene Figuren, deren Ebene parallel der Bildebene ist.

2. Für technische Zwecke am geeignetsten ist die Darstellung der Körper durch die Normalprojektionen auf zwei zu einander normale Bildebenen, deren eine als Horizontalebene α, die andere als Verticalebene β bezeichnet wird; die Abbildung in ersterer Ebene heifst Grundrifs (Horizontalprojektion), die in der zweiten Ebene Aufrifs (Vertikalprojektion); die Schnittgerade beider Ebenen heifst Axe.

Fällen wir von einem Punkt P auf diese Ebenen die Normalen PP_1 und PP_2 (Fig. 125), so sind P_1 und P_2 die Projektionen des Punktes und die genannten Strecken bestimmen ein Rechteck, von welchen das P gegenüberliegende Eck Q auf der Axe OX liegt. Hierbei ist $P_2Q = PP_1$ und $P_1Q = PP_2$. Da man schliefslich beide Bilder in einer Ebene erhalten will, so denkt man sich die eine Bildebene um die Axe in die

andere aufgeklappt, wobei P_1, Q, P_2 in eine einzige zur Axe normale Gerade zu liegen kommen.

a) *Die Projektionen eines Punktes im Grund- und Aufriſs liegen in einer Normalen zur Axe.*

b) *Der Abstand der Projektion eines Punktes in einer Bildebene von der Axe ist gleich dem Abstand des Punktes selbst von der anderen Bildebene.*

c) *Für einen Punkt der einen Bildebene liegt die Projektion auf der anderen Bildebene in der Axe.*

Z. B. ist Q die Horizontalprojektion von P_2 und auch die Verticalprojektion von P_1.

Von den beiden durch die Axe getrennten Halbebenen wird jede doppelt als Bildebene benutzt, indem sowohl die Vertical- als die Horizontalebene unbegrenzt zu denken ist und bei der Umklappung je zwei Halbebenen einander decken. Ob ein Punkt dem Grundriſs oder Aufriſs zuzuordnen ist, wird durch die angehängte Marke (Index) angezeigt.

3. Jeder Punkt der Geraden PP_1 hat seine Horizontalprojektion in P_1; die Vertikalprojektion der Geraden ist QP_2.

a) *Von einer Normalen zu einer Bildebene ist die Projektion in dieser ein Punkt, in der zweiten Bildebene eine Normale zur Axe.*

Trifft eine durch P parallel zur Horizontalebene gezogene Gerade die Verticalebene in S_2, so ist die Ebene P_2PS_2 parallel zur Horizontalebene (§. 5, 4a′ u. §. 1, 7a), somit P_2S_2 parallel der Axe, d. h.:

b) *Von jeder zu einer Bildebene parallelen Geraden ist die Projektion in der anderen Bildebene parallel zur Axe.*

Die Schnittpunkte einer Geraden mit der Bildebene heiſsen deren Durchgänge.

4. Die Ebene $PP_1S_1S_2$ steht normal zur Horizontalebene; P_1S_1 ist ihre Schnittgerade mit der Grundriſsebene, S_1S_2 die mit der Aufriſsebene. Die Schnittgeraden einer Ebene mit den Bildebenen heiſsen die Spuren der Ebene. Es ist S_1S_2 normal zur Axe als Schnitt zweier zur Horizontalebene normalen Ebenen. Alle Punkte der genannten Ebene $PP_1S_1S_2$ haben ihre Horizontalprojektion in P_1S_1.

Fig. 125.

a) *Von einer Normalebene zu einer Bildebene ist die Projektion in dieser eine Gerade; die Spur in der anderen Bildebene ist normal zur Axe.*

Für die zur Horizontalebene parallele Ebene P_2PS_2 ist P_2S_2 die Spur und Abbildung im Aufriſs.

b) *Von einer parallelen Ebene zu einer Bildebene ist die Projektion in der anderen Bildebene eine zur Axe parallele Gerade.*

Das Dreieck P_2PS_2 wird hierbei nach 1 d durch QP_1S_1 in seiner wahren Gestalt abgebildet.

5. Um die wahre Gröfse einer Strecke, eines Winkels oder die wahre Gestalt einer ebenen Figur aus ihren Projektionen zu erhalten, wird die Ebene derselben um eine ihrer Spuren in die betr. Bildebene umgelegt (aufgeklappt) oder um eine Drehaxe, welche parallel einer Bildebene ist, in die parallele Lage zu dieser Bildebene gedreht.

Für diese Drehungen sind folgende Sätze von Bedeutung:

a) *Die Projektion eines R ist wiederum ein R, wenn ein Schenkel in der Bildebene liegt oder parallel derselben ist.*

Dies folgt aus §. 6, 2c.

b) *Bei einer Drehung um eine Axe, welche normal zu einer Bildebene ist, beschreiben die Projektionen in dieser Bildebene Kreisbögen um die Projektion der Drehaxe; die Projektionen in der anderen Bildebene beschreiben Parallele zur Axe.*

Die Bewegung geht nämlich in einer zu ersterer Bildebene parallelen Ebene vor sich, so dafs der Satz aus 1d und 4b folgt.

c) *Bei einer Drehung um eine Axe, welche parallel einer Bildebene ist, beschreibt die Projektion eines Punktes in dieser Bildebene eine Normale zur Projektion der Drehaxe.*

Es folgt dies aus a, da eine Normale von dem Punkt zur Drehaxe auch in der Projektion normal bleibt.

6. Zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke LM, deren Projektionen L_1M_1 und L_2M_2 gegeben sind, kann die Ebene LMM_1L_1 um MM_1 in parallele Lage zur Aufrifsebene gedreht werden, so dafs L_1 den Kreisbogen L_1L_1' bis zu der zur Axe Parallelen $M_1L'_1$ beschreibt, während L_2 parallel zur Axe nach L_2' gelangt; M_2L_2' ist die wahre Länge. Oder es kann dieselbe Ebene LMM_1L_1 um L_1M_1 in den Grundrifs aufgeklappt werden, wobei die Winkel an der Drehaxe rechte sind, und die Längen der Normalen λL_1 und μM_1 den Abständen von M_2 und L_2 bis zur Axe gleich sind.

Fig. 126.

In gleicher Weise könnte auch die Ebene LMM_2L_2 benutzt werden.

7. Aus 2a folgt:

Von zwei einander schneidenden Linien liegen die beiden Schnittpunkte der zusammengehörigen Projektionen in einer Normalen zur Axe.

Zur Bestimmung der wahren Gröfse des Winkels zweier Geraden BAC, deren Projektionen B_1A_1, B_2A_2 und A_1C_1, A_2C_2 (Fig. 127) gegeben sind, wird zunächst durch beide Gerade eine horizontale Gerade BC gezogen, von welcher die eine Projektion B_2C_2 parallel der Axe ist, die andere B_1C_1 nach dem eben genannten Satze erhalten wird. Um diese Horizontale BC wird das Dreieck BAC in eine parallele Lage zur Horizontalebene gedreht. Die Projektionen der Normalen

AL auf BC bleibt hierbei normal zu B_1C_1 (5c) und ihre wahre Länge $A_1'L_1$ kann nach 6 bestimmt werden. Alsdann ist $\sphericalangle B_1A_1'C_1 = BAC$ (1d).

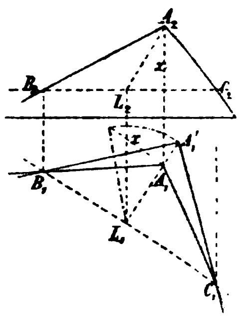


Fig. 127.

8. In Bezug auf die gegenseitige Lage der elementaren Gebilde Punkt, Gerade, Ebene folgt zunächst:

Der Durchgang einer Geraden, welche einer Ebene angehört, liegt auf der Spur dieser Ebene.

Durch zwei solche Durchgänge ist daher die Spur der Ebene bestimmt.

Ist von einer Geraden, welche der Ebene L_1MN_2 angehört, eine Projektion T_1S_1 gegeben, so findet man die andere, indem der Durchgang T_1 auf die Axe, der Axenpunkt S_1 auf die zweite Spur der Ebene nach S_2 projiciert wird; T_2S_2 ist die zweite Projektion.

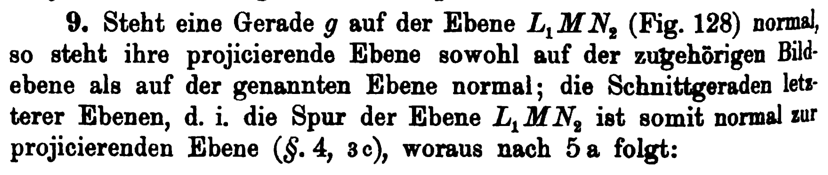
Fig. 128.

Sind von der Ebene nicht die Spuren, sondern nur (Fig. 129) die Projektionen zweier Geraden a_1a_2, b_1b_2 gegeben und werden a_1,b_1 von der Projektion der Geraden in T_1, S_1 geschnitten, so erhält man T_2, S_2 auf a_2 und b_2 durch Normale zur Axe. (7).

Ist von einem Punkt der Ebene die eine Projektion P_1 gegeben und die andere gesucht, so zieht man durch ihn die Gerade T_1S_1, konstruiert die zugehörige Projektion T_2S_2 und zieht von P_1 eine Axennormale welche T_2S_2 in der zweiten Projektion P_2 des Punktes trifft.

Die Normalebene zur Horizontalebene in T_1S_1 ist projicierende Ebene für alle Gerade, deren Horizontalprojektion T_1S_1 ist. Sind g_1 und g_2 die Projektionen einer solchen Geraden, so findet man den Schnittpunkt der Geraden und der Ebene, indem man, wie angegeben, die Schnittgerade T_2S_2 der Ebene mit der projicierenden Ebene der Geraden konstruiert und den Schnittpunkt P_2 dieser Geraden mit g_2 nach P_1 projiciert; P_1P_2 sind die Projektionen des fraglichen Schnittpunktes.

Fig. 129.



9. Steht eine Gerade g auf der Ebene L_1MN_2 (Fig. 128) normal, so steht ihre projicierende Ebene sowohl auf der zugehörigen Bildebene als auf der genannten Ebene normal; die Schnittgeraden letzterer Ebenen, d. i. die Spur der Ebene L_1MN_2 ist somit normal zur projicierenden Ebene (§. 4, 3c), woraus nach 5a folgt:

Von einer Geraden, welche normal zu einer Ebene ist, sind die Projektionen normal zu den zugehörigen Spuren der Ebene.

Der Abstand eines Punktes O von einer Ebene L_1MN_2 ist hiernach durch die in 8 und 6 gelösten Aufgaben zu bestimmen.

Der Winkel einer Geraden und Ebene wird gefunden, indem man durch einen Punkt der ersteren eine Normale zu der Ebene zieht und den Winkel beider Geraden nach 7 bestimmt; derselbe ist der Komplementwinkel des fraglichen Winkels.

10. Sind P_1R, RS_2 und P_1Q, QS_2 die Spuren zweier Ebenen, so sind P_1 und S_2 zwei Punkte der Schnittgeraden beider Ebenen. Indem man beide Punkte auf die Axe projiciert, erhält man die Projektionen dieser Schnittgeraden P_1S_1, P_2S_2.

Um den Winkel zweier Ebenen P_1RS_2 und P_1QS_2 zu erhalten, klappt man den Winkel zwischen der Schnittgeraden beider Ebenen und ihrem Grundrifs um letzteren in die Horizontalebene auf nach S_1 $P_1S'_2$; eine Normale B'_2C_1 zu $P_1S'_2$ bestimmt dann in ihre ursprüngliche Lage zurückgedreht mit der Normalen $A_1C_1D_1$ zu P_1S_1 eine Ebene, welche normal zur Schnittgeraden beider Ebenen ist und in welcher die Schenkel des betr. Ebenenwinkels liegen. Die Gröfse dieses Winkels A_1BD_1 ergiebt sich bei der Umklappung um A_1D_1, wobei B auf S_2P_1 zu liegen kommt (5c) und zwar in der Entfernung $C_1B'_1$ $= C_1B'_2$ von C_1; es ist $\sphericalangle A_1B'_1D_1$ der gesuchte Winkel.

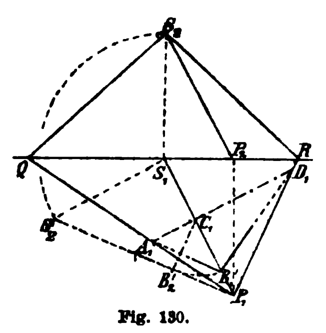


Fig. 130.

§. 45. Axonometrische Darstellung.

(Krystall-Abbildung.)

1. Wie schon in §. 25 angegeben wurde, wird die Lage der räumlichen Gebilde festgestellt in Bezug auf drei Strahlen eines Punktes OX, OY, OZ, die sog. Koordinatenaxen, welche meist zu einander normal angenommen werden. Mögen sie übrigens irgend welche Winkel mit einander bilden, so wird die Lage eines Punktes in Bezug auf sie durch die zu ihnen parallelen Strecken von dem Punkt bis zu den Ebenen der Axen bestimmt, d. h. durch die Koordinaten des Punktes. Werden sowohl die Axen OX, OY, OZ, als die Koordinaten der Punkte auf eine Ebene mittels Parallelstrahlen projiciert, so erhält man eine axonometrische Abbildung. Die Koordinaten stehen dann in dieser Projektion in konstantem Verhältnis mit den entsprechenden räumlichen Koordinaten (§. 44, 1c). Dieses Verhältnis

wird dadurch bestimmt, dafs man auf die Axen die Strecke 1 abträgt, $OX = OY = OZ = 1$ und deren Projektionen bestimmt.

Wir können nun aber auch von dem beliebigen ebenen Dreistrahl O_2X_2, O_2Y_2, O_2Z_2 ausgehend, diesen als das Bild jedes beliebigen räumlichen Axensystems $O\,(XYZ)$ betrachten, der Art dafs die Strecken O_2X_2, O_2Y_2, O_2Z_2 den Längeneinheiten OX, OY, OZ entsprechen; m. a. W:

Drei beliebige Strahlstrecken eines Dreistrahls in einer Ebene und drei beliebige Strahlstrecken eines Dreikants können stets so aufeinander bezogen werden, dafs erstere ähnlich sind einem parallelperspektivischen ebenen Bild der letzteren.

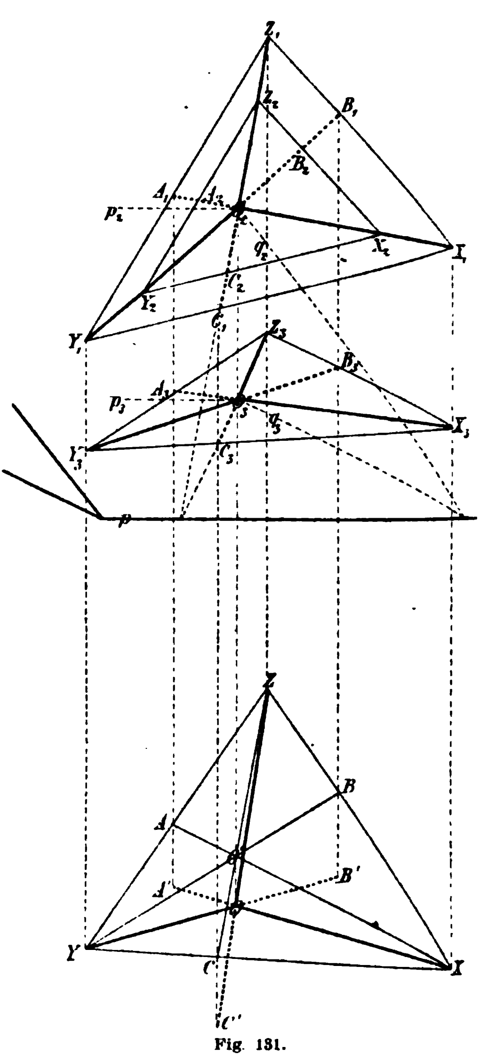


Fig. 131.

Dies wird auf folgende Weise erkannt. In dem Dreieck $X_2Y_2Z_2$ bestimmen die durch O_2 gelegten Ecktransversalen drei Punkte $A_2B_2C_2$, welche die Projektionen von je zwei Punkten auf den Kanten des Dreikants $O(XYZ)$ — statt der beigefügten Figur $OXYZ$ hat man sich die betr. räumliche Figur zu denken — vereinigen sollen, so z. B. C_2 die Projektion eines Punktes C von XY und eines Punktes C' von OZ. Diese Punkte ABC und $A'B'C'$ werden erhalten, indem man die Seiten von XYZ und die Strahlstrecken OX, OY, OZ in den durch die Figur $O_2X_2Y_2Z_2A_2B_2C_2$ bestimmten Verhältnissen teilt. Die Ecktransversalen XA, YB, ZC gehen dann ebenfalls durch einen Punkt O' (II. Teil §. 17, 1 und 2), der auf einem Strahl $OO' \parallel CC'$

liegt, da (s. II. Teil, Aufg. §. 9, 10): $\frac{O'Z}{ZC} = \frac{O_2 Z_2}{Z_2 C_2} = \frac{OZ}{ZC'}$. Diese Richtung $OO' \parallel CC'$ wird als die der projicierenden Strahlen angenommen und es sind ihr auch AA' und BB' parallel. Eine zu dieser Richtung normale Ebene ergebe die Normalprojektion $O_3 X_3 Y_3 Z_3 A_3 B_3 C_3$. Nun ist zu zeigen, dafs man den Dreistrahl O_2 $(A_2 B_2 C_2)$ stets so legen kann, dafs auch von ihm O_3 $(A_3 B_3 C_3)$ die Normalprojektion ist. Zu diesem Zweck konstruiere man zu beiden Dreistrahlen die einander entsprechenden Paare von Normalstrahlen (II. Teil, S. 67, Note) $p_2 \perp q_2$, $p_3 \perp q_3$. Von den spitzen Winkeln p_2 $(O_2 C_2)$ und $(O_2 C_2)$ q_2 mufs der eine kleiner, der andere gröfser als der ihm entsprechende Winkel des perspektivischen Dreistrahls O_3 sein, da ihre Summe jeweils gleich einem R ist. Es sei $\sphericalangle p_2 (O_2 C_2) > p_3 (O_3 C_3)$. Dann kann man die Ebene des Dreistrahls O_2 so legen, dafs O_2 auf den Strahl $OO'O_3$ kommt und $p_2 \parallel p_3$ wird, während der Strahl $O_2 C$ in die projicierende Ebene $O_3 C_3$ fällt (§. 6, 2 Zus. a). Dann aber liegen beide Dreistrahlen perspektivisch, da ihre Ebenen einander in einer Geraden $p \parallel p_2 \parallel p_3$ schneiden und auf dieser Axe auch die Schnittpunkte der paarweise in einer Ebene liegenden Geraden $O_2 C_2$, $O_3 C_3$ und q_2, q_3 liegen.

Stellt $X_1 Y_1 Z_1 O_2$ die Projektion von $XYZO$ auf die so bestimmte Ebene dar, so ist: $X_1 C_1 : C_1 Y_1 = XC : CY = X_2 C_2 : C_2 Y_2$, daher $X_2 C_2 Y_2 \parallel X_1 C_1 Y_1$ (II. Teil, Aufg. §. 2, 2), woraus folgt, dafs $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ p. ä. $O_2 X_1 Y_1 Z_1$.

2. Die drei Strahlstrecken eines Punktes $O_2 X_2$, $O_2 Y_2$, $O_2 Z_2$, welche die Projektionen der auf den drei Coordinatenaxen aufgetragenen Längeneinheiten darstellen, können einander gleich angenommen werden, so dafs jede der drei Coordinaten eines Punktes in demselben Verhältnis vergröfsert oder verkleinert abgebildet wird; in diesem Fall heifst die Projektion i s o m e t r i s c h. Werden nur zwei der drei Strahlstrecken gleich genommen, so heifst sie m o n o d i m e t r i s c h, und wenn alle ungleich a n i s o m e t r i s c h. Dabei können auch die Winkel der drei Axen einander gleich sein $= 120^0$. Man wählt die Winkel und die Verhältnisse der Axen so, dafs die darzustellenden Körper ihre Formen möglichst klar zeigen.

3. Es wird diese Darstellungsart besonders in der Krystallographie angewendet. Die Flächen der Krystalle werden hierbei bestimmt durch die Strahlstrecken, welche sie auf den Axen begrenzen. Man konstruiert mit Hilfe dieser Grenzpunkte die Schnittgeraden der Flächen mit den Axenebenen und erhält mittels der Schnittpunkte dieser Schnittgeraden Punkte der Kanten des betr. Körpers.

Soll z. B. jede Fläche des Körpers auf den drei zu einander normalen Axen Abschnitte bilden, welche sich verhalten wie $1 : 2 : \infty$,

und stellen OX, OY, OZ die Längeneinheiten auf den Axen dar, so trägt man noch $OX_1 = 2\,OX$, $OY_1 = 2\,OY$, $OZ_1 = 2\,OZ$ ab. Die Verbindungsgeraden XZ_1 und ZX_1 sind die Schnittgeraden der Axenebene XOZ mit zwei Ebenen, welche parallel OY sind und daher sich in einer Kante $P_1E_1 \parallel OY$ schneiden. In gleicher Weise erhält man die Kanten P_2E_1 und P_3E_1, welche die erstere in einem Punkt E_1 schneiden. Von diesem Punkt gehen noch die Kanten nach den Punkten X, Y, Z, so dafs in E_1 ein Sechskant entsteht. Werden in gleicher Weise die Gegenrichtungen zu OX, OY, OZ benützt, so erhält man das Bild für den sog. Pyramidenwürfel oder das Tetrakishexaëder.

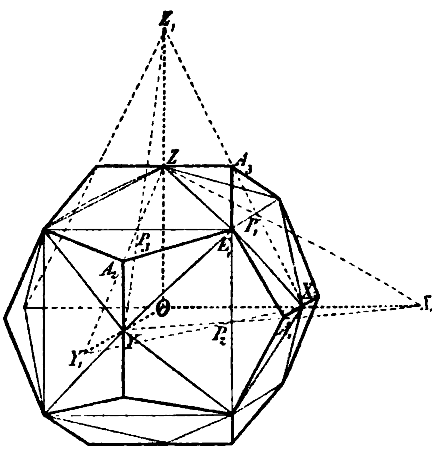


Fig. 132.

Denken wir uns von den Ebenen dieses Körpers nur die Hälfte vorhanden und zwar je zwei nicht an einer Kante desselben zusammenstofsende Flächen, wie XP_1E_1, YP_2E_1 und ZP_3E_1, so entsteht an E_1 ein Dreikant. Bei X, Y, Z schneiden die betr. Ebenen die mit ihnen in Bezug auf die Axenebene symmetrischen Ebenen in drei Parallelen zu den Axen $XA_1 \parallel OY$, $YA_2 \parallel OZ$, $ZA_3 \parallel OX$, welche jeweils durch die Verbindungsgeraden X_1Y, Y_1Z, Z_1X begrenzt werden; E_1A_1, E_1A_2, E_1A_3 sind die Kanten des Dreikants. Man erhält so als hemiedrischen Körper des Tetrakishexaëders das Pentagondodekaëder.

§. 46. Abbildung der Kugeloberfläche.

(Kartenprojektionen.)

1. Von den Rotationsflächen Kegel-, Cylinder- und Kugelfläche lassen sich nur die beiden ersteren in die Ebene aufrollen, und es läfst sich somit ein ebenes Bild irgend welcher auf ihnen gezeichneten Figuren erhalten. Die Abbildung der Figuren einer Kugelfläche aber ist besonders von Wichtigkeit wegen ihrer Anwendung zur Darstellung der Erdoberfläche oder des Fixsternhimmels. Es werden bei den hierzu dienenden sog. Kartenprojektionen zuerst die Meridiane und Parallelkreise nach bestimmten Gesetzen gezeichnet und im Anschlufs an diese dann die einzelnen Örter eingetragen. Wir geben im Folgenden die gebräuchlichsten Projektionsarten.

Die Bildebene können wir uns stets als Berührungsebene der Kugel vorstellen, da die Bilder auf parallelen Ebenen ähnlich sind. Jenachdem der Berührungspunkt der Bildebene, der den Mittelpunkt der Karte bilden soll, im Pol, im Äquator oder irgend einem andern Punkt liegt, unterscheidet man Polar-, Äquatorial- oder Horizontal-Projektion.

2. Die orthographische Projektion ist die Darstellung der Kugel durch Normalprojektion auf eine Ebene. Am einfachsten ist die orthographische Polarprojektion darzustellen, da die Parallelkreise als koncentrische Kreise, die Meridiane als Durchmesser abgebildet werden. Man entwirft Polar- und Äquatorialprojektion zugleich als Grund- und Aufriſs, entnimmt die Radien der Parallelkreise des Grundrisses aus dem Aufriſs und überträgt die Schnittpunkte der Parallelkreise und Meridiane aus dem Grundriſs in den Aufriſs. Um irgend eine Horizontalprojektion hieraus zu erhalten, denkt man die so dargestellte Kugel um eine zur Verticalebene normale Axe gedreht, wobei der Aufriſs seine Lage, nicht aber seine Gestalt ändert und im Grundriſs alle Punkte ihre Entfernung von der Projektionsaxe beibehalten (§. 44, 5b).

3. Die Centralprojektionen einer Kugel lassen sich nach der Lage des Centrums der Projektion einteilen in solche, bei welchen das Centrum im Kugelmittelpunkt liegt oder auf der Kugeloberfläche oder in einem beliebigen andern Punkt. Liegt das Centrum im Mittelpunkt der Kugel (centrale, gnomonische Projektion), so werden die Bögen aller Hauptkreise als Strecken (kürzeste Abstände) projiciert. Mit zunehmender Entfernung vom Mittelpunkt der Karte (dem Fuſspunkt der Normalen vom Centrum zur Bildebene) werden gleiche Bögen mehr und mehr wachsend dargestellt, und die Punkte, die um $^1/_4$ des Kreises von jenem entfernt sind, fallen in unendliche Entfernung. Die Erdoberfläche wird hierbei meist auf die Flächen eines regelmäſsigen Körpers, welcher der Kugel umbeschrieben ist, abgebildet.

4. Bei der stereographischen Projektion wird ein Punkt C der Kugeloberfläche als Centrum der Projektion und die Tangentialebene im diametralen Punkt M (oder irgend eine mit ihr parallele Ebene) wird als Bildebene angenommen. Es sei APB irgend ein Kreis der Kugel und A_1B_1 seine Projektion auf die in M berühende Ebene. Wird nun durch CM die Ebene CAB normal zur Ebene APB gelegt, so ist die erstere Ebene der Hauptaxenschnitt des projicierenden Kegels; (§. 7, 4c)

Fig. 138.

und normal zur Bildebene (§. 4, 3a), zugleich ist $\sphericalangle CAB = CB_1A_1$, da letzterer Winkel gleich dem Winkel von CB mit der Tangentialebene in C. Es ist somit die Bildebene A_1B_1 antiparallel zur Ebene des Kreises AB, also auch das Bild A_1B_1 ein Kreis (§. 18, 5). — Schneiden einander die Tangenten eines Punktes P und seiner Projektion P_1 in Q, so ist (nach §. 35, 2b) $PQ = P_1Q$. Wird der Kreis AB in P von einem zweiten Kreis geschnitten, so gilt ebenso für die Tangenten desselben $PL = P_1L$, wenn L deren Schnittpunkt ist. Da aufserdem $QL = QL$, so folgt, dafs $\sphericalangle QPL = QP_1L$. Somit ist erwiesen:

a) *In der stereographischen Projektion wird jeder Kreis wiederum als Kreis (oder als Gerade) abgebildet.*

b) *Der Schnittwinkel zweier Kreise bleibt in dieser Projektion unverändert.*

Hieraus folgt, dafs die kleinsten Teile der Abbildung ähnlich den entsprechenden Teilen des Originals sind. Abbildungen, welche diese Eigenschaft haben, nennt man **konforme** oder **isogonale**.

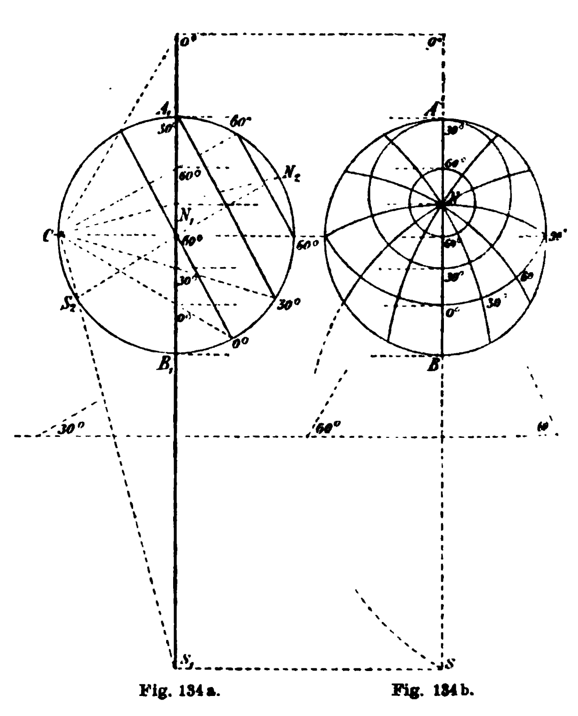


Fig. 134a. Fig. 134b.

In Fig. 134b ist die stereographische Horizontalprojektion für einen Punkt von 60° Breite entworfen. Fig. 134a stellt zunächst zu diesem Zweck die Normalprojektion der abzubildenden Halbkugel auf eine zur Bildebene der zweiten Figur normale Ebene dar. Das Centrum ist C, und letztere Bildebene erscheint als Gerade A_1B_1 verkürzt; sie ist parallel zur Tangentialebene in C durch den Mittelpunkt der Kugel gelegt. Der Meridian $A_1N_2B_1$ wird als Durchmesser ANB projiciert; seine Schnittpunkte mit den Parallelkreisen 0°, 30°, 60° werden erhalten, indem die betreffenden Punkte in Fig. 134a

zunächst von C auf $A_1 B_1$ projiciert werden und dann durch Normale zu $A_1 B_1$ auf AB; man erhält so von jedem Parallelkreis den Durchmesser auf AB. Sollte ein Grenzpunkt eines solchen Durchmessers zu weit hinausfallen, so projiciert man den Schnittpunkt von $A_1 B_1$ mit dem in Fig. 134a als Gerade dargestellten Parallelkreis auf den Umfang des Kreises AB in Fig. 134b und erhält so einen, bezw. 2 Punkte des Kreises. Die beiden Pole $N_2 S_2$ werden nach $N_1 S_1$ und von da nach NS projiciert. An diese Sehne NS trägt man als Berührungswinkel 30^0, 60^0, 90^0 an; die zugehörigen Kreisbögen sind die Meridiane.

5. Andere, nicht perspektivische Kartenprojektionen erhält man, indem man das Bild zunächst auf einer Kegel- oder Cylinderfläche dargestellt und diese dann in die Ebene aufgerollt denkt. Der Kegel wird entweder als die Kugel berührend in dem die Mitte der Karte einnehmenden Parallelkreis oder als die Kugel in 2 Parallelkreisen schneidend angenommen. Diese Kreise, sowie der mittlere Meridian der Karte werden durch die Schnitte ihrer Ebenen mit dem Kegel dargestellt; für die übrigen Parallelkreise ergeben sich koncentrische Kreise, deren Abstände den Bögen des mittleren Meridians entsprechen. Die Meridiane werden als Seitengerade des Kegels durch die Grenzpunkte der entsprechenden Bögen der erstgenannten Parallelkreise abgebildet oder als Kurven durch die Grenzpunkte der auf allen Parallelkreisen bestimmten Bögen.

Tritt an die Stelle des Parallelkreises der Äquator, so ist die zugehörige abwickelbare Fläche ein Cylinder. Meridiane und Parallelkreise bilden dann ein aus Rechtecken bestehendes Netz. Da die Meridiane gegen die Pole zusammenlaufen sollen, hier aber als Parallele abgebildet werden, so wächst das Verhältnis der abgebildeten Bögen der Parallelkreise zu den entsprechenden wahren Bögen mehr und mehr mit zunehmender Breite. Werden die Abstände der Parallelkreise, d. i. die Bögen der Meridiane in demselben Mafse vergröfsert, so erhält man Mercator's Projektion*); die Teile der Karte wachsen gegen die Pole hin bis ins Unendliche, sind also für diese Punkte selbst nicht ausführbar. In dieser Projektion zeigt sich hiernach eine von 2 benachbarten Parallelkreisen und 2 solchen Meridianen begrenzte Fläche als ein Rechteck, dessen Seitenverhältnisse um so mehr mit den wirklichen Verhältnissen übereinstimmen, je kleiner die Fläche ist. Es ist somit diese Projektion eine konforme oder isogonale.

---

*) Diese Projektionsart wurde ausgedacht und zuerst (1569) bei der Zeichnung einer Weltkarte benützt von dem deutschen Geographen Gerhard Kremer, genannt Mercator, aus Duisburg (1512—1594).

Da eine Gerade in dieser Projektion alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet, so gilt dies auch für die ihr entsprechende Linie auf der Kugel, die Loxodrome, (welche ein Schiff durchläuft, das seinen Kurs immer nach einerlei Himmelsrichtung einhält). Auf dem Cylinder, dessen Abwickelung die Karte ergiebt, ist sie eine Schraubenlinie; auf der Kugel entspricht ihr demnach eine Kurve, welche sich dem Pol in unendlich vielen Windungen nähert, ohne ihn zu erreichen.

Äquivalente Abbildungen geben die Flächenteile der Kugel in dem der Wirklichkeit entsprechenden Verhältnis (homalographische Projektion).

§. 47. Der Gesichtspunkt zu einem perspektivischen Bild.

1. Wenn der Zweck einer Abbildung körperlicher Gestalten auf eine Ebene der ist, auf unser Auge thunlichst denselben Eindruck zu machen wie erstere selbst, so wird ein perspektivisches Bild der Art entworfen, wie es sich ergiebt, wenn ein Auge das Centrum der Projektion ist und die Bildfläche vertikal zwischen Auge und Gegenstand liegt. Das Centrum wird der Gesichtspunkt genannt und der Fufspunkt der Normale von ihm auf die Bildebene der Hauptpunkt.

Für die Projektionen von Geraden und von ebenen Figuren überhaupt gelten hier natürlich die im III. Abschnitt gegebenen Sätze. Aber auch für Gerade, welche nicht einer einzigen Ebene angehören, ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

a) *Parallele zur Bildebene werden wiederum als Parallele projiciert.*

b) *Die Bilder paralleler Geraden, die nicht parallel der Bildebene sind, laufen in einem Punkt, in der Projektion des unendlich fernen Punktes oder in dem Fluchtpunkte, zusammen, welcher auf dem zu den Geraden parallelen Strahl des Gesichtspunktes liegt.*

c) *Von allen Geraden paralleler Ebenen liegen die Fluchtpunkte auf einer einzigen Geraden, der Fluchtgeraden dieser Ebenen; es ist dies die Schnittgerade der zu den Ebenen parallelen Ebene durch den Gesichtspunkt.*

d) *Der Hauptpunkt ist der Fluchtpunkt aller Normalen zur Bildfläche; die Horizontale durch ihn enthält die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden.*

Diese Gerade heifst der Horizont des Bildes.

2. Wir wollen hier nicht die Methoden behandeln, perspektivische Bilder zu entwerfen, sondern nur die Aufgabe wie zu einem schon vorhandenen perspektivischen Bilde der Gesichtspunkt zu finden ist, von welchem aus man das Bild betrachten mufs, damit es den dargestellten Gegenständen am besten entspricht.

Sind auf dem Bild **zwei parallele horizontale Gerade** dargestellt, so verlängert man die Projektionen dieser Geraden bis zu ihrem Schnittpunkt und zieht durch diesen eine Horizontale. Der Gesichtspunkt liegt dann in der Horizontalebene dieser Horizontalen.

3. Ist in der Zeichnung ein **horizontales Quadrat oder Rechteck dargestellt, von welchem eine Seite parallel der Bildfläche ist** — was man daraus erkennt, dafs auch ihre Abbildung horizontal ist —, so stellen die an dieser liegenden Seiten Normale zur Bildebene dar; sie schneiden einander im Hauptpunkt. Der Gesichtspunkt liegt auf der in diesem Punkt normal zur Bildebene errichteten Geraden.

Liegt zunächst die Darstellung eines Quadrates vor, so trifft die Diagonale in dem Bild den durch den Hauptpunkt gelegten Horizont in einem Punkt (**Distanzpunkt**), dessen Abstand vom Hauptpunkt zugleich den Abstand des Gesichtspunktes von letzterem giebt, da die Diagonale unter einem Winkel von 45^0 gegen die Bildebene geneigt ist.

Für den Fall, dafs statt des Quadrats ein Rechteck dargestellt ist, dessen Seitenverhältnis $a:b$ aus der Zeichnung erkennbar ist (z. B. bei einer Säulenhalle aus der Zahl der Säulen in beiden Richtungen, bei einem Hause an der Zahl der Fenster), so verhält sich auch die Strecke zwischen dem Fluchtpunkt der Diagonale (auf dem Horizont) und dem Hauptpunkt zum Abstand des Gesichtspunktes von letzterem wie $a:b$.

4. Ist ein **horizontales Quadrat oder Rechteck ohne eine zur Bildfläche parallele Seite dargestellt**, so liegt der Gesichtspunkt jedenfalls in dem Halbkreis, welcher um die Strecke zwischen beiden Fluchtpunkten der Seiten als Durchmesser in der Horizontalebene dieser Strecke gelegt wird; denn die Strahlen von dem Gesichtspunkt nach den Fluchtpunkten müssen, als Parallele zu den Seiten des Quadrats oder Rechtecks, einen R mit einander bilden.

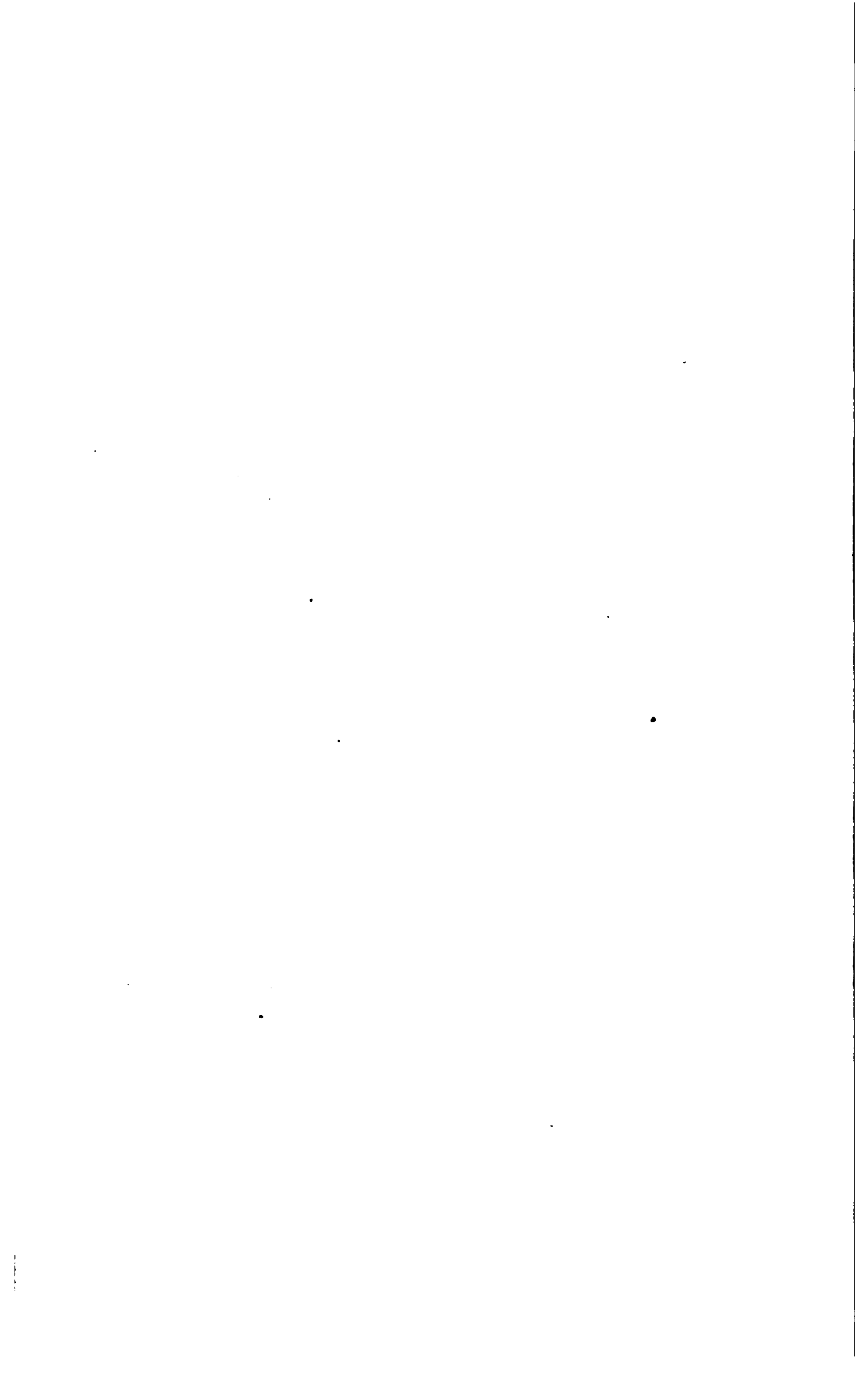
Liegt zunächst das Bild eines Quadrates vor, so mufs dieser R von der Geraden nach dem Fluchtpunkt einer Diagonale halbiert werden. Verbindet man daher die Mitte des Halbkreises, welcher zu dem genannten Halbkreis symmetrisch ist in Bezug auf die Bildebene als S.-E., mit dem Fluchtpunkt der Diagonale, so schneidet diese Verbindungsgerade den Kreis im Gesichtspunkt.

Ist dagegen das Bild eines Rechtecks gegeben, dessen Seitenverhältnis man kennt, so ist statt der Mitte des Halbkreises hinter der Bildfläche der Grenzpunkt des Bogens zu bestimmen, welcher dem Winkel der Diagonale mit irgend einer der Seiten entspricht.

Man trägt diesen Winkel am Fluchtpunkt der andern Seite an dem Horizont in den Halbkreis und erhält auf diesem durch den zweiten Schenkel des Winkels den Punkt, welcher mit dem Fluchtpunkt der Diagonale und dem Gesichtspunkt auf einer Geraden liegt.

Diese Konstruktionen werden am besten in der Bildebene selbst ausgeführt, indem man sich die durch den Horizont gelegte Horizontalebene in die Bildebene umgeklappt denkt.

Übungsaufgaben.



Aufgaben zum ersten Kapitel.

§. 1.

1. Es seien 3, 4, ... n getrennte Punkte gegeben, von welchen keine drei in eine Gerade fallen. Wie viele Gerade und Strecken sind dadurch bestimmt? — Unter welcher Bedingung geben 3, 4, .. n Gerade (Ebenen) ebensoviele Schnittpunkte (bezw. Schnittgerade)? §§. 1. 2.

2. a) Wenn unter den n Stücken in voriger Aufgabe deren x in einer Geraden liegen (bezw. durch einen Punkt gehen, bezw. eine Gerade gemeinsam haben), wie ändert sich die vorige Lösung?

b) Wenn aber nicht nur x, sondern auch noch je $y, z, v, ..$ der angegebenen Bedingung genügen, wie viele gemeinsame Elemente finden sich dann?

c) Was folgt, wenn $x = y = z = v = \ldots = 2$ ist?

3. Welche Elemente bestimmen die Lage einer Ebene?

4. a) Durch 3, 4, ... n getrennte Punkte, von welchen keine vier in einer Ebene liegen, sind wie viele Ebenen bestimmt?

b) Beweise, dafs durch n getrennte Ebenen, von welchen keine zwei parallel sind und keine vier durch denselben Punkt gehen, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Schnittpunkte bestimmt sind.

5. Man soll je das duale Gegenstück der folgenden Figuren angeben:

a) Eine Ebene, drei Punkte in ihr, deren Verbindungsgeraden.

b) Zwei Ebenen α und β, eine sie schneidende Ebene ε, der Schnittpunkt der drei Ebenen.

c) Die Verbindungsgeraden eines Punktes X mit drei anderen Punkten A, B, C.

d) Beliebig viele (getrennte oder stetig auf einander folgende) Punkte, von welchen keine drei auf einer Geraden und keine vier in einer Ebene liegen; die Verbindungsgeraden je zweier auf einander folgenden Punkte.

e) Strahlen einer Ebene, welche durch einen Punkt gehen.

f) Ein Ebenenbüschel und eine ihn schneidende Ebene; Schnittfigur?

Bemerkung. In den folgenden stereometrischen Konstruktionen ist das Legen einer Ebene durch die sie bestimmenden Elemente ebenso zu benutzen, wie in der Planimetrie das Ziehen von Geraden.

6. Man soll durch einen Punkt eine Gerade legen, welche mit einer gegebenen Geraden a) einen gegebenen Winkel bildet, b) parallel ist.

7. Man soll durch einen Punkt aufser einer Ebene eine zu letzterer parallele Gerade konstruieren. Wie viele Lösungen?

8. Durch a) einen Punkt, b) eine Gerade soll eine Ebene parallel zu einer gegebenen Geraden konstruirt werden.

9. Sind Gerade, die einer Ebene parallel sind, einander parallel?

10. Man bestimme den geometrischen Ort der durch einen Punkt gehenden und a) zu einer Ebene parallelen Geraden, b) zu einer Geraden parallelen Ebene.

11. Gegeben seien zwei windschiefe Gerade g_1 und g_2. Man soll konstruieren:

a) durch g_1 eine mit g_2 parallele Gerade;

b) durch g_1 die mit g_2 parallele Ebene;

c) durch einen gegebenen Punkt die zu g_1 und g_2 parallele Ebene.

d) durch einen gegebenen Punkt die g_1 und g_2 schneidende Gerade;

e) eine g_1 und g_2 schneidende Gerade, welche einer gegebenen Geraden l parallel ist;

f) eine g_1 und g_2 schneidende Gerade, welche einer gegebenen Ebene λ parallel ist.

12. Wenn man durch jede von zwei windschiefen Geraden a und b die zur anderen parallele Ebene α bezw. β legt, so ist $\alpha \parallel \beta$; Beweis?

13. Man soll eine Gerade angeben, welche drei windschiefe Gerade schneidet.

14. Es soll der geometrische Ort des Punktes angegeben werden, von welchem aus die parallel einer gegebenen Geraden nach einer Ebene gezogenen Strecken einander gleich sind.

15. Drei parallele Ebenen schneiden aus zwei Geraden proportionale Strecken aus.

16. Wenn eine Gerade einer Ebene parallel ist, so liegt eine Gerade, die durch einen Punkt der Ebene parallel zu ersterer gezogen wird, ganz in der Ebene.

17. Wenn zwei Ebenen einer Geraden parallel sind, so ist ihre Schnittgerade ebenfalls parallel der Geraden.

18. Man soll von einem windschiefen Viereck, d. i. von einem solchen, dessen Ecken nicht in derselben Ebene liegen, die folgenden Sätze beweisen:

a) Die Mitten der vier Seiten liegen in einer Ebene und bestimmen ein Parallelogramm.

b) Die Verbindungsgeraden der Mitten der Gegenseiten und der Diagonalen gehen durch einen Punkt und halbieren einander in demselben.

c) Zwei Gegenseiten eines einbeschriebenen ebenen Vierecks schneiden einander auf einer Diagonale des windschiefen.

19. Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie von drei nicht in einer Ebene liegenden parallelen Geraden gleiche Stücke ausschneiden.

Aufgaben zum zweiten Kapitel.

§. 2.

1. Man soll durch einen Punkt, welcher a) auf, b) aufser einer Geraden liegt, die zur Geraden normale Ebene konstruieren. §. 3 u. 4.

2. Man soll durch einen in einer Ebene α liegenden Punkt P eine zur Ebene normale a) Ebene, b) Gerade konstruieren. — Andeutung: a) Ziehe durch P in α eine beliebige Gerade und wende dann §. 4, 3b u. 1b an. b) Wende zuvor a) an.

3. Dieselben Aufgaben wie 2, wenn P aufserhalb α liegt. — Andeutung: a) Fälle die Normale von P auf eine Gerade a in α. b) Löse zuerst a).

4. Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen ist normal zu ihrer Axe. — Umkehrung?

5. Rotiert ein rechter Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene.

6. Ein Ebenenwinkel soll in 2, 4, 8, ... 2^n gleiche Teile geteilt werden.

7. Wenn durch einen Punkt aufserhalb zweier beliebiger Ebenen zu letzteren normale Strahlen gezogen sind, welche Lage hat die Ebene des Zweistrahls in Bezug auf die beiden gegebenen Ebenen und deren Schnittgerade?

8. Durch a) eine gegebene Gerade, b) einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche mit einer gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel bildet.

9. Zwei axialsymmetrische Ebenen schneiden einander in einer Axennormale oder sind untereinander und mit der Axe parallel.

10. Der Winkel zweier axialsymmetrischen Ebenen wird durch die Ebene der Schnittgeraden und Axe halbiert.

11. Die Ebenen von einem Axenpunkt nach axialsymmetrischen Geraden sind axialsymmetrisch.

12. Zwei axialsymmetrische Ebenen werden von einer Normalebene der Axe in zwei parallelen axialsymmetrischen Geraden geschnitten.

13. Zwei parallele Ebenen sind axialsymmetrisch zu irgend einer Geraden der Mittelparallelebene.

14. Zwei Ebenen sind axialsymmetrisch in Bezug auf jede Gerade ihrer winkelhalbierenden Ebene, welche zu der Schnittgeraden normal ist.

§. 5. **15.** Welche verschiedene Arten der Lage können drei a) Gerade, b) Ebenen haben?

16. Können zwei windschiefe Gerade zu ein und derselben a) Ebene b) Geraden normal sein?

17. Von vier paarweise parallelen Ebenen sind die Schnittgeraden parallel. — Die Ebenen sind paarweise axialsymmetrisch zur Mittelparallelen der gegenüberliegenden Schnittgeraden.

§. 6, 1. **18.** Alle Normalstrecken, welche von Punkten einer Geraden aus auf eine zu ihr parallele Ebene gefällt werden, sind gleichgrofs.

19. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von einer Ebene eine gegebene Entfernung hat?

20. Man soll den geometrischen Ort des Punktes angeben, welcher von zwei a) parallelen, b) nicht parallelen Ebenen α) den gleichen, β) je gegebenen Abstand, γ) gegebenes Verhältnis der Abstände hat.

21. Wie weit ist ein Punkt P von einer Ebene α entfernt, wenn seine Entfernung von einem Punkte A der Ebene $= a$ und wenn die Entfernung $AF = r$ bekannt ist, wobei F die Projektion von P auf α ist? — Beispiele: $a = 5$, $r = 3$; $a = 42{,}7$, $r = 7{,}7$.

22. Die Abstände zweier Punkte A und B von einer Ebene seien bezw. a und b, der Abstand ihrer Projektionen auf der Ebene sei c. Wie grofs ist AB? — Beispiele: $a = 17$, $b = 28$, $c = 60$; $a = 87$, $b = 15$, $c = 65$; $a = 1{,}3$, $b = 4\frac{3}{4}$, $c = 1{,}52$.

23. Wie weit ist ein Punkt von der Ebene eines regelmäfsigen Dreiecks (Vierecks) entfernt, wenn sein Abstand von jedem Eck desselben gleich der Seite ($= a$) ist?

24. Im Mittelpunkt eines regelmäfsigen Dreiecks (Vierecks), dessen Seite $= a$, sei die zu dessen Ebene normale Strecke $= a$ gezogen. Wie weit ist der Endpunkt der Strecke von den Ecken entfernt?

25. Ein Dreieck habe die Seiten 104, 112, 120. Wie weit ist ein Punkt von seiner Ebene entfernt, wenn sein Abstand von jedem Eck 169 beträgt? — Antw. $= 156$.

26. Es soll in einer Ebene a) durch einen ihrer Punkte, b) paral-

lel einer Geraden eine Gerade x so gezogen werden, dafs sie von α) einem Punkte aufser der Ebene den gegebenen Abstand r, β) zwei Punkten aufser der Ebene bezw. die gegebenen Abstände r und s hat.

27. Man soll eine Ebene konstruieren, welche:

a) durch eine Gerade geht und von einem gegebenen Punkt gegebenen Abstand hat;

b) durch einen Punkt geht und von einer gegebenen Geraden gegebenen Abstand hat;

c) durch einen Punkt geht und von drei gegebenen nicht auf einer Geraden liegenden Punkten gleichweit absteht.

28. Wird durch den Mittelpunkt eines Kreises eine zu seiner Ebene schiefe Gerade gelegt, so hat ein beliebiger Punkt der Geraden von den Kreispunkten verschieden grofse Entfernungen. Von welchem Punkte ist diese Entfernung ein Maximum, ein Minimum; von welchen beiden Punkten ist die Entfernung je die gleiche?

29. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von drei durch einen Punkt gehenden Ebenen gleichweit entfernt ist?

30. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte, welche auf verschiedenen Seiten einer Ebene und gleichweit von derselben entfernt liegen, wird durch die Ebene halbiert.

31. Sind zwei Ebenen normal zu je einer von zwei windschiefen Geraden, so ist ihre Schnittgerade parallel zur kürzesten Entfernung beider Windschiefen.

32. Man soll in einer gegebenen Ebene einen Punkt finden, welcher von zwei gegebenen Punkten oder Ebenen je gegebene Entfernungen hat.

33. Durch einen Punkt soll eine Ebene konstruiert werden, welche mit einer Geraden einen gegebenen Neigungswinkel hat. §. 6, 2.

34. Durch einen Punkt, welcher a) in, b) aufser einer Ebene liegt, soll eine Gerade gezogen werden, so dafs der Neigungswinkel eine gegebene Gröfse hat.

35. Die Projektion eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel der Projektionsebene parallel ist, ist wieder ein Rechter.

36. Wird durch die Halbierungsgerade eines Winkels (oder seines Nebenwinkels) eine Ebene gelegt, so haben gegen diese die Schenkel des Winkels gleiche Neigung, und ihre Projektionen auf die Ebene bilden mit jener Halbierungsgeraden gleiche Winkel.

37. Die Halbierungsgerade eines Winkels projiciert sich auf eine Ebene, welche zu ihr (oder zur Halbierungsgeraden des Nebenwinkels) parallel ist, als Halbierende der Projektion des Winkels.

38. Durch den einen Schenkel eines Winkels soll man eine Ebene legen, welche mit dem anderen Schenkel einen gegebenen Winkel bildet.

39. Durch eine Gerade soll man eine Ebene legen, welche mit einer anderen gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

§. 6, 3. **40.** Wenn die von zwei Punkten A und B aus nach einer Ebene unter gleichen Neigungswinkeln gezogenen Strecken gleich sind, was läfst sich von A und B behaupten? — Umkehrungen?

41. Wie weit steht eine Ebene von einem Punkte ab, wenn eine von letzterem aus zur Ebene gezogene schiefe Strecke die Länge a hat und den Neigungswinkel von 30^0 (60^0, 45^0) bildet?

42. Wenn in Fig. 14 FB die Normalprojektion von FA ist und wenn $BFA = 45^0$ (30^0) und $\sphericalangle BFX = 45^0$ (bezw. 60^0) ist, welche Gröfse hat $\sphericalangle AFX$?

43. Eine Wegstrecke von 2 Km Länge sei gegen die Horizontalebene um $2^0\,20'$ geneigt; wie grofs ist ihre Projektion auf letztere?

44. Welchen Winkel bildet die Gerade AB in No. 22 mit der Ebene?

45. Ein Weg bestehe aus drei Strecken AB, BC, CD, welche das Gröfsenverhältnis $2:1:3$ haben und gegen die Horizontalebene bezw. um $5^0\,26'$, $3^0\,40'$, $173\frac{1}{2}^0$ geneigt sind; die gesamte Normalprojektion auf die genannte Ebene betrage 6 Km 783 m. Wie lang sind die einzelnen Strecken?

46. Ein Punkt P und aufser ihm eine Ebene ε seien gegeben. Man soll durch P nach ε eine Strecke von a) bekannter Länge l, b) bekanntem Neigungswinkel λ ziehen, welche einer zugleich gegebenen Ebene ε' parallel ist.

47. Man soll zwischen eine Gerade und eine Ebene eine gegebene Strecke so eintragen, dafs sie parallel einer gegebenen Ebene wird und mit der gegebenen a) Ebene, b) Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

48. a) Die Projektion eines der Projektionsebene parallelen Kreises ist ein kongruenter Kreis.

b) Die Projektionen aller Durchmesser eines Kreises werden durch die Projektion des Mittelpunktes halbiert. Welcher Durchmesser hat die gröfste Projektion? welcher die kleinste? welche haben gleiche Projektionen?

49. a) Wenn eine Strecke s zwei windschiefe Gerade a und b unter gleichen Winkeln schneidet, so liegen die Schnittpunkte gleichweit entfernt von den Fufspunkten der kürzesten Entfernung beider Geraden. Beweis? — Andeutung: Lege durch a die Ebene $\alpha \parallel b$ und ziehe in α durch Punkt (as) die Parallele zu b.

b) Man soll zwischen zwei windschiefe Gerade a und b eine gegebene Strecke s so eintragen, dafs sie mit a und b gleiche Winkel bildet. — Andeutung: Benütze Satz a.)

50. Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks δ liege in einer Ebene ε und die Neigungswinkel seiner Katheten gegen ε seien α und β. Wie grofs ist $\sphericalangle(\delta\varepsilon)$? — Beispiel: $\alpha = 20^0$, $\beta = 25^0$.

51. Zwischen zwei parallelen Ebenen im Abstand a seien zwei schiefe Strecken gezogen, deren Längen das Verhältnis $= 1 : 1\frac{2}{3}$ und deren Neigungswinkel mit einer der Ebenen das Verhältnis $= \frac{1}{2} : 1$ haben. Welche Länge haben beide Strecken? — Beispiel: $a = \frac{5}{6}\sqrt{11}$.

52. Ein ebener bergangehender Weinberg zeige in einem Plan die Gröfse von 22 a 8 qm; sein Neigungswinkel gegen die Horizontalebene ist $= 14^0\,50'$. Welches ist seine wirkliche (nutzbringende?) Fläche?

§. 3.

NB. In diesem §. sind unter „Kegel" und „Cylinder" nur „Rotationskegelfläche" bezw. „Rotationscylinderfläche" zu verstehen.

1. Ein Kegel sei bestimmt a) durch seinen Axenschnittwinkel, b) durch einen Leitkreis und den Abstand seiner Spitze von dessen Ebene. Man soll einen Kreisschnitt des Kegels angeben, dessen Radius bestimmte Gröfse hat. §. 7, 2.

2. In einem Kegel, für welchen das Verhältnis v von Leitkreisradius und Abstand des Leitkreises von der Spitze gegeben ist, soll der Winkel zwischen Leitgerade und Leitkreis berechnet werden. Beispiel: $v = 0{,}6$.

3. Was entsteht bei Rotation eines Antiparallelogramms um seine Symmetrie-Axe?

4. Welches ist der geometrische Ort eines Punktes, der von einer Geraden eine gegebene Entfernung hat? §. 7, 3.

5. Welches ist der geometrische Ort der Schnittgeraden zweier Ebenen, welche durch zwei feste parallele Gerade gehen und einen gegebenen Winkel mit einander bilden?

6. In wiefern kann eine Gerade oder eine Ebene a) als Cylinderfläche, b) als Kegelfläche aufgefafst werden?

7. Man soll an eine gegebene Kegel- oder Cylinderfläche eine berührende Ebene legen, welche a) durch einen auf der Fläche gegebenen Punkt geht; b) durch einen aufserhalb gegebenen Punkt geht, c) parallel einer gegebenen Geraden ist.

8. Welches ist der geometrische Ort der Ebene, d. h. welche Fläche wird von jeder Ebene berührt, welche a) durch die Spitze eines Kegels geht und diesen in einem Zweistrahl von gegebenem Winkel schneidet? b) parallel der Axe eines Cylinders ist und diesen in zwei Geraden von gegebenem Abstande schneidet?

9. Welches ist der geometrische Ort der Geraden (oder Ebene),

welche a) einer gegebenen Geraden parallel ist und von ihr gegebenen Abstand hat? b) eine gegebene Gerade in bestimmtem Punkte unter gegebenem Winkel schneidet? c) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Ebene unter gegebenem Winkel schneidet?

10. Der Axenschnittwinkel einer Rotationskegelfläche sei 2α; dieselbe werde von einer Ebene durchschnitten, welche die Axe in der Entfernung a von der Spitze schneide und mit der Axe den Winkel β bilde. Wie grofs ist die Hauptaxe des entstehenden Kegelschnitts?

11. a) Welche Gröfsenbeziehungen finden statt zwischen dem Radius r einer Kugel, dem Mittelpunktsabstand a einer die Kugel schneidenden Ebene, dem Radius ϱ des Schnittkreises und dem Winkel φ, welchen ein nach dem Schnittkreise gehender Radius mit dessen Ebene bildet?

§. 7, 4.

b) Wie viele der in a) genannten Gröfsen r, a, ϱ, φ verfügen über die übrigen?

12. Man soll die fehlenden der in 11 genannten Gröfsen r, a, ϱ, φ berechnen, wenn bekannt ist:

a) $r = 53$, $a = 28$; c) $a = 7{,}2$, $\varphi = 47^0\,55'\,30''$;
b) $r = 130$, $\varphi = 14^0\,15'$; d) $\varrho = 5{,}8$, $\varphi = 86^0\,3'$.

13. Wie berechnet man den Radius eines Parallelkreises der Erde, dessen geographische Breite β bekannt ist?

14. Welche Länge hätte ein in 50^0 geographischer Breite rings um die Erde gespannter Telegraphendraht?

15. a) Welche Länge hätte die Pacificbahn, wenn sie durchweg in 40^0 geographischer Breite vom Meridian von New-York (74^0 w. v. Gr.) bis zu dem von San Francisco (122^0 w. v. Gr.) ginge? —

b) Wenn Montevideo und Kapstadt genau unter derselben Breite von 35^0 lägen, wie grofs wäre ihre Entfernung, da sie einen Zeitunterschied von 5 Stunden haben?

c) In welcher gemeinschaftlichen geographischen Breite liegen zwei Punkte, deren Entfernung = 750 Meilen und deren Zeitunterschied = 6 Stunden 25 Minuten beträgt? [Erdradius = 860 Meilen.]

16. Welche Lage haben die Mittelpunkte aller parallelen Schnittkreise einer Kugel?

17. Welches ist der geometrische Ort der Mitten aller Kugelschnittkreise von gleicher Gröfse?

18. Durch zwei Punkte einer Kugelfläche läfst sich nur ein Hauptkreis legen.

19. Zwei Hauptkreise einer Kugel schneiden einander stets in zwei diametralen Punkten.

20. An eine gegebene Kugel soll die berührende Gerade und

Ebene konstruiert werden, welche a) durch einen Punkt der Kugel geht, b) durch einen Punkt aufser der Kugel geht, c) durch eine gegebene Gerade geht, d) parallel einer gegebenen Ebene ist, e) parallel einer gegebenen Geraden ist und durch einen gegebenen Punkt geht, f) mit einer gegebenen Ebene (oder Geraden) einen gegebenen Winkel bildet.

21. Welches ist der geometrische Ort a) des Punktes, b) der Geraden, c) der Ebene, welcher bzw. von einem gegebenen Punkte gegebenen Abstand hat?

22. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Verbindungsgeraden mit zwei festen Punkten einen rechten Winkel einschliefsen?

23. Unter den Entfernungen eines Punktes von der Kugeloberfläche versteht man die Strahlstrecken nach dem nächsten und entferntesten Punkt der Fläche. Welche sind diese?

24. Welches ist der Ort des Punktes, dessen Abstand von einer Kugel ein gegebener ist?

25. Man soll den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel von gegebenem Radius bestimmen, welche a) eines der Elemente Punkt, Gerade, Ebene, Kugel berührt, b) aus einer gegebenen Geraden (oder Ebene oder Kugel) eine Strecke (bzw. einen gegebenen Kreis) ausschneidet, c) zwei parallele Gerade berührt.

26. Man soll eine Kugel mit gegebenem Radius konstruieren, welche irgend drei der folgenden Bedingungen erfüllt: sie soll a) durch einen gegebenen Punkt gehen, b) eine gegebene Ebene berühren, c) eine gegebene Kugel berühren, d) aus einer gegebenen Ebene einen gegebenen Kreis ausschneiden, e) aus einer gegebenen Kugel einen gegebenen Kreis ausschneiden.

27. Man soll eine Kugel konstruieren, welche eine Ebene und eine Kugel und zwar erstere (oder letztere) in gegebenem Punkte berührt.

28. Gegeben sei eine massive Kugel. Man soll:

a) für einen auf ihr gezeichneten Kreis den Radius finden;

b) ihren eigenen Radius finden;

c) durch zwei auf ihr gegebene Punkte den Hauptkreis legen.

Andeutung. a) Übertrage den Kreis durch 3 seiner Punkte in die Ebene; b) zeichne auf der Kugel irgend einen Kreis und benütze a); c) benütze b) und die Quadrantensehne des Hauptkreises.

29. Welches ist der Ort des Mittelpunkts der Kugeln, welche a) die Kanten eines Dreikants, b) die Ebenen eines Dreiflachs berühren?

30. Welches ist der geometrische Ort der Spitze des Kegels, welcher eine gegebene Kugel berührt und einen gegebenen Axenschnittwinkel hat? §. 7, 5.

31. Gehen von beliebigen Punkten einer Geraden aus Berührungskegel an eine Kugel, so schneiden deren Berührungskreise alle einander in zwei festen Punkten. Wo liegen diese?

32. Geht die Axe eines Rotations-Cylinders oder Kegels durch die Mitte einer Kugel, so sind die Schnittfiguren zur Axe normale Kreise.

33. Einem Kegel soll eine Kugel einbeschrieben werden, welche a) gegebenen Radius hat, b) zugleich eine den Kegel schneidende Gerade berührt, c) zugleich eine gegebene Ebene berührt, d) eine den Kegel berührende Kugel berührt.

34. Gegeben sei eine Kugel und innerhalb derselben ein Punkt. Man soll den geometrischen Ort der Kugelsekanten bestimmen, welche durch den Punkt halbiert werden. Wie heifst die entsprechende Aufgabe, wenn der gegebene Punkt aufser der Kugel liegt?

§. 7, 7. **35.** Zwei Kugeln seien durch ihre Mittelpunktsentfernung d und ihre Radien r_1 und r_2 bestimmt. Wo liegen die Mittelpunkte der die beiden Kugeln berührenden Kegelflächen? und welches sind die Winkel der Axenschnitte? Beispiel: $d = 25$, $r_1 = 12$, $r_2 = 5$ *mm*.

36. In welchem Verhältnis steht die Entfernung des Mondes und der Sonne von der Erde, wenn in dem Moment, da die Lichtgrenze am Monde als Gerade erscheint, der Winkelabstand beider Weltkörper $89^0 51'$ beträgt? (Aristarch von Samos.)

37. Aus der kurzen Dauer einer Sonnenfinsternis schlofs Aristarch, dafs gerade die Spitze des Mondschattens die Erde treffe. Wenn die Sonne hierbei 400 mal weiter als der Mond von der Erde entfernt ist, in welchem Verhältnis stehen dann die Durchmesser von Sonne und Mond?

38. Nehmen wir an, das Verhältnis der Gröfsen und Entfernungen von Mond und Sonne seien auch bei einer Mondfinsternis dieselben, wie in der vorangehenden Aufgabe, und die totale Verfinsterung dauere $1\frac{1}{2}$ Stunden, während der Mond in jeder Stunde um seinen eignen Durchmesser im Kernschatten der Erde weiter rücke, so berechne man: a) wieviel mal übertrifft der Durchmesser des Erdschattens in der Entfernung des Mondes von der Erde den Monddurchmesser? b) in welchem Verhältnis steht der Monddurchmesser und der Sonnendurchmesser zum Erddurchmesser? c) Wieviele Erddurchmesser betragen die Entfernungen von Sonne und Mond, wenn der scheinbare Durchmesser beider Gestirne $\frac{1}{2}^0$ ist?

39. a) Legt man durch zwei konzentrische Kugeln eine Ebene, so hat der zwischen beiden Schnittkreisen liegende Kreisring konstanten Inhalt.

b) Wie mufs die innere von zwei konzentrischen Kugeln gewählt werden, damit eine durch eine gegebene Gerade (oder parallel einer gegebenen Ebene) gelegte Ebene die beiden konzentrischen Kugeln

derart schneidet, dafs der Inhalt des Schnittkreises der innern halb so grofs als der Inhalt des Schnittkreises der äufseren Kugel wird? — Andeutung: Benütze a) und lege die Berührungsebene an die innere Kugel.

40. Welches sind die Bedingungen dafür, dafs zwei Kugeln einander ganz aus- oder ganz einschliefsen, berühren oder schneiden?

41. In einen Kegel, dessen Axenschnittwinkel $= 2\alpha$ sei, werden auf a) derselben Seite, b) verschiedenen Seiten des Mittelpunktes zwei berührende Kugeln einbeschrieben, deren Radien r_1 und r_2 $(r_1 > r_2)$ seien. Welchen Axenschnittwinkel hat der zweite die beiden Kugeln berührende Kegel? — Beispiel: $2\alpha = 29^0 35'$; $r_1 = \frac{5}{2}$, $r_2 = 10\,mm$.

42. a) Welche Gröfse hat die Hauptaxe des Ellipsenschnittes eines Kegels, wenn die die beiden letzteren berührenden Kugeln die Radien r_1 ($= 5\,mm$) und r_2 ($= 16\,mm$) haben und wenn der Axenschnittwinkel des Kegels 2α ($= 43^0 24'$) ist? §. 7, 8.

b) Wo liegen Brennpunkt und Leitgerade des Parabelschnittes an einem Kegel, dessen Axenschnitt den Winkel 51^0 hat, wenn der Scheitel der Kurve um 21 *mm* von der Kegelspitze absteht?

c) Wie grofs ist der Asymptotenwinkel eines Hyperbelschnitts, wenn der Winkel des Hauptaxenschnitts 2α und der Neigungswinkel zwischen der Axe des Kegels und der Schnittebene β ist? — Beispiel: $2\alpha = 120^0$, $\beta = 45^0$.

Aufgaben zum dritten Kapitel.

§. 4.

1. Man soll ein in sich symmetrisches Dreikant (nach Konstruktion des sog. Netzes) modellieren, von welchem: §. 9.
a) die gleichen Kantenwinkel $= 70^0$ und der ungleiche Kantenwinkel $= 100^0$;
b) der ungleiche Kantenwinkel $= 44^0$ und der Neigungswinkel der Kante, in welcher die gleichen Seiten zusammenstofsen, mit der Gegenseite $= 32^0$ ist.

2. Man soll das Netz eines Dreikants zeichnen und letzteres modellieren, wenn gegeben sind:

a) die drei Kantenwinkel $a = 37^0$, $b = 59^0$, $c = 47^0$;

b) zwei Kantenwinkel und der eingeschlossene Flächenwinkel $a = 78^0$, $b = 60^0$, $\gamma = 117^0$;

c) zwei Kantenwinkel und der eine Gegenflächenwinkel $a = 75^0$, $b = 73^0$, $\alpha = 77^0$;

d) ein Kantenwinkel und zwei anliegende Flächenwinkel $a = 52^0$, $\beta = 64^0$, $\gamma = 55^0$.

3. In jedem Dreikant gehen je durch eine Gerade die

a) seitenhalbierenden Normalebenen;

b) Höhenebenen, d. h. die durch je eine Kante normal zur Gegenseite gelegten Ebenen;

c) Schwerebenen, d. h. die durch je eine Kante und die Winkelhalbierende der Gegenseite gelegte Ebenen;

d) winkelhalbierenden Ebenen. Welche Ausdehnung läfst d) zu, wenn auch die Nebenwinkel in Betracht gezogen werden?

4. Man soll einem Dreikant einen Kegel a) umschreiben, b) einschreiben.

5. Wie läfst sich der Satz von der Existenz des Centrums der Ecken und Seiten eines regelmäfsigen Vielecks ausdehnen auf das regelmäfsige Vielkant oder Vielflach?

6. Wenn zwei Kanten eines Dreikants mit zweien eines anderen zusammenfallen, die dritte Kante des einen aber innerhalb des anderen fällt, so ist die Summe der Kantenwinkel des umschliefsenden Dreikants gröfser als die des umschlossenen.

7. Zieht man innerhalb eines Dreikants durch dessen Scheitel eine Gerade, so ist die Summe der Winkel, welche sie mit den drei Kanten bildet, kleiner als die Summe der Kantenwinkel des Dreikants.

8. Die sphärische Entfernung zweier auf der Kugelfläche gelegenen Punkte, d. h. die Länge des kleineren der von den Punkten begrenzten Hauptkreisbögen ist auf der Kugel der kürzeste Weg zwischen beiden Punkten. — Andeutung: Benütze §. 9, 6 b.

9. Zu gleichen geradlinigen Entfernungen zweier Kugelpunkte gehören auch gleiche oder zu einem Hauptkreis einander ergänzende sphärische Entfernungen — und umgekehrt.

10. Die Summe zweier Flächenwinkel im Dreikant übertrifft den dritten Flächenwinkel um weniger als $2R$.

11. Die Summe zweier Kantenwinkel eines Dreikants und die Summe der gegenüberliegenden Ebenenwinkel sind beide entweder $> 2R$ oder beide $< 2R$ oder beide $2R$. (Man nehme das Eck aus zwei der Kanten und dem Gegenstrahl der dritten Kante zu Hilfe.)

12. Die in §. 42 und 43 des ersten Teiles gegebenen Sätze über das axige, das centrische und das regelmäfsige Vieleck und Vielseit sollen auf das in sich symmetrische bezw. axialsymmetrische und regelmäfsige Vielkant übertragen werden.

§. 10, 11. **13.** Welches ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von zwei a) Punkten, b) Geraden, c) Ebenen gleichweit entfernt ist?

14. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von drei gegebenen a) Punkten, b) Geraden, c) Ebenen je gleichweit entfernt ist?

15. Giebt es einen Punkt, welcher gleichweit entfernt ist von vier nicht a) in einer Ebene liegenden Punkten? b) durch einen Punkt gehenden Ebenen?

16. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunkts einer Kugel, welche a) durch zwei gegebene Punkte geht? b) zwei Gerade berührt, c) zwei Ebenen, insbesondere zwei parallele Ebenen berührt?

17. Welches ist der Ort des Mittelpunkts der Kugel, welche a) durch die Ecken eines Dreiecks geht? b) die Seiten eines Dreiseits berührt?

18. Es ist der Mittelpunkt einer Kugel zu bestimmen, welche a) durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte geht; b) durch einen Kreis und einen Punkt aufser seiner Ebene geht; c) durch einen Kreis geht und eine Gerade aufser seiner Ebene berührt.

19. Ein gegebenes a) gleichseitiges, b) gleichschenkeliges, c) ungleichseitiges Dreieck soll so gelegt werden, dafs seine Ecken bezw. in einen Punkt, eine Gerade, eine Ebene fallen.

20. Giebt es einen Punkt, welcher von den vier Seiten eines windschiefen Vierecks gleichweit entfernt ist?

21. Um welche Axe ist die Ebene eines Winkels bei festbleibendem Scheitel zu drehen, damit nach der Bewegung jeder Schenkel fällt auf:

a) den anderen Schenkel?
b) den eigenen Gegenstrahl?
c) den Gegenstrahl des anderen Schenkels?

22. Jeder Strahl durch den Scheitel eines Winkels, welcher mit beiden Schenkeln gleiche Winkel einschliefst, liegt in der den Winkel normal halbierenden Ebene.

23. Zwei windschiefe Gerade sind axialsymmetrisch in Bezug auf die beiden Geraden, welche den kürzesten Abstand derselben normal halbieren und mit beiden Geraden gleiche Winkel bildet.

24. Zwei gleichwendig kongruente Ebenenbüschel paralleler Träger, in welchen gleichgerichtete Halbebenen der Scheitelebene einander entsprechen, sind perspektivisch kongruent.

Aufgaben zum vierten Kapitel.

§. 5.

1. Das Dreikant, dessen Kanten den Kanten eines gegebenen Dreikants einzeln gleichgerichtet parallel sind, ist dem letzteren p. k. — Was läfst sich aussagen, falls die Kanten paarweis gegengerichtet parallel sind? §. 13 u. 14.

2. Durch wie viele und welche Stücke ist ein sphärisches Dreieck bestimmt?

3. Welche Übereinstimmung und welcher Unterschied findet statt zwischen den Kongruenz-Bedingungen ebener und sphärischer Dreiecke?

4. Zu einer Figur ist die p. t. Figur bestimmt durch ein Paar entsprechender Punkte.

§. 15 u. 16. 5. Man soll eine Kugel konstruieren, deren Mittelpunkt auf einer Geraden g liegt und welche zugleich durch einen gegebenen Punkt P geht und eine Ebene ε berührt. — Andeutung: Benütze den Schnittpunkt $(g\varepsilon)$ als Ähnlichkeitspunkt.

6. Der geometrische Ort des Punktes, von welchem aus zwei gegebene Kugeln gleich grofs erscheinen, ist eine Kugelfläche, welche die Strecke zwischen den beiden Ähnlichkeitspunkten der Kugeln als Durchmesser hat.

7. Man soll einen Punkt finden, von dem aus vier gegebene Kugeln gleiche scheinbare Gröfse haben. — Andeutung: Beachte vor. Nr.

8. Wenn zwei Kugeln einander ausschliefsend (einschliefsend) berühren, so ist der Berührungspunkt innerer (äufserer) Ähnlichkeitspunkt.

9. Berühren zwei Kugeln eine dritte gleichartig (ungleichartig), so sind die Berührungspunkte inverse Punkte der ersten beiden Kugeln in Bezug auf einen äufseren (inneren) Ähnlichkeitspunkt.

10. Wenn zwei Kugeln einander schneiden, so ist die Ebene des Schnittkreises Potenzebene für beide Kugeln.

11. Wenn zwei Kugeln einander berühren, so ist die gemeinsame Berührungsebene die Potenzebene für beide Kugeln.

12. Wenn drei Kugeln einander paarweise schneiden oder berühren, so gehen die Schnittebenen bezw. Berührungsebenen durch eine Gerade.

13. Wenn zwei Kugeln von einer dritten berührt werden, so ist die Potenzebene der beiden ersten Kugeln, als Ebene zur dritten Kugel aufgefafst, p. ä. zur Polarebene des Ähnlichkeitspunktes in einer der ersteren Kugeln, und zwar eines äufseren (inneren) Ähnlichkeitspunktes bei gleichartiger (ungleichartiger) Berührung.

14. Wenn drei Kugeln von einer vierten berührt werden, so ist die Potenzgerade der drei Kugeln, als Gerade zur vierten Kugel aufgefafst, p. ä. mit der Schnittgeraden der beiden zu einer Kugel gehörigen Polarebenen der Ähnlichkeitspunkte dieser Kugel mit den beiden anderen Kugeln, wobei der Ähnlichkeitspunkt ein äufserer (innerer) bei gleichartiger (ungleichartiger) Berührung. — Es giebt hierbei acht verschiedene Arten der Berührung.

15. Zu vier Kugeln giebt es sechs äufsere und sechs innere Ähnlichkeitspunkte, welche auf acht Ebenen liegen; und zwar liegen die sechs äufseren auf einer Ebene, ferner je drei äufsere und drei innere, sowie zwei äufsere und vier innere. (Je sechs solcher Punkte liegen auf drei Geraden, von welchen jede die übrigen schneidet.)

16. Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden einander in einem Punkt, dem sog. Potenzcentrum.

17. Wenn vier Kugeln von einer fünften berührt werden, so liegt der Berührungspunkt einer Kugel auf der Geraden vom Potenzcentrum der vier Kugeln nach dem Schnittpunkt der drei zu der betr. Kugel gehörigen Polarebenen der Ähnlichkeitspunkte, welche diese Kugel mit den drei übrigen Kugeln gemeinsam hat. — Es ergeben sich 16 die vier gegebenen berührende Kugeln.

18. Welches sind die Grenzlagen der Ähnlichkeitspunkte, der zugehörigen Polarebenen und der Potenzebenen zwischen einer Kugel und einer zweiten Kugel, wenn die letztere a) zu einem Punkt zusammenschrumpft? b) zu einer Ebene sich ausbreitet?

19. Es sind von Punkten, Ebenen, Kugeln vier Elemente gegeben; man soll die Kugel bestimmen, welche dieselben berührt. (Apollonische Aufgabe.)

Aufgaben zum fünften Kapitel.

§. 6.

§. 17.

1. Wie kann nach §. 17, 1a und 2a ein Prisma oder Cylinder entstanden gedacht werden?

2. Jede parallel einer Seitenkante eines Prismas durch dieses gelegte Ebene schneidet das Prisma in einem Parallelogramm.

3. Wie grofs ist in einem $n$seitigen Prisma die Summe der Flächenwinkel a) an den Grundkanten? b) an den Seitenkanten?

4. Von welcher Art ist ein Parallelflächner, in welchem:

a) zwei Diagonalebenen zur Grundfläche normal sind?

b) zwei auf denselben Flächen aufstehende Diagonalebenen Rechtecke (insbesondere kongruente Rechtecke) sind?

5. Wenn in einem dreiseitigen Prisma zwei Grundkanten einander gleich sind und ebenso die Winkel, welche die Seitenkante im Scheitel dieser Grundkanten mit letzteren bildet, so ist die dieser Seitenkante gegenüberliegende Seitenfläche ein Rechteck (§. 9, 4c).

6. a) Es giebt Parallelflächner mit nur 2, solche mit nur 4 oder 6 Rechtecken (Quadraten) als Begrenzungsflächen.

b) Giebt es einen geraden Parallelflächner mit nur 2 Rechtecken als Begrenzungsflächen?

c) Giebt es einen Quader mit nur 4 Quadraten als Grenzflächen?

7. Die vier Diagonalaxen eines Parallelflächners gehen durch einen Punkt, ebenso die sechs Diagonalebenen.

8. Der Parallelflächner ist centrisch in Bezug auf die Mitte der Verbindungsstrecke zweier Gegenecken oder den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Gegenecken.

9. In einem Parallelflächner sind die gegenüberliegenden Ebenenwinkel, sowie die gegenüberliegenden Dreikante gegenwendig gleich.

10. Der Quader ist in sich symmetrisch in Bezug auf die drei Mittelparallelebenen seiner Flächen. Er ist axialsymmetrisch in Bezug auf die drei Normalen der Mitten der Seitenflächen.

11. In jedem Quader ist die Quadratsumme der

a) von einem Eck ausgehenden Kanten gleich dem Quadrat der Diagonalaxe;

b) Cosinus derjenigen Winkel, welche die Diagonalaxe mit den Kanten bildet, gleich 1.

12. Trägt man von einem Eck eines Würfels aus auf jeder Kante eine Strecke ab, welche a) kleiner, b) gröfser als eine Kante ist, und legt man dann durch die erhaltenen Endpunkte Ebenen parallel zu den Seitenflächen (und verlängert bei b) die Würfelflächen), so entstehen neue Körper. Wie viele? In welchen Gröfsenbeziehungen stehen dieselben zu einander?

13. In welchem Gröfsenverhältnis stehen Seite, Flächendiagonale und Körperdiagonale eines Würfels?

14. Das Rhomboëder ist von sechs kongruenten Rauten begrenzt.

15. Wir nennen die Eckpunkte eines Rhomboëders, in welchen drei gleiche Kantenwinkel zusammentreffen, Pole, die Kanten desselben Polkanten, die übrigen Mittelkanten, die Verbindungsgerade beider Pole Hauptaxe. — Nun gelten die folgenden Sätze:

a) Das Rhomboëder ist centrisch in Bezug auf den Mittelpunkt der Hauptaxe (Aufg. 8).

b) Der Schnitt durch die Endpunkte der Kanten eines Pols ist ein regelmäfsiges Dreieck, zu dessen Ecken die Hauptaxe normal ist im Mittelpunkt des Dreiecks.

c) Die Mittelnormalebene der Hauptaxe halbiert die Mittelkanten.

d) Der Schnitt dieser Ebene ist ein regelmäfsiges Sechseck.

e) Die Verbindungsgeraden der Mitten je zweier gegenüberliegenden Mittelkanten, d. i. die Nebenaxen schneiden einander in der Mitte der Hauptaxe so, dafs sie mit dieser je einen R bilden, untereinander je $^2/_3 R$.

f) Die Schnittebene durch zwei gegenüberliegende Mittelkanten ist ein Rechteck (Aufg. 5).

g) Eine Nebenaxe ist normal zu den zugehörigen Mittelkanten, ebenso zur Diagonale der Ecken, welche aus den nichtzugehörigen Mittelkanten gebildet werden.

h) Das Rhomboëder ist in sich axialsymmetrisch in Bezug auf jede Nebenaxe.

16. Von einem Würfel sind das Centrum, die Ebene und die Axen der Symmetrie zu bestimmen.

17. Zwei Prismen sind ähnlich (gegenwendig ähnlich), wenn ihre Grundflächen ähnlich, ein paar entsprechende Grundecken kongruent (gegenwendig gleich) und das zugehörige Paar von Seitenkanten dasselbe Verhältnis hat wie ein Paar der Grundkanten.

18. Gerade Prismen, welche einander ähnlich sind, sind auch gegenwendig ähnlich.

19. Regelmäfsige $n$seitige Prismen sind ähnlich, wenn das Verhältnis der Seiten- und Grundkanten in beiden übereinstimmt.

20. Parallelflächner sind ähnlich (oder gegenwendig ähnlich), wenn in ihnen ein Eck kongruent (oder gegenwendig gleich) dem andern ist und wenn die drei anstofsenden Kantenpaare proportional sind

21. Welches sind die den Aufgaben 17 und 19 entsprechenden Sätze für Cylinder?

22. Legt man durch die Axe eines schiefen Cylinders Ebenen, so sind die Schnittfiguren, die sogen. Axenschnitte, Parallelogramme. — Welches ist der kleinste Axenschnitt? Welches der gröfste? Welcher ist ein Rechteck? Giebt es unter allen Axenschnitten kongruente?

23. Wie grofs ist die Oberfläche eines Würfels, von welchem bekannt ist: **Prisma.**

a) eine Kante a? $a = 4{,}7$ m (oder $a = 2$ dm 19 mm);

b) eine Flächendiagonale d? $d = 5 \cdot \sqrt{2}$;

c) eine Körperdiagonale d? $d = 8{,}66$;

d) die Summe einer Flächen- und einer Körperdiagonale s? — $s = \sqrt{18} + \sqrt{12}$;

e) der Umfang u oder f) der Inhalt i eines Diagonalschnittes?

24. In einem Würfel sei zu einer Diagonalaxe die Mittelnormalebene gelegt. Welchen a) Umfang, b) Inhalt hat die Schnittfigur?

25. Ein Würfel sei durch Ebenen abgeeckt, welche durch Kantenpunkte gehen, die je um a) die Hälfte, b) ein Viertel, c) ein Drittel der Kantenlänge a von dem betreffenden Eck abstehen. Welche Oberfläche hat der gebildete Körper?

26. Die Oberflächensumme zweier Würfel sei s, die Summe von zweien ihrer Kanten $= k$. Wie grofs sind die einzelnen Oberflächen?

27. Drei zusammenstofsende Kanten eines Quaders haben das

Verhältnis $= a : b : c$ (wobei die letztere Zahl der Höhe entspricht) und die Diagonale seiner Grundfläche sei $= d$. Wie grofs ist die Oberfläche? $a : b : c = 8 : 15 : 19$ und $d = 23{,}8$.

28. In einem Parallelflächner mit rechteckiger Grundfläche bildet eine Seitenkante a mit den Grundkanten b und c Winkel von 90^0, bezw. 60^0. Wie grofs ist die Oberfläche?

29. Ein gerades regelmäfsig-dreiseitiges gleichkantiges Prisma habe die Oberfläche $= f$. Wie grofs sind seine Kanten?

30. In einem geraden Prisma, dessen Höhe $= b$ und dessen Grundfläche ein regelmäfsiges Dreieck mit der Seite a sei, werde durch ein Grundeck parallel zur Gegenkante eine Ebene gelegt, die mit der Grundfläche den Winkel α bilde. a) Wie grofs ist die Schnittfigur? — b) Unter welchem Winkel müfste die Ebene gelegt werden, damit sie durch die Gegenkante der zweiten Grundfläche geht? — Beispiel: $a = 52{,}2$; $b = 87$; $\alpha = 31^0 15'$.

31. In ein gerades quadratisches Prisma P sei ein anderes P' so einbeschrieben, dafs die Ecken von P' die Grundkanten von P ringsum je in demselben Verhältnisse $u : v$ teilen. Man berechne aus den Kanten des einen Prismas die Oberfläche des anderen. — Beispiel: Es sei $u : v = 1 : 1$ (oder $= 4 : 5$).

Cylinder. **32.** Für einen geraden Kreiscylinder bedeute r den Radius, h die Höhe, M die Mantelfläche, O die Gesamtoberfläche. Man soll nun bestimmen:

a) M aus r und h; b) O aus r und h; c) h aus M und r; d) h aus O und r; e) r aus O und h (insbesondere wenn $O = 3{,}92\pi$ und $h = 4{,}5$); f) M für $r = h$.

33. Wie grofs ist der Mantel des Cylinders, welcher:

a) einem Würfel um- oder einbeschrieben ist?

b) dem in Aufg. 31 bestimmten Prisma P einbeschrieben ist?

c) dem Prisma P' in Aufg. 31 umbeschrieben ist?

34. Man soll die Höhe eines geraden Cylinders bestimmen, dessen Mantel gleich der Mantelsumme zweier gegebenen Cylinder und dessen Grundfläche einem gegebenen gleichseitigen Dreieck a) eingeschrieben, b) umgeschrieben ist.

35. Wie konstruiert man den Radius einer Kreisfläche, welche mit der einem gegebenen geraden Kreiscylinder zugehörigen a) Mantelfläche, b) Gesamtoberfläche übereinstimmt?

36. Die Gesamtoberfläche eines gleichseitigen Cylinders, d. i. eines solchen, dessen Axenschnitte Quadrate sind, betrage O. Wie grofs sind seine Abmessungen? — Beispiel: a) $O = 471$ qcm; b) $O = 6\pi$.

37. Man soll die Wandfläche einer a Meter langen geraden Kanalröhre berechnen, deren Querschnitt $AOA'D'UDA$ in folgender

Weise bestimmt ist: Eine Seite $AA' = 2s$ eines gleichseitigen Dreiecks $AA'C$ werde beiderseits über A und A' hinaus um s verlängert bis B, bezw. B'; dann beschreibe man aus letzteren Punkten mit $3s$ als Radius Bögen bis zu den Verlängerungen der anderen Dreiecksseiten d. i. bis D' und D, und vollende von C aus den Bogen DUD' und noch über AA' den Halbkreis AOA'.

38. In einem schiefen Rotationscylinder sei die der Axe parallele Seite des Hauptaxenschnittes $= a$, die andere $= 2b$ und die Axenenden liegen normal über den Grenzpunkten von $2b$. Wie grofs ist der Mantel? und die Gesamtoberfläche? — Beispiel: $a = 43{,}3$; $2b = 29$.

39. Die Gesamtoberfläche einer geraden cylindrischen Röhre sei G, wenn ihre Länge $= l$, ihre lichte Weite $= 2r$ und ihre Wandstärke $= d$ ist. a) In welchem Zusammenhang stehen diese vier Gröfsen? b) Wie berechnet man jede derselben, wenn je die drei anderen bekannt sind?

40. Von einem geraden Cylinder, dessen Länge l und dessen Radius r ist, sei durch eine zur Axe parallele Ebene ein Teil abgeschnitten. Wie grofs ist die Oberfläche dieses Teiles, wenn die Schnittsehne des Kreises $= s$ ist? Insbesondere sei $s = r$, ($r\sqrt{2}$, $r\sqrt{3}$), oder es sei der zu s gehörige Centriwinkel $= 2\alpha$.

§. 7.

1. Wie könnte nach §. 18, 1 u. 2 (S. 49) eine Pyramide oder ein Kegel entstanden gedacht werden? §. 18.

2. Wird eine dreiseitige Pyramide durch eine Ebene geschnitten, welche zwei windschiefen Kanten derselben parallel ist, so ist die Schnittfigur ein Parallelogramm.

3. a) Legt man in einem Tetraëder Ebenen durch jede der von einem Eck ausgehenden Kanten und je die Schwerlinie der gegenüberliegenden Seitenfläche, so gehen diese drei Ebenen durch eine Gerade s. (Vgl. Aufg. §. 4, 3, S. 158.) — Wie viel solche Gerade s giebt es?

b) Die Geraden s in a) gehen durch einen Punkt, den sogen. Schwerpunkt des Tetraëders, und jede derselben wird durch den Schwerpunkt im Verhältnisse von $3 : 1$ geteilt.

c) Giebt es im Tetraëder auch, entsprechend wie im Dreieck, einen Höhenpunkt, ein Centrum der Ecken und ein Centrum (oder mehrere Centra) der Seiten?

d) Durch den Schwerpunkt des Tetraëders gehen auch die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Kanten und diese halbieren einander.

4. In jeder dreiseitigen Pyramide beträgt die Summe der 6 Flächenwinkel mehr als $4R$, aber weniger als $6R$.

5. Für jede Pyramide gelten die folgenden Sätze:

a) Die Summe der Seitenflächen ist gröfser als die Grundfläche

b) Zwei Seitenkanten (oder auch die Höhen zweier Seitenflächen verhalten sich umgekehrt wie die Sinus ihrer Neigungswinkel gegen die Grundfläche.

6. a) Welche Seitenfläche eines Tetraeders mit rechtwinkeligem Dreikant (sog. rechtwinkeliges Tetraeder) kann Hypotenusenfläche und welche können Kathetenflächen heifsen?

b) In welcher Gröfsenbeziehung steht eine Kathetenfläche zur Hypotenusenfläche eines rechtwinkeligen Tetraeders?

c) Im rechtwinkeligen Tetraeder ist das Quadrat der Hypotenusenfläche gleich der Summe der Quadrate der Kathetenflächen. Andeutung. Ziehe vom Scheitel die Normalstrecke zur Hypotenusenfläche und benutze Aufg. 11b in §. 6 (S. 162).

7. In einem regelmäfsigen Tetraeder bestimmen die Mittelpunkte von zwei Paar gegenüberliegenden Seiten ein Quadrat.

8. In einem regelmäfsigen Tetraeder ist jede Verbindungsgerade der Mitten zweier Gegenseiten a) Mittelnormale zu diesen Seiten, b) Mittelnormale zu den beiden andern Verbindungsgeraden der Seitenmitten, c) Symmetrieaxe für das Tetraeder.

9. Die Grenzpunkte zweier windschiefen, aber zu einander normalen Strecken $AA' = 2a$ und $BB' = 2b$ seien symmetrisch zu einer Axe; der Abstand der zwei Strecken von einander sei $= c$. Wie viele Ebenen sind durch die Punkte bestimmt? und welche Art von Körpern umschliefsen die Ebenen?

10. a) Welcher Körper wird gebildet, wenn in vor. Nr. die Punkte B und B' nicht symmetrisch zur Axe gewählt werden?

b) Wird in dem bei a) verlangten Körper ein Flächenwinkel halbiert, so teilt die Halbierungsebene die Gegenkante im Verhältnis der den Flächenwinkel einschliefsenden Seitenflächen.

11. In der Mittelnormalebene einer Strecke $AA' = 2a$ seien diametral zum Schnittpunkt zwei Paare Punkte B und B', C und C' gewählt, und dabei sei $BB' = 2b$, $CC' = 2c$ und $\sphericalangle (bc) = \gamma$. Welche Ebenen sind durch die Punkte bestimmt? und welchen Körper umschliefsen die Ebenen?

12. Welchen Körper erhält man aus den in Nr. 11 gekennzeichneten, wenn angenommen wird:

1) $a = b = c$ und $\gamma = R$?   2) $b = c$ und $\gamma = R$?

3) $a > b > c$ und $\gamma = R$?   4) $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = c$ und $\gamma = R$?

5) $b = c$ und $\gamma = \frac{2}{3} R$?   6) $b = 2c$ und $\gamma = \frac{1}{3} R$?

13. a) Man soll über einer gegebenen regelmäfsigen Grundfläche eine Pyramide so konstruieren, dafs die Seitenkanten den Grundkanten gleich sind.

b) Beweise, dafs es keine mehr als fünfseitige Pyramide giebt, welche gleichkantig ist.

14. Ist eine Berührungsebene eines beliebigen Kreiskegels stets normal zu dem durch ihre Seitengerade gehenden Axenschnitt?

15. Unter allen Axenschnitten eines schiefen Kegels hat der Hauptaxenschnitt den kleinsten Inhalt. — Wie wechselt die Gröfse des Axenschnittes mit der Lage desselben? Welcher Axenschnitt hat den gröfsten Inhalt?

16. Entsprechend den Aufgaben §. 6, 17 u. 19 (S. 163) sollen die Bedingungen für die Ähnlichkeit der Pyramiden (und Kegel) aufgestellt werden.

17. Man soll die Oberfläche einer geraden Pyramide mit regelmäfsiger Grundfläche berechnen, wenn ihre Grundkante $= a$, die Höhe $= h$ gegeben und wenn die Grundfläche ein a) Viereck, b) Dreieck, c) Sechseck, d) Achteck ist. Pyramide

18. Ebenso wie 17, wenn statt a die Seitenkante s gegeben ist.

19. Die Höhe einer geraden Pyramide mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche sei doppelt so grofs als a) eine Grundkante, b) die Höhe der Grundfläche; die Gesamtoberfläche sei $= G$. Welche Abmessungen hat die Pyramide?

20. Bestimme die Oberflächen der Pyramiden, welche gekennzeichnet sind durch die Angaben in den Übungsaufgaben a) §. 2, 23 (S. 150), b) §. 2, 24 (S. 150), c) §. 7, 9 (S. 166), d) §. 7, 12 e) §. 7, 11.

21. Auf eine quadratische Platte, deren Seite a ist, soll eine regelmäfsige 8seitige Pyramide gestellt werden, von welcher 2 Paar gegenüberliegender Grundkanten in die Seitenkanten der Platte fallen und deren Seitenkanten ebenfalls $= a$ seien. Es ist zu berechnen die Grundkante der Pyramide, die Grundfläche, der Mantel und die Höhe.

22. In einem rechtwinkeligen Tetraeder (vgl. Nr. 6) sei die Hypotenusenfläche ein a) gleichseitiges Dreieck mit der Seite a, b) gleichschenkeliges Dreieck mit den Seiten a, b, b. Wie grofs ist die Gesamtoberfläche?

23. Welchen Winkel bilden in einer geraden regelmäfsig dreiseitigen Pyramide Seiten- und Grundfläche mit einander, wenn eine der ersteren $n$mal so grofs ist als letztere?

24. Zwei entsprechende Kanten zweier ähnlichen Pyramiden seien $= 3{,}9$ und $6{,}5$, und ihre Oberflächen unterscheiden sich von einander um 272. Welche Oberfläche hat jede der Pyramiden?

25. Herodot erzählt von der grofsen quadratischen Pyramide zu

Ghizeh, dafs ihr Höhenquadrat gleich einer Seitenfläche sei. Welchen Winkel bildet hiernach eine Seitenkante mit der a) Grundkante? b) Grundfläche?

26. Der Geograph Strabo berichtet, die Höhe der eben genannten Pyramide sei ein ägyptisches Stadion. Man berechne den Umfang der Grundfläche und vergleiche denselben mit dem Umfang eines Kreises, dessen Radius ein Stadion ist.

Kegel. Es bezeichne für den geraden Kegel: r den Grundkreisradius, s die Seitenlinie, h die Höhe, α den Winkel an der Spitze des Axenschnittes, m die Mantelfläche. — Man soll berechnen:

27. m aus r und h; **28.** r aus m und s; **29.** m aus s und h; **30.** m aus α und r; **31.** s aus m und α; **32.** α aus m und s; **33.** α aus $h = 5$ und $m = 12{,}5\pi$;

34. α aus der Angabe, dafs die Mantelfläche das $\sqrt{2}$-fache der Grundfläche sei.

Es bezeichnen für den geraden Kegelstumpf: r_1 und r_2 die Radien der Grundkreise ($r_1 > r_2$), s die Seitenlinie, h die Höhe, m die Mantelfläche, — und für die betreffenden Ergänzungskegel: s_1 die Seitenlinie, h_1 die Höhe, und m_1 die Mantelfläche, — und für den ganzen Kegel: S die Seitenlinie, H die Höhe und M die Mantelfläche. — Man soll berechnen:

35. m aus r_1, r_2, s; **36.** m aus r_1, h, s; **37.** m aus r_1, r_2, S; **38.** m aus r_1, r_2, H; **39.** M aus S, s, r_2; **40.** s aus M, H, h; **41.** r_1 aus M, s, h; **42.** r_2 aus M, s, h; **43.** m_1 aus s, S, M; **44.** m aus M, r_1, r_2; **45.** h aus m, s, r_2; **46.** m_1 aus M, r_1, s.

47. Ein gleichseitiger Kegel, d. h. ein solcher, dessen Axenschnitte gleichseitige Dreiecke sind, habe die Höhe $= h$. Wie grofs ist seine Gesamtoberfläche?

48. In einem geraden Kegel sei der Grundkreis um 15 cm länger als die Seitenlänge, und a) der Mantel — oder b) die Gesamtoberfläche betrage 650 qcm. Welche Dimensionen und welchen Axenschnittwinkel hat der Kegel?

49. Man soll das Netz eines geraden rechtwinkeligen Kegels zeichnen.

50. Ein a) Sextant, b) Quadrant, c) Halbkreis (mit Radius $= r$) werden zu einem Kegel gebogen. Wie grofs sind des letzteren Grundkreisradius, Höhe, Axenschnittwinkel und Gesamtoberfläche?

51. Ein rechtwinkeliges Dreieck rotiere nach einander um jede der Katheten und erzeuge so zwei Kegel, deren Mantelflächen das Gröfsenverhältnis $p:q$ haben. a) Welches Verhältnis haben die Seiten des Dreiecks? b) Welche Centriwinkel zeigen die als Sektoren ausgebreiteten Mäntel, falls $\frac{p}{q} = 0{,}75$?

52. In welchem Verhältnis steht die Mantelfläche zur Grundfläche eines gleichseitigen Kegels?

53. Einem geraden Prisma, dessen Höhe h und dessen Grundfläche ein regelmäfsiges Sechseck mit der Seite a ist, sei ein gleich hoher gerader Kegel einbeschrieben, dessen Grundkreis das Sechseck berühre. In welchem Verhältnis stehen die a) Mantelflächen, b) Gesamtoberflächen beider Körper? Verbindung der Körper.

54. Über derselben Kreislinie, deren Radius r ist, stehe ein gerader Cylinder und ein gerader Kegel von gleicher Höhe h. a) In welchem Verhältnis stehen die Mantelflächen beider Körper? b) Kann der Mantel des Cylinders das Doppelte des Kegelmantels sein? c) Ist letztere Beziehung für die Gesamtoberflächen möglich?

55. Ein gerader Kegel soll durch einen gleich hohen gleichaxigen Cylinder so durchschnitten werden, dafs die Mantelfläche des ersteren a) der des letzteren gleich werde; b) halbiert werde; c) im Verhältnis von $1 : n$ geteilt werde. Man soll die Abmessungen des Cylinders konstruieren.

56. Ein gegebener gerader Kegelstumpf werde geschnitten durch einen den Grundflächen parallelen Kreis, dessen Fläche das a) arithmetische, b) geometrische Mittel sei zwischen den beiden Grundflächen. Man soll den Radius des Kreises konstruieren und die Fläche des oberen Mantelteils berechnen.

57. Gegeben sei auf quadratischer Grundfläche eine gerade Pyramide, deren Seitenfläche als Höhe die Länge a der Grundkante habe. Dieser Pyramide werde ein berührender Kegel einbeschrieben, letzterem wieder eine ähnliche Pyramide, letzterer wieder der berührende Kegel u. s. f. unbegrenzt. Welche Gröfse hat die Summe aller Kegelmäntel?

§. 8.

1. Wie viele Quadratmeilen mifst die Oberfläche der Erdkugel, da ihr Äquator 5400 geogr. Meilen lang ist? Kugel.

2. Wie grofs ist der Radius einer Kugel, deren Oberfläche gleich der Summe zweier Kugelflächen mit den Radien r_1 und r_2 ist?

3. Die Fläche eines Kugelschnittkreises sei a^2, während ihr Abstand von der Kugelmitte d beträgt. Welche Gröfse hat die Kugelfläche?

4. Wie grofs ist in einer Kugel vom Radius r die Fläche einer Haube, wenn a) ihr Begrenzungskreis den Radius ϱ hat? b) der Radius ihres Begrenzungskreises doppelt so grofs ist als ihre Höhe? Haube.

5. Wie hoch ist bei gegebener Kugel eine Haube, deren krumme Fläche das $n$fache ihrer Kreisgrundfläche ist? Beispiel: $n = 2$. — Welcher Bedingung mufs n genügen, damit die gesuchte Höhe geringer als ein Radius wird?

6. Ein leuchtender Punkt stehe vom Mittelpunkte einer gegebenen

Kugel um a ab. Welche Fläche der Kugel wird beleuchtet? — Beispiel: $r = 10$, $a = 45$ mm. Wie grofs mufs a gewählt werden, damit drei Viertel der Kugel im Dunkeln bleiben?

7. Eine Licht ausstrahlende Kugel vom Radius R beleuchte eine den Radius r besitzende Kugel und der Mittelpunktsabstand beider sei d. Welches Stück der Kugel wird beleuchtet? — Beispiel: a) $R = 20$, $r = 6$, $d = 72$ mm; b) $R = 111{,}86 \cdot r$, $d = 23984 \cdot r$.

8. Wie hoch müfste man sich über die Erde ($r = 858$ Ml.) erheben, um eine Fläche f (z. B. Europa = 182 200 Qdtml.) zu übersehen?

Zone. **9.** Welche Fläche hat eine Kugelzone, für welche bekannt sind: a) der Kugelradius r und je die Abstände d_1 und d_2 der Begrenzungskreise vom Mittelpunkt? b) die Radien ϱ_1 und ϱ_2 der beiden Begrenzungskreise und ihr Abstand h von einander?

10. Welche Gesamtoberfläche hat eine Kugelzone, von welcher die Höhe h, der Radius ϱ_1 des gröfseren Begrenzungskreises und der Kugelradius r bekannt sind?

11. Wendekreis und Polarkreis liegen auf der Erde unter 23°27′, bezw. 66°33′ geogr. Breite. Welche Gröfse haben die fünf Erdzonen? ($r = 6370$ Km.)

12. Wie mufs, parallel der Grundfläche einer Halbkugel, eine Ebene gelegt werden, damit die zwei Teile gleichgrofse a) krumme Oberfläche, b) Gesamtoberfläche erhalten?

13. Welche Gröfse hat der Teil der Erdoberfläche, welcher zwischen 47°20′ und 54°10′ n. Br. und zwischen 24° und 36° ö. L. liegt?

14. Kann die Gesamtoberfläche einer Zone gleich der der zugehörigen Kugel sein? Gegeben sei der Kugelradius r und der Radius ϱ des gröfseren Begrenzungskreises.

Vermischtes. **15.** Einer Kugel seien (mit parallelen Grundflächen) ein gleichseitiger Cylinder und Kegel ein- und umbeschrieben. Wie verhalten sich die a) Mantelflächen, b) Gesamtoberflächen der fünf Körper? c) In welche Teile teilt der eingeschriebene Cylinder die Kugelfläche?

16. In welchem Verhältnis stehen die zwei Teile, in welche die Axe eines Kugelsektors (s. §. 23, 3) durch den Grundkreis seines Kegels geteilt wird, wenn hierdurch zugleich die Gesamtoberfläche halbiert wird?

17. Über dem Grundkreis einer Halbkugel stehe ein gerader Kegel von doppelter Höhe. Wie wird durch diesen die Kugelfläche geteilt? Antwort: Wie 1 : 4.

18. Ein regelmäfsiges Sechseck, dessen Seite $2a$ sei, rotiere um die Verbindungsgeraden zweier gegenüberliegenden Ecken und zweier solcher Seitenmitten. Welche Beziehung besteht zwischen den Oberflächen der entstehenden Körper und denen der um- und eingeschriebenen Kugel?

19. Keppler glaubte, dafs die Entfernungen des Jupiter und Saturn von der Sonne sich verhalten, wie die Radien zweier Kugeln,

deren eine einem Würfel umbeschrieben, die andere einbeschrieben ist. Wie würden sich hiernach diese Entfernungen verhalten?

§. 9.

1. Was läfst sich aus dem Satze $e + f - k = 2$ über gerade oder ungerade Anzahlen von Ecken und Flächen folgern, falls die Zahl der Kanten a) gerade, b) ungerade ist?

2. Um und in jeden regelmäfsigen Vielflächner läfst sich eine Kugel beschreiben, welche durch die Ecke geht, bezw. die Seitenflächen berührt. Beweis? — Andeut.: Suche für 2 anstofsende Vielecke die Mittelpunkte und ziehe durch diese je die Normale der betreffenden Ebene.

3. Man soll den Neigungswinkel, ebenso die Radien der Um- und Inkugel zweier Seitenflächen eines regelmäfsigen Vielflächners berechnen. — Antwort: Tetr. $= 70^0 31' 43{,}6''$.

4. Welchen Bedingungen müssen die Strecken a, b, c in Aufg. 11 der Üb. des §. 7 (S. 166) genügen, damit der Körper ein regelmäfsiges Tetraëder sei?

5. Man nennt halbregelmäfsige (Archimedische) Körper die, welche bei gleichen Kanten und kongruenten Ecken von regelmäfsigen Vielecken verschiedener Art begrenzt sind. Von solchen gilt der Satz, dafs nie mehr als 3 verschiedene Arten von regelmäfsigen Vielecken Seitenflächen sein können.

6. Die Anzahl der Oberflächenwinkel (d. i. der Kantenwinkel, welche zugleich Winkel der Oberfläche sind) eines f-Flächners von k Kanten ist $= 2k$.

7. Die Summe der Oberflächenwinkel ist im f-Flächner von k Kanten und e Ecken $= (k - f) \cdot 4R = (e - 2) \cdot 4R$.

8. Ferner ist in einem solchen Körper stets a) $3f < 2k$, b) $3e \leq 2k$, c) $3e > k$, d) $3f > k$. Andeut.: Die Zahl der Kanten oder Flächen an einem Eck ist mindestens 3; c) und d) folgen mit Hülfe des Euler'schen Satzes aus a) und b).

Aufgaben zum sechsten Kapitel.

(Körperinhalt.)

Vorbemerkung. Als Einheit des Körpermafses gilt meist ein Kubikmeter (cbm); die Unterabteilungen, je 1000teilig, heifsen Kubikdecimeter (cdm), Kubikcentimeter (ccm), Kubikmillimeter (cmm). Der Raumgehalt des Kubikdecimeters heifst auch Liter (l); der Kubikmeter heifst auch Ster; 100 l sind ein Hektoliter. — Das Gewicht reinen Wassers, welches auf der Pariser Sternwarte bei 4^0 C. den Raumgehalt eines Kubik-

centimeters füllt, heifst ein **Gramm** (g), mit seinen zehnteiligen Oberabteilungen Dekagramm, Hektogramm, **Kilogramm** (kg) und eben solchen Unterabteilungen Decigramm, Centigramm, Milligramm (mg). — Das specifische Gewicht eines Stoffes giebt an, wieviel Kilogramm ein Kubikdecimeter (Liter), oder wieviel Gramm ein Kubikcentimeter des Stoffes wiegt.

§. 10.

Prisma.

1. Man soll den Inhalt eines Würfels berechnen, wenn von demselben gegeben ist: a) die Kante ($k = 2$ m 7 cm); b) die Oberfläche f (= 17,34 qcm); c) die Flächendiagonale d; d) die Körperdiagonale D; e) der Umfang u einer Diagonalebene.

2. Wenn sich a) ein Würfel mit der Kante a, b) ein Quader mit den Kanten a, b, c bei einer gewissen Temperaturänderung für jede Längeneinheit um α ändert, um wieviel ändert sich sein Raumgehalt?

3. Genügt ein 10 m langes, 5 m breites und 350 cm hohes Schulzimmer für 50 Schüler, wenn das Gesetz verlangt, dafs auf jeden Schüler 2,9 cbm Luftraum gerechnet werden?

4. Berechne die Inhalte der folgenden in §. 6 angegebenen Körper, nämlich der Nummern:

a) 26; b) 27; c) 28; d) 29; e) 30.
f) 32, b — f; g) 33; h) 37; i) 39.

Cylinder.

5. Ein äufserlich gerades prismatisches Gefäfs habe die Höhe h und als Grundfläche den Teil eines Quadrats, das gleichmäfsig auf je $\frac{1}{n}$ der Kantenlänge a abgeeckt ist; von oben ist es cylindrisch ausgebohrt, so dafs die geringste Wandstärke überall gleich d ist. Welchen Raumgehalt hat das Gefäfs selbst?

6. Eine Barometerröhre habe 11 mm lichten Durchmesser und das Quecksilber stehe darin 76 cm hoch. Welches Gewicht hat dieses? Wie grofs ist demnach der (Quecksilber- oder) Luftdruck auf 1 qcm?

7. In eine hohle eiserne cylindrische Strafsenwalze, deren Länge und Höhe im Lichten bezw. 1 m 20 cm und 1 m 10 cm beträgt, ist bis über die Hälfte soviel Wasser eingefüllt worden, dafs dessen Oberfläche 0,6 qm mifst. Wie tief steht das Wasser? und wie schwer ist es?

8. Ein massiver Cylinder schwimme bei horizontaler Lage der Axe so auf Wasser, dafs er um die Hälfte seines Radius r unter Wasser ist. Wie grofs ist das specifische Gewicht des Stoffes? (Das Gewicht des verdrängten Wassers ist gleich dem Gewicht des schwimmenden Körpers.)

9. Ein wagrecht liegender hohler Cylinder, dessen lichter Durchmesser 5 dm ist und dessen Länge 12 dm, ist noch so weit mit

Flüssigkeit gefüllt, dafs ein lotrecht eingetauchter Stab 1 dm hoch benetzt wird. Wieviel Liter der Flüssigkeit sind dies?

10. Berechne die Inhalte der in §. 7 (S. 165 ff.) bestimmten Körper, nämlich in No.: **Pyramide.**

a) 17; b) 18; c) 9; d) 11; e) 12; f) 19;
g) 22; h) 23, wobei die Grundkante $= a$ sei; i) 26;

11. Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche sei der Körperinhalt k und der Inhalt i eines durch zwei Gegenseitenkanten gelegten Schnittes gegeben. Welche Gröfse haben die am Körper vorkommenden Winkel von a) Kanten mit Flächen? b) Kanten mit Kanten? c) Flächen mit Flächen?

12. Welchen Inhalt hat eine a) vierseitige, b) fünfseitige gleichkantige Pyramide?

13. Von einem Tetraëder seien die Kanten eines Eckes nach Länge und paarweiser Winkelbildung gegeben. Wie grofs ist sein Inhalt?

14. Welchen Inhalt hat ein gleichseitiger Kegel, dessen a) Seitenlinie s ist? b) Höhe h ist? **Kegel.**

15. Bestimme den Inhalt eines Kegels, dessen Netz ein a) Quadrant, b) Sextant, c) Halbkreis ist.

16. Ein Dreieck, dessen Seiten 44, 37, 15 sind, rotiere nach einander um jede der Seiten. Welche Körperinhalte entstehen so?

17. Nach den Bezeichnungen in §. 7, 27 (S. 168) und Benennung des Kegelinhaltes mit i bestimme man:

a) i aus m und s; b) i aus r und α; c) i aus m und α;

d) r aus i und s; e) i aus r und m; f) i aus m und $\frac{r}{s} = v$.

18. Mit einem geraden Kegel, dessen Grundradius r und Seitenlinie s ist, habe ein gleichseitiger Kegel gleiche a) Mantelfläche, b) Gesamtoberfläche. Wie grofs ist der Inhalt des letzteren?

19. Von einem schiefen Kegel kennt man die gröfste Seitenstrecke a, die kleinste b und den Durchmesser der Grundfläche c. Man soll den Kubikinhalt bestimmen. $a = 5{,}8$, $b = 4{,}1$, $c = 5{,}1$.

20. Ein Kegel, dessen Halbmesser r, Höhe h und specifisches Gewicht s ist, schwimmt mit der Basis nach unten im Wasser. Wie weit sieht er über dasselbe heraus?

21. Von einem Pyramidenstumpf seien die Grundflächen gegeben und a) die Höhe der Ergänzungspyramide; wie grofs ist ihr Inhalt? b) der Inhalt des Stumpfes; wie grofs ist der Inhalt der Ergänzungspyramide? **Pyramiden- und Kegelstumpf.**

22. Ein Pyramidenstumpf, dessen Höhe h und dessen Grundflächen regelmäfsige Sechsecke mit den Seiten a und b sind, werde in Mitten der Höhe durch einen zu den Grundflächen parallelen Schnitt geteilt. In welchem Verhältnis findet die Teilung a) des Inhalts, b) des Mantels statt?

23. Ein regelmäſsiges dreiseitiges Prisma werde von einer Ebe geschnitten, welche durch eine Grundkante geht und mit der Grun fläche den Winkel α macht. Wie groſs ist die Oberfläche und de Inhalt des abgeschnittenen Körpers?

24. Ein Baumstamm habe die Gestalt eines Kegelstumpfe Die Umfänge seiner Endflächen seien 2,12 m und 1,97 m, seine Län 9 m. Wieviel Kubikdecimeter Holz enthält er?

25. Wenn r_1, r_2, h die Abmessungen eines geraden Kegelstumpfe sind, so soll man berechnen: a) J aus $r_1 = 8{,}2$, $r_2 = 5{,}7$, $h = 4$ b) h aus $J = 10\,000$, $r_1 = 12{,}3$, $r_2 = 8{,}05$; c) r_1 aus $r_2 = 2{,}5$ $h = 6$, $J = 180$.

26. Man soll den Inhalt eines geraden Kegelstumpfes berechnen von welchem gegeben ist: a) die Seitenlinie s, ihr Neigungswinkel gegen die gröſsere Grundfläche und der Radius r_1 der letzteren (z. B $s = 17$, $\alpha = 69^0$, $r_1 = 19$); b) der Mantel m, das Verhältnis de Grundflächen $p:q$ und der Winkel 2α des Axenschnitts im Ergänzungs kegel (z. B. $m = 537$, $p:q = \frac{121}{49}$, $2\alpha = 50^0$); c) die Höhe h, de Mantel m und die Differenz d der Grundflächen.

27. Von einem Doppelkegel seien die Radien der Begrenzungs kreise r_1 und r_2 und der Abstand ihrer Flächen h. Wie groſs is das Volumen derselben?

28. Wenn ein regelmäſsiges Fünfeck, dessen Seite s ist, um di Mittelnormale einer Seite rotiert, wie groſs ist die Oberfläche un das Volumen des Körpers, welcher hierdurch entsteht?

Vermischtes.

29. Wenn über einer Strecke s als Grundseite ein a) Quadrat, b) gleichseitiges Dreieck, c) gleichschenkeliges mit dem Quadrat gleichhohes Dreieck gezeichnet wird und jede der Figuren um die Mittelnormale zu s rotiert, in welchem Verhältnis stehen Mantel-flächen, Gesamtoberflächen und Inhalte der Körper?

30. Die Fläche eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind, weniger der des einbeschriebenen Quadrats, von welchem a) nur ein Eck, b) eine Seite auf der Hypotenuse liegt, rotiere bei a) um die Kathete a, bei b) um die Hypotenuse als Axe. Wie groſs sind Mäntel, Gesamtoberflächen und Inhalte der Körper?

31. Bestimme das Verhältnis der Inhalte des einem regelmäſsigen Tetraëder ein- und des umbeschriebenen Kegels.

32. Welchen Fehler begeht man, wenn man einen Kegelstumpf (Baumstamm) durch einen gleichlangen Cylinder mit Mittelradius ersetzt?

33. Welche Abmessungen muſs ein a) doppelt so hohes als weites, b) doppelt so weites als hohes Cylindergefäſs haben, welches 1 Liter Inhalt haben soll?

34. Gegeben sei ein gleichseitiger Kegel, und diesem soll ein auf der Grundfläche aufstehender gerader Cylinder einbeschrieben werden. Ist es möglich, dafs letzterer a) halbe Mantelfläche, b) halbe Gesamtfläche, c) halben Inhalt des Kegels erhalte?

35. Der Inhalt eines gleichseitigen Kegels sei i. Man soll Oberfläche und Inhalt der demselben ein- und umgeschriebenen Pyramide berechnen, deren Grundfläche ein regelmäfsiges a) Viereck, b) Dreieck, c) Sechseck ist.

36. Welches Verhältnis besteht zwischen den Oberflächen (bezw. Inhalten) eines gleichseitigen Cylinders und gleichseitigen Kegels, wenn beide denselben Inhalt (bezw. dieselbe Oberfläche) haben?

37. Ein Prismatoid, d. i. ein Körper, welcher begrenzt ist von zwei in parallelen Ebenen liegenden Vielecken und den Dreiecken, welche je eine Seite des einen Vielecks mit einem benachbarten Eck des anderen verknüpft (bezw. den Trapezen zweier benachbarten parallelen Seiten der Vielecke), werde von einem Punkt der Mittelparallelebene in Pyramiden zerlegt, welche die Begrenzungsflächen des Körpers zur Basis haben. Es ist nachzuweisen: a) Schneidet eine der dreiseitigen Pyramiden aus der Mittelparallelebene eine Fläche f aus, so ist ihr Volumen $^2/_3 fh$, wenn h der Abstand der parallelen Ebenen ist. (Das Volumen ist das Vierfache der von f und dem gegenüberliegenden Eck begrenzten Pyramide). b) Sind G, g, m die Grundflächen und Mittelfläche, h der Abstand der ersteren, so ist das Volumen des ganzen Körpers: $\frac{h}{6}(G + g + 4m)$.

§. 11.

Kugel.

1. Welchen Inhalt hat eine Kugel, deren a) Radius r (= 4,5 mm), b) Hauptkreisumfang u (= 14,7 cm), c) Oberfläche o (= 200 qdm) ist? — Welches Gewicht haben diese Kugeln, wenn dieselben bei a) aus Tannenholz (sp. G. = 0,5), bei b) aus Eisen (sp. G. = 7), bei c) aus Kalkstein (sp. G. = 2,72) besteht?

2. Welchen Radius und welche Oberfläche hat eine Kugel, deren Inhalt a) 1400 kcm, b) I, c) $\frac{4a}{\sqrt{\pi}}$ beträgt?

3. Erde, Sonne und Mond mögen als Kugeln betrachtet werden und ihre Radien seien bezw. r, $111{,}9 \cdot r$, $0{,}27 \cdot r$; der Abstand der Mitte von Mond und Erde sei $= 59{,}9 \cdot r$. Es fragt sich: a) Wie viele Erdkugeln liefsen sich aus der Sonne bilden? b) Wie viele Erde und Mond einhüllend berührende Kugeln liefsen sich aus der Sonne bilden?

4. Aus drei eisernen Kugeln, deren Radien r_1, r_2, r_3 sind (z. B. 5, 8, 12 cm), wird eine einzige gegossen. Welchen Durchmesser und welches Gewicht hat diese? (Sp. G. = 7,2).

5. Wie viele Bleikugeln von 12 mm Durchmesser lassen sich aus a (z. B. 30) kg Blei (sp. G. = 11,4) giefsen?

6. Welchen Halbmesser mufs eine kupferne Hohlkugel (spec. G. = 9) mindestens haben, damit sie bei 1 cm Wanddicke noch ganz untergetaucht im Wasser schwimmt?

Segment. **7.** Zu welcher Kugel gehört ein Segment, dessen Inhalt v (0,223 kbm) und dessen Höhe h (6,3 cm) ist?

8. Ein Gefäfs, dessen Hohlraum die Gestalt eines Kugelsegments hat und 12 mm tief ist, läfst sich mit 98 g Quecksilber (spec. Gew. = 13,6) füllen. Wie grofs ist dessen Oberfläche?

9. Welchen Inhalt hat ein Segment einer Kugel, wenn jene die Oberfläche a^2 (= 42 qcm) und diese die Oberfläche b^2 (= 0,7 qdm) hat?

10. Welches Verhältnis haben die Teile einer Kugel, wenn ihr Durchmesser durch Parallelebenen im Verhältnisse von $a:b:c:c:b:a$ geteilt wird? (Beisp.: Erdzonen.)

11. Ein Kessel soll hergestellt werden, welcher v Hektoliter fafst und die Form eines Kugelsegments hat der Art, dafs der Durchmesser des obern Begrenzungskreises gleich der Entfernung des Randes vom tiefsten Punkt sei. Wie grofs mufs diese Entfernung sein, wie grofs der Kugelradius und wie viel Quadratdecimeter Kupferblech sind dazu erforderlich?

12. Eine bikonvexe Glaslinse, deren Flächen die gleiche Krümmung haben, hat einen Durchmesser von 9 cm und in der Mitte eine Dicke von 8 mm. Wie grofs ist der Halbmesser der Flächen und wie schwer ist die Linse, wenn das specifische Gewicht des Glases 2,6 ist?

Sektor. **13.** Man soll den Inhalt eines Kugelsektors bestimmen, von welchem gegeben ist: a) der Radius ϱ des begrenzenden Kreises und dessen Abstand h_1 vom Mittelpunkt; b) der Centriwinkel 2α und die Fläche f der zugehörigen Haube; c) der Kugelradius r und die Fläche f seines Axenschnittes.

14. Ein Kreissektor, dessen Radius r und Centriwinkel 60^0 ist, rotiere zuerst um die Winkelhalbierende, und dann auch um einen seiner begrenzenden Radien. Wie grofs sind die entstehenden Sektoren? und ihr Verhältnis?

15. Wie grofs ist die Höhe eines Kugelsegments, das halb so grofs ist, als der Kugelsektor, zu welchem es gehört, wenn der Kugelradius r ist?

Körperliche Zone. **16.** Welchen Kubik-Inhalt hat eine Kugelzone, von welcher der Kugelradius r und die Radien ϱ_1 und ϱ_2 der beiden Grundflächen bekannt sind? — Beispiel: $r = 1{,}2$; $\varrho_1 = 0{,}8$; $\varrho_2 = 0{,}6$.

17. In einem Antiparallelogramm seien die parallelen Seiten

$2a$ und $2b$ $(a > b)$, die schiefe Seite sei c und ein spitzer Winkel sei δ. Nun rotiere die Figur und ihr umgeschriebener Kreis um die Mittelnormale zu den Parallelseiten. Wie grofs ist die entstehende Zone, falls gegeben sind: a) a, b, c; b) a, c, δ; c) b, c, δ; d) $2a - 2b = d$ und δ.

18. Eine Kugel werde konisch ausgebohrt, so dafs die Axe des Kegels (Konus) durch den Kugelmittelpunkt geht. Der entstehende ringartige Körper habe die Höhe h und Begrenzungskreise, deren Radien ϱ_1 und ϱ_2 sind; wie grofs ist das Volumen dieses Körpers?

19. Eine Kugel soll konisch ausgebohrt werden, so dafs die Axe des Kegels durch den Mittelpunkt geht, seine Spitze in die Oberfläche der Kugel fällt und der übrig bleibende Kugelteil die Hälfte der Kugel ist. Es soll durch Rechnung und durch Konstruktion die Höhe des übrig bleibenden Kugelteils bestimmt werden, wenn der Kugelradius r gegeben ist.

Vermischtes.

20. Wie verhalten sich die Inhalte der fünf Körper in Übungsaufg. §. 8, 14 (S. 170)?

21. Dieselbe Aufg. wie §. 8, 15, wenn der Inhalt halbiert sei.

22. Dieselbe Aufg. wie §. 8, 16 für den Inhalt der Kugelteile.

23. In welchem Verhältnis werden Oberfläche und Inhalt einer Kugel geteilt, wenn die Teilung durch die Ebene der Fläche des einbeschriebenen regelmäfsigen a) Hexaeders, b) Tetraeders besorgt wird?

24. Die Aufg. in §. 8, 17 (S. 170) ist auch für die betreffenden Inhalte zu lösen.

25. In einem mit der Spitze abwärts gekehrten geraden Kegel, dessen Axe vertikal und dessen Axenschnittwinkel 2α sei, befinde sich Wasser von der Tiefe h. In dieses werde eine Kugel vom Radius r ganz untergetaucht. Wie hoch steigt das Wasser?

Aufgaben zum siebenten Kapitel.

§. 12.

§. 26.

1. Von einer quadratischen Pyramide ist aus dem Winkel α zwischen Seiten- und Grundfläche der Winkel zweier Seitenflächen 2β zu berechnen, oder umgekehrt; ferner das Verhältnis der Höhe zur halben Diagonale der Grundfläche (Haupt- und Nebenaxe).

Zirkon: $\alpha = 42^0 10'$; $\beta = 61^0 40'$.

2. Ebenso von einer regelmäfsigen sechsseitigen Pyramide.

Apatit: $\alpha = 40^0 18'$; $\beta = 71^0 8'$.

3. Von einer axigen Pyramide, deren Grundfläche eine Raute ist, ist der Winkel α zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche

und der Winkel zweier benachbarten Seitenflächen 2β gegeben. Es sind die Winkel der Seiten- und Grundkante mit den Diagonalen der Grundfläche zu bestimmen, sowie das Verhältnis der halben Diagonalen unter einander und zur Höhe; ferner der Winkel γ, welchen eine der genannten Seitenflächen mit einer weiteren Seitenfläche bildet.

Schwefel: $\alpha = 71^0 38{,}5'$, $\beta = 53^0 19'$, $(\gamma = 42^0 29')$.

4. Von einem Rhomboëder soll aus dem Ebenenwinkel 2α an einer Polkante der Ebenenwinkel 2β an der Seitenkante berechnet werden oder umgekehrt; ferner das Verhältnis der Hauptaxe zur Nebenaxe (vgl. Aufg. §. 6, 15).

Kalkspath: 1) $2\alpha = 105^0 8'$; 2) $2\alpha = 135^0$; 3) $2\alpha = 79^0$.

5. Trägt man auf einem rechtwinkligen Dreistrahl vom Scheitel gleiche Strecken nach allen 6 Richtungen ab und legt durch die Grenzpunkte je zweier solcher Strecken eine Ebene parallel zum dritten Strahl, so entsteht ein von 12 kongruenten Rauten umschlossener Körper (Rhombendodekaëder). Die Diagonalen der Rauten stehen im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$. Es soll der Winkel zweier Ebenen an einer Kante berechnet werden.

6. In dem, Fig. 132 (S. 138) dargestellten Pentagondodekaëder seien die Winkel der Ebenen an der Kante $E_1 A_1$ oder $E_1 A_2$ oder $E_1 A_3$ gleich 2α. Es ist zu berechnen der Winkel α dieser Ebene mit der Ebene $A_1 A_2 A_3$ (Oktaëderebene). Diese Ebene schneide die Ebene $X_1 O Z_1$ in einer Geraden $A_3 V$, welche mit OX_1 und OZ_1 $\frac{1}{2}$ R bildet. Beide Ebenen schliefsen den halben Winkel des Oktaeders ($\beta = 54^0 44'$) ein und bestimmen mit der Ebene $A_1 A_3 X$ ein Dreikant, aus welchem der Winkel $X A_3 V$ berechnet werden soll und mit Hülfe dieses Winkels das Verhältnis $OX : OZ_1$.

Schwefelkies: $2\alpha = 113^0 35'$.

§ 28. **7.** Es sollen die Entfernungen zwischen folgenden Orten bestimmt werden, wobei der Erdradius = 6370 Km angenommen wird.

Ort:	Geogr. Breite:	Länge von Berlin in Zeit: h	min	sec
Berlin:	$+ 52^0 30{,}3'$	0	0	0
Paris:	$+ 48^0 50{,}2'$	+ 0	44	14
Wien:	$+ 48^0 12{,}6'$	− 0	11	56
Greenwich:	$+ 51^0 28{,}6'$	+ 0	53	35
Petersburg:	$+ 59^0 56{,}5'$	− 1	7	39
New-York:	$+ 40^0 52{,}7'$	+ 5	49	31
Sydney:	$- 33^0 51{,}7'$	− 9	11	25.

8. Unter welchem Winkel gegen den Meridian mufs ein Schiff abfahren, um in kürzester Linie von Nizza ($\varphi_1 = 43^0 40'$, $l_1 = 4^0 55'$) nach Algier ($\varphi_2 = 36^0 45'$, $l_2 = 0^0 45'$) zu kommen?

9. Ein Schiff lief von Madeira ($\varphi = 32^0 45'$, $l = 17^0$ westl. von Greenwich) in der Richtung nach Südsüdwest mit 9 Knoten Fahrt, d. h. indem es stündlich 9 Seemeilen zurücklegte. Welches war der Ort des Schiffes nach 3 Tagen? — [Eine Seemeile ist die Länge einer Bogenminute des Meridiankreises.]

10. Es ist die Höhe h eines Sternes über dem Horizontalkreis gemessen und das Azimuth a, d. h. der Winkel der Ebene des Höhenkreises mit der Meridianebene. Die geographische Breite des Ortes sei φ, also der Winkel zwischen den Geraden nach dem Pol und dem Zenith $= (90^0 - \varphi)$. Aus dem sphärischen Dreieck „Pol P, Zenith Z und Stern S" ist der Polabstand PS des Sterns, bezw. dessen Äquatorabstand oder Deklination $d = 90^0 - p$ zu berechnen.

11. Pol P, Zenith Z und Sonne S bestimmen ein sphärisches Dreieck, in welchem aus dem Winkel s am Pol die Zahl der Stunden sich ergiebt bis zur Stellung der Sonne im Meridian, d. i. bis zum wahren Mittag, indem jeder Stunde 15^0 entsprechen. Am 14. Juni 1883 wurde in Heidelberg ($\varphi = 49^0 24' 47''$) morgens um $8^h\ 50^{min}$ der Zenithabstand des oberen Sonnenrandes $= 44^0 58' 0''$ gemessen, wozu noch $55''$ wegen der Refraktion des Lichtes und $15' 47''$ für den Halbmesser der Sonne zu addieren sind, um die Zenithdistanz z der Sonnenmitte zu erhalten. Das nautische Jahrbuch giebt für diese Zeit die Deklination der Sonne $d = 23^0 15' 44''$. Von der zu berechnenden (wahren) Uhrzeit sind nach diesem Jahrbuch 7^{sec} zu subtrahieren, um für den betr. Tag die mittlere Uhrzeit zu erhalten. — Zur Kontrole wurde eine zweite Messung gemacht um $8^h\ 57^{min}$, wobei sich für die betreffenden Zahlen der Reihe nach ergab: $43^0 53' 30''$, $53''$, $15' 47''$, $23^0 15' 45''$. Um wie viel Sekunden war die benutzte Uhr zu korrigieren?

12. Es ist für einen Ort von gegebener geographischer Breite (s. Aufg. 7) die Dauer des längsten und kürzesten Tages zu berechnen, wenn man annimmt, dafs die Deklination der Sonne hierbei $\pm 23^0 37'$ und die Sonnenmitte wegen der Strahlenbrechung am Horizont erscheine, wenn ihr Mittelpunkt $35'$ unter dem Horizont ist.

13. Für dieselbe geographische Breite und dieselben Tage ist die Dauer der Dämmerung zu bestimmen, wenn diese durch den Moment begrenzt ist, da die Sonne 18^0 unter dem Horizont ist.

14. Aus der Uhrzeit der Beobachtung (t^h vor Mittag), dem Zenithabstand z und der Deklination d der Sonne soll die geographische Breite des Beobachtungsortes bestimmt werden.

15. Aus den Zenithabständen z und z_1 eines Sternes zu verschiedenen Zeiten (vor der Kulmination), dem Zeitunterschied beider Beobachtungen t^h (Sternzeit) und der Deklination des Sternes d soll die geographische Breite des Beobachtungsortes bestimmt werden.

(Die Stellungen S und S_1 des Sterns und der Pol P bestimmen ein sphärisches Dreieck; in welchem $PS = PS_1 = 90^0 - d$ und $\sphericalangle P$ durch t gegeben ist. Man berechne hieraus SS_1 und $\sphericalangle ZSP$; ferner aus dem Dreieck SS_1Z (wobei Z das Zenith sei), in welchem nun alle Seiten bekannt sind, $\sphericalangle ZSS_1$; schliefslich im $\triangle ZPP_1$ aus $\sphericalangle ZSP = PSS_1 \pm ZSS_1$ und aus z, d die Gröfse $ZP = 90^0 - \varphi$).

Aufgaben zum achten Kapitel.

§. 13.

§. 29. **1.** Unter welcher Bedingung können die Punkte einer Geraden als Projektionen aller Punkte einer Ebene betrachtet werden?

2. Unter welcher Bedingung werden die Ebenen eines Ebenenbüschels als Strahlenbüschel projiciert?

3. Zwei parallele Gerade ergeben in einem Ebenenbüschel p. ä. Punktreihen.

4. Zwei parallele Ebenen ergeben in einem Ebenenbüschel p. I. Strahlenbüschel.

5. Die Schnittpunkte zweier Strahlen eines Punktes mit einem Ebenenbüschel bilden zwei perspektivische Punktreihen, deren Centrum liegt im Schnittpunkt der Ebene beider Geraden mit dem Träger des Ebenenbüschels.

6. Die Schnittgeraden zweier Ebenen mit einem Ebenenbüschel bilden zwei perspektivische Strahlenbüschel, deren Axe die Schnittgerade ersterer Ebenen ist.

7. Irgend zwei perspektivische Strahlenbüschel gehören einem Ebenenbüschel an, dessen Axe die Verbindungsgerade der beiden Scheitel ist.

8. In einem Ebenenbüschel ergeben die Schnittpunkte irgend welcher Geraden, sowie die Schnittgeraden irgend welcher Ebenen projektivische Gebilde.

9. Irgend projektivische Punktreihen oder Strahlenbüschel einer Ebene können als Bild der Schnittpunkte von Geraden, bezw. der Schnittgeraden von Ebenen mit einem einzigen Ebenenbüschel aufgefafst werden.

§. 30. **10.** In einem vollständigen Viereck $ABCD$ seien auf einem beliebigen Strahl des Nebenecks E der Seiten AB und CD zwei beliebige Punkte G und H angenommen, von welchen der erstere mit den Ecken A und D durch

10'. In einem vollständigen Vierseit $abcd$ seien durch einen beliebigen Punkt der Nebenseite e der Ecken ab und cd zwei beliebige Gerade g und h gezogen, von welchen die erstere die Seiten a und d in den Punkten A_1, D_1, die letztere

die Geraden a_1, d_1, der letztere mit den Ecken B und C durch b_1, c_1 verbunden werde. Es ist zu beweisen, dafs die Schnittpunkte $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ auf einem Strahl des Nebenecks von AD und BC liegen.

(Mittels §. 30, 1. Oder dadurch, dafs man zunächst den Strahl EHG aufserhalb der Ebene des Vierecks annimmt, und §. 1, 5 a′ benützt.)

die Seiten b und c in B_1, C_1 schneiden möge. Es ist zu beweisen, dafs die Verbindungsgeraden $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$ einander in einem Punkt der Nebenseite der Ecken ad und bc schneiden.

(Mittels §. 30, 1. Oder dadurch, dafs man zunächst annimmt, ab und cd seien zwei verschiedene Ebenen und §. 1, 5 a′ benützt.)

11. Bewegen sich zwei veränderliche Dreiecke so, dafs die Ecken in drei festen Geraden hingleiten und zwei Seiten sich um zwei feste Punkte drehen, so dreht sich auch die dritte Seite um einen festen Punkt der Verbindungsgeraden der beiden andern festen Punkte.

11′. Bewegen sich zwei veränderliche Dreiseite so, dafs die Seiten sich um 3 feste Punkte drehen und 2 Ecken auf 2 festen Geraden hingleiten, so gleitet auch das dritte Eck auf einem festen Strahl des Schnittpunkts der beiden anderen festen Geraden hin.

12. Aus diesen beiden Sätzen soll gefolgert werden:

a) Wenn zwei Punktreihen mit einer dritten p. sind, so sind sie es untereinander und die drei Centra liegen auf einer Geraden.

b) Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen n-ecks in n festen Geraden, die durch einen Punkt gehen, und drehen sich $(n-1)$ Seiten desselben um ebensoviele feste Punkte, so drehen sich auch die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ Verbindungsgeraden der Ecke um andere feste Punkte.

a′) Wenn 2 Strahlenbüschel mit einem dritten p. sind, so sind sie es untereinander und die drei Axen gehen durch einen Punkt.

b′) Drehen sich die Seiten eines veränderlichen n-seits um n feste Punkte, die in einer Geraden liegen und bewegen sich $(n-1)$ Ecken derselben in ebensoviel festen Geraden, so gleiten auch die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ Schnittpunkte der Seiten in andern festen Geraden hin.

13. Wenn das Projektionscentrum und zwei perspektivische Punkte (in einer Ebene) gegeben sind, wie findet man a) bei gegebener Axe die Fluchtgeraden oder b) bei einer gegebenen Fluchtgeraden die andere und die Axe? — Wie findet man noch zu einem Punkt oder einer Geraden mittels der gegebenen Stücke den perspektivischen Punkt oder die perspektivische Gerade? §. 31.

14. Die Sätze §. 30, 1 u. 1′ sollen für ebene Figuren nach verschiedenen Methoden bewiesen werden: a) mit Hilfe metrischer Beziehungen (II. Teil, §. 22), b) mit Hilfe einer Projektion, für welche

eine Gerade der Figur Fluchtgerade ist, c) mit Hilfe der Auffassung der Figur als Grenzlage perspektivischer Figuren zweier Ebenen.

15. Nach der in §. 31, 5 (S. 84) angedeuteten Methode sind folgende Sätze zu beweisen:

a) II. Teil, §. 19, 4 b und 4' b'; — b) II. Teil, §. 17, 5, Zusatz.

Für §. 31 und 32, sowie für das IX. Kapitel verweisen wir auf Text und Aufgaben des II. Teils, V., VI. und VII. Kapitel.

Aufgaben zum zehnten Kapitel.

§. 14.

Sehnen und Tangenten des Kegelschnitts.

§. 37. **1.** Zu einem gegebenen Kegelschnitt und einem gegebenen Punkt ist die Polare zu konstruieren.

2. Zu einem gegebenen Kegelschnitt und einer gegebenen Geraden ist der Pol zu bestimmen.

3. Zwei beliebige (nicht konjugierte) Durchmesser eines Kegelschnitts bestimmen durch ihre Grenzpunkte und deren Tangenten ein Sehnen- und Tangentenparallelogramm. Die Diagonalen des letzteren sind konjugierte Durchmesser und zwar konjugiert den Seiten des Sehnenparallelogramms und bilden mit den Diagonalen des letzteren einen harmonischen Strahlenbüschel.

4. Der Satz: „In einem Tangentendreiseit schneiden einander die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten in einem Punkt" ist zu beweisen: a) Durch Zurückführung auf den Kreis und die Umkehrung des Satzes von Ceva. b) Durch Ableitung aus dem Satz von Brianchon. c) Durch die Projektion der Figur, so dafs a_1) ein Berührungspunkt oder b_1) zwei Berührungspunkte in unendliche Entfernung fallen.

5. Wie der vorhergehende Satz sei zu beweisen: Die Seiten eines Sehnendreiecks geben mit den jeweils gegenüberliegenden Seiten des zugehörigen Tangentendreiseits drei Schnittpunkte auf einer Geraden.

6. Zieht man in den Grenzpunkten eines Durchmessers und an einen Grenzpunkt einer zugeordneten Sehne Tangenten und verbindet deren Schnittpunkte mit den Grenzpunkten des Durchmessers, so fällt der Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden in die Mitte der Hälfte jener Sehne.

7. Zwei beliebige Tangenten bestimmen mit zwei parallelen Tangenten ein Vierseit, von welchem der Schnittpunkt zweier Nebenseiten auf den Durchmesser fällt, welcher den beiden Tangenten zugeordnet ist.

8. Verbindet man zwei Punkte der Peripherie eines Kegelschnitts mit den beiden Berührungspunkten zweier Tangenten und verlängert

diese vier Verbindungsgerade bis zu ihren beiden weiteren Schnittpunkten, so liegen letztere auf einer Geraden mit dem Schnittpunkt der Tangenten. Es soll dies bewiesen werden a) mittels einer einfacheren projektivischen Figur, b) mittels bekannter Sätze der Sehnenbezw. Tangenten-Vierecke oder Sechsecke.

9. Verbindet man die Berührungspunkte zweier Tangenten mit je einem weiteren Punkt des Kegelschnitts, so liegen die weiteren Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden und der Tangenten auf einer Geraden mit dem Schnittpunkt der Berührungssehne und der Geraden der beiden Peripheriepunkte. Beweis wie in der vorhergehenden Aufgabe.

10. Von einem Sehnenviereck, von welchem zwei Gegenseiten ein Nebeneck auf der Berührungssehne zweier Tangenten (oder auf deren Verlängerung) bilden, bestimmen zwei weitere Gegenseiten mit den beiden Tangenten ein Vierseit, von welchem zwei Nebenseiten einander in jenem Nebeneck schneiden.

11. Von einem Vierseit, gebildet aus zwei Tangenten und zwei Sekanten, die sich auf der Berührungssehne der ersteren (oder auf deren Verlängerung) schneiden, bestimmen die nicht durch diesen Schnittpunkt gehenden Nebenseiten in ihren eventuellen Schnittpunkten des Kegelschnitts ein Sehnenviereck, von dem ein Nebeneck in jenem Schnittpunkt liegt.

12. Die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, welche durch Gerade und Kreis allein nicht lösbar ist, wird auf folgende Weise mittels einer Hyperbel gelöst, deren Asymptoten normal zu einander sind. Man trägt den Winkel so an, dafs er mit dem Asymptotenwinkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam hat; vom Schnittpunkt des andern Schenkels mit der Hyperbel trägt man den doppelten Scheitelabstand dieses Punktes als Sehne in die Hyperbel ein. Die Gerade vom Scheitel zur Mitte dieser Sehne teilt den Winkel im Verhältnis 1:2. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist nachzuweiseu. (Man beachte, dafs die Sehnenmitte von den Schnittpunkten der Sehne und Asymptoten ebensoweit entfernt ist, als vom Scheitel.)

§. 15.

Bestimmungrn von Punkten und Tangenten der Kegelschnitte.

1. Von einem Kegelschnitt sind zwei parallele Tangenten und deren Berührungspunkte gegeben, aufserdem a) ein Punkt oder b) eine Tangente. Es sollen noch weitere Punkte bzw. Tangenten konstruiert werden. §. 38.

2. Es soll in ein Antiparallelogramm eine Ellipse gezeichnet werden, welche die drei Seiten desselben berührt und zwar eine der parallelen in der Mitte. Es sind die anderen Berührungspunkte zu

konstruieren und noch ein beliebiger weiterer Punkt oder eine Tangente.

3. Von einem Kegelschnitt sind 4 Punkte und die Tangente in einem derselben gegeben. Es sollen die Tangenten in den anderen Punkten konstruiert werden.

4. Von einem Kegelschnitt sind 4 Tangenten und der Berührungspunkt von einer derselben gegeben. Es sollen die Berührungspunkte der andern Tangenten bestimmt werden.

5. Von einem Kegelschnitt sind 4 Tangenten und ein Punkt der (unbekannten) Berührungssehne von zweien derselben gegeben. Es sind die Berührungspunkte zu bestimmen.

6. Von einem Kegelschnitt sind 4 Punkte und eine Gerade durch den (unbekannten) Schnittpunkt der Tangenten zweier dieser Punkte gegeben. Es sind diese Tangenten zu konstruieren.

7. Von einem Kegelschnitt ist ein Tangentenvierseit und ein Schnittpunkt einer Nebenseite desselben mit dem Kegelschnitt gegeben. Es ist die Tangente dieses Punktes zu bestimmen; ferner die Berührungspunkte des Tangentenvierseits.

8. Von einem Kegelschnitt ist ein Sehnenviereck und eine Tangente durch ein Nebeneck desselben gegeben. Es ist der Berührungspunkt dieser Tangente zu bestimmen; ferner die Tangenten in den Ecken des Sehnenvierecks.

9. Von einem Kegelschnitt sind 5 Punkte gegeben. Es ist der zweite Schnittpunkt eines Strahles durch einen dieser Punkte zu bestimmen.

10. Von einem Kegelschnitt sind 5 Tangenten gegeben. Es ist die zweite Tangente eines Punktes auf einer dieser Tangenten zu bestimmen.

11. Dreht man die Seiten eines veränderlichen Dreiecks QDS (Fig. 97a) um drei feste Punkte C, A, E, während zwei Ecken Q und S desselben auf zwei festen Geraden BA und BC hingleiten, so beschreibt das dritte Eck D einen Kegelschnitt, welcher durch den Schnittpunkt B beider festen Geraden geht.

12. Was wird aus dem Kegelschnitt des vorhergehenden Satzes, wenn die drei Drehpunkte auf einer Geraden liegen, oder auch die beiden Drehpunkte A und C und der Schnittpunkt B der beiden festen Geraden?

13. Dreht man zwei Gerade um zwei feste Punkte so, daſs ihr Schnittpunkt auf einer Geraden hingleitet, so beschreibt die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der beiden Geraden mit zwei festen Strahlen der Drehpunkte tangierend einen Kegelschnitt, der diese beiden festen Strahlen berührt. (§. 38, 1′).

14. Wird ein Sehnenviereck im Kegelschnitt so bewegt, daſs es

Sehnenviereck bleibt und dafs drei aufeinanderfolgende Seiten stets durch drei bestimmte Punkte gehen, die auf einer Geraden liegen, so dreht sich auch die vierte Seite um einen Punkt dieser Geraden. (Wiederholte Anwendung des Satzes von Pascal oder für den Fall, dafs die Gerade der drei Punkte den Kegelschnitt nicht schneidet, durch Projektion als Kreis, §. 40, 3).

15. Zwei Kegelschnitte können einander höchstens in zwei Punkten berühren.

16. Zwei Kegelschnitte, welche einander in einem Punkt berühren, können einander höchstens in zwei weiteren Punkten schneiden.

§. 16.

Perspektivische Kegelschnitte.

1. Wenn zwei Kegelschnitte einer Ebene einander in einem Punkt berühren (und in zwei weiteren Punkten schneiden), so sind sie 𝔭. in Bezug auf den Berührungspunkt als Centrum (und die Verbindungsgerade der Schnittpunkte als Axe). §. 40.

2. Wird ein Winkel, dessen Scheitel auf einem Kegelschnitt liegt, um diesen Scheitel gedreht, ohne seine Gröfse zu ändern, so bestimmen die Schnittpunkte seiner Schenkel mit dem Kegelschnitt eine Sehne, welche tangierend einen zweiten Kegelschnitt beschreibt. (Man nehme noch einen den Kegelschnitt im Scheitel des Winkels berührenden Kreis als 𝔭. entsprechende Figur zu Hilfe.)

3. Für alle Kreise, welche einen Kegelschnitt in einem Punkt berühren, sind die Projektionsaxen beider 𝔭. Linien parallel. (Da 𝔭. Sehnen zweier solcher Kreise parallel sind, so sind die Projektionen ihrer unendlich fernen Punkte im Kegelschnitt identisch).

4. Rückt von den in den vorhergehenden Aufgaben genannten Kreisen ein Schnittpunkt zwischen Kreis und Kegelschnitt in den Berührungspunkt (— Krümmungskreis —), so fällt ein weiterer Schnittpunkt in denjenigen Strahl des Berührungspunktes, welcher der Projektionsaxe parallel ist.

5. Zwei Kegelschnitte einer Ebene, welche zwei gemeinschaftliche Tangenten haben und beide je einerseits einer solchen liegen, sind 𝔭. in Bezug auf den Schnittpunkt der Tangenten als Centrum.

6. Alle Parabeln sind einander ähnlich; sie liegen 𝔭. ä., wenn sie einander in einem Punkt berühren und ihre Durchmesser parallel sind.

7. Der geometrische Ort der beiden Grenzpunkte der ideellen Berührungssehne der Punkte auf einem bestimmten Durchmesser eines Kegelschnitts ist ein zweiter Kegelschnitt, welcher ersteren in den Grenzpunkten des Durchmessers berührt (Supplementarkegelschnitt).

8. Wenn in einem Kegelschnitt ein Dreieck so bewegt wird, daſs seine Ecke stets auf dem Kegelschnitt bleiben, während zwei Seiten desselben sich um zwei feste Punkte drehen, so beschreibt die dritte Seite tangierend einen zweiten Kegelschnitt, welcher mit ersterem p. liegt in Bezug auf die Verbindungsgerade der beiden Punkte als Axe und deren Pol als Centrum.

9. Wenn ein Punkt auf einem Kegelschnitt hingleitet, während er mit zwei festen Punkten desselben durch zwei Gerade verbunden ist, so beschreibt die Verbindungsgerade der Punkte, in welchen diese beiden Geraden die Tangenten der festen Punkte schneiden, tangierend

9′. Wenn eine Gerade auf einem Kegelschnitt tangierend hingleitet, während sie zwei feste Tangenten desselben in zwei Punkten schneidet, so beschreibt der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden dieser Punkte mit den Berührungspunkten der festen Tangenten

einen zweiten Kegelschnitt, welcher mit dem ersteren p. ist zu dem Schnittpunkt der genannten Tangenten als Centrum und dessen Berührungssehne als Axe.

Die erzeugende Verbindungsgerade ist stets p. mit der Tangente des gleitenden Punktes.

Der erzeugende Schnittpunkt ist stets p. mit dem Berührungspunkt der gleitenden Tangente.

(Projiciert man die Figur so, daſs beide feste Punkte in unendliche Entfernung fallen, so ergeben sich p. ä. Hyperbeln).

§. 17.

Streckenverhältnisse der Fahrstrahlen.

§. 41. 1. Die Strecke zwischen den Brennpunkten eines Kegelschnitts wird durch die Tangente eines Punktes und deren Normale in diesem Punkt harmonisch geteilt im Verhältnis der Fahrstrahlen.

2. In einer Parabel sind die Schnittpunkte der Axe mit der Tangente eines Punktes und ihrer Normalen in diesem Punkt ebensoweit von dem Brennpunkt entfernt, als der Punkt selbst.

3. In einem Kegelschnitt liegt der mit einem Brennpunkt symmetrische Punkt in Bezug auf eine Tangente als Axe auf dem Fahrstrahl von dem andern Brennpunkt nach dem Berührungspunkt. Sein Abstand von letzterem Brennpunkt ist gleich der Hauptaxe.

4. In einem Kegelschnitt ist der geometrische Ort des Fuſspunktes der von einem Brennpunkt auf die Tangente gefällten Normale der Kreis, welcher den Kegelschnitt in beiden Scheiteln berührt. In der Parabel ist es die Scheitel-Tangente.

5. Der geometrische Ort des Mittelpunkts des Kreises, welcher durch einen Punkt geht und eine Gerade berührt, ist eine Parabel (vgl. I. Teil, §. 29, 3).

6. Der geometrische Ort des Mittelpunkts des Kreises, welcher durch einen Punkt geht und einen Kreis berührt, ist ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte der gegebene Punkt und Kreismittelpunkt sind und dessen Hauptaxe der Radius des gegebenen Kreises ist. In welchem Fall ist der Kegelschnitt eine Ellipse, eine Hyperbel?

7. Von einem Kegelschnitt ist ein Brennpunkt, die zugehörige Leitgerade und die Excentricität gegeben. Es sollen die Schnittpunkte der Curve mit einer gegebenen Geraden bestimmt werden (siehe II. Teil, §. 13, 2c).

8. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes desjenigen Kreises, welcher eine Gerade und einen Kreis berührt, ferner des Kreises, welcher zwei Kreise berührt? — Unterscheidung zwischen der Lage der Ähnlichkeitspunkte innerhalb oder aufserhalb der Kreisfläche, sowie zwischen gleichartiger und ungleichartiger Berührung durch den Kreis.

§. 18.

Der Brennpunkt als Centrum der Projektion. Winkelbeziehungen im Kegelschnitt.

1. Von einem Kegelschnitt ist gegeben ein Brennpunkt und drei Punkte der Curve. Es sollen die Axen derselben bestimmt werden (mit Hilfe eines p. Kreises um den Brennpunkt). §. 41, 5

2. Dieselben Stücke sind zu bestimmen, wenn aufser dem Brennpunkt drei Tangenten gegeben sind. (Siehe I. Teil, Aufgabe §. 15, 13 r.)

3. Von einem Kegelschnitt ist ein Brennpunkt, ferner a) zwei Punkte und eine Tangente, oder b) zwei Tangenten und ein Punkt gegeben. Es sollen die zugehörigen Tangenten bezw. Berührungspunkte bestimmt werden.

4. In einem Kegelschnitt wird einer der Winkel der Strahlen vom Brennpunkt nach den Grenzpunkten einer Sehne durch den Strahl nach dem Schnittpunkt der zugehörigen Tangente halbiert. Der andere Winkel beider erstgenannten Strahlen wird durch den Strahl nach dem Schnittpunkt der Sehne mit der Polare des Brennpunktes halbiert. Die Sehne selbst wird durch die Strahlen hormonisch geteilt im Verhältnis der Fahrstrahlen nach den Grenzpunkten der Sehne. (Man beweise mit Hilfe eines p. Kreises um den Brennpunkt).

5. Gleitet eine Tangente an einem Kegelschnitt hin, während sie stets 2 feste Tangenten schneidet, so ist der Winkel der Halbstrahlen vom Brennpunkt nach diesen Schnittpunkten konstant, so lange nicht ein Schnittpunkt in unendliche Entfernung fällt; nach diesem Übergang tritt an die Stelle des Winkels sein Nebenwinkel, bezw. an Stelle des Halbstrahls dessen Gegenstrahl. Der Winkel ist hierbei stets gleich dem spitzen oder stumpfen Winkel der Halb-

strahlen vom Brennpunkt nach dem Berührungspunkt einer festen Tangente und nach dem Schnittpunkt der festen Tangenten.

6. Bei der Parabel ergänzt der Winkel der Strahlen vom Brennpunkt nach den Schnittpunkten der beweglichen mit zwei festen Tangenten den Winkel der letzteren zu $2R$. (Man benütze den Winkel der Fahrstrahlen nach dem Schnittpunkte der festen Tangente und der unendlich fernen Tangente.)

7. Beschreibt man um ein Tangentendreiseit einer Parabel einen Kreis, so geht derselbe durch den Brennpunkt.

8. Von allen Parabeln, welche von einem Dreieck eine Seite und die Verlängerungen der beiden andern berühren, liegen die Brennpunkte auf dem umbeschriebenen Kreis.

9. In einer Hyperbel liegen die Schnittpunkte einer Tangente mit den Asymptoten auf einem Kreis mit den Brennpunkten.

10. Wenn ein unveränderlicher Winkel so bewegt wird, dafs ein Schenkel stets durch einen bestimmten Punkt geht, während sein Scheitel auf der ursprünglichen Lage des andern Schenkels weiter gleitet, so beschreibt der zweite Schenkel tangierend eine Parabel, von welcher der ursprüngliche Scheitel ein Punkt ist und der Drehpunkt des Schenkels der Brennpunkt. (Benütze den Satz in Aufg. 8 zur Winkelbestimmung.)

11. Die Strahlen vom Brennpunkt nach den Schnittpunkten einer beliebigen Tangente mit den Scheiteltangenten eines Kegelschnitts sind zu einander normal.

12. Von einem Kegelschnitt sind die Scheitel und eine Tangente gegeben. Es sollen die Brennpunkte konstruiert werden. (Benutze den vorangehenden Satz.)

13. Es wird in einen Kegelschnitt ein Sehnenviereck gezeichnet, von welchem ein Nebeneck in den Brennpunkt fällt; ferner das zugehörige Tangentenvierseit. Es ist zu beweisen: a) die Nebenseiten des letzteren, welche durch den Brennpunkt gehen, stehen auf einander normal; b) dieselben halbieren die Winkel der durch den Brennpunkt gehenden Seiten des Sehnenvierecks; c) ebenso die Winkel der Strahlen vom Brennpunkt nach den anderen Schnittpunkten der Nebenseiten des Tangentenvierseits.

14. In einer Ellipse ist die halbe Summe der beiden Winkel, unter welchen eine Sehne von beiden Brennpunkten aus gesehen wird, gleich dem Nebenwinkel des Tangentenwinkels.

15. In einer Ellipse ist die Summe der beiden Winkel der Strahlen von den Brennpunkten nach den Schnittpunkten einer beweglichen mit zwei festen Tangenten konstant, nämlich gleich dem Supplement des Winkels der letzteren.

16. Bei der Hyperbel ist in beiden vorangehenden Sätzen Diffe-

renz der Winkel statt Summe zu setzen. Wie ist es bei der Parabel, wie beim Kreis?

17. Welche Sätze ergeben sich aus dem vorletzten, wenn die festen Tangenten zu einander parallel oder normal sind?

18. In einer Ellipse beträgt die Summe der beiden Winkel, unter welchen von beiden Brennpunkten aus ein Tangentenabschnitt, gemessen vom Berührungspunkt bis zu einem beliebigen Punkt der Tangente, gesehen wird, vermehrt um die Summe der beiden Winkel, unter welchen von letzterem Punkt die beiden Fahrstrahlen des Berührungspunktes erscheinen, $2R$. (Zum Beweis sind blos §. 41, 2b und die Sätze von den Winkeln des Dreiecks zu benutzen.)

19. Die Strahlen vom Schnittpunkt zweier Tangenten nach den beiden Brennpunkten bilden mit den benachbarten Tangenten oder mit der Halbierenden des Tangentenwinkels gleiche Winkel.

20. Wie ist der vorangehende Satz für die Parabel abzuändern?

21. Dreht man einen unveränderlichen Winkel um einen Brennpunkt eines Kegelschnitts als Scheitel, so beschreibt der Schnittpunkt der Tangenten, welche zur Sehne des Winkels gehören, einen Kegelschnitt, welcher mit ersterem den Brennpunkt und dessen Polare gemeinsam hat, während die Sehne selbst tangierend einen eben solchen dritten Kegelschnitt einhüllt. Der Schnittpunkt der Tangenten und der Berührungspunkt der Sehne liegen auf dem Strahl des Brennpunktes, welcher den unveränderlichen Winkel halbiert.

22. Der geometrische Ort des Schnittpunkts der Radien zweier Kreise nach inversen Punkten ist ein Kegelschnitt (vgl. Aufg. §. 17, 8), welcher mit jedem der Kreise p. liegt in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises als Centrum und die Potenzgerade als Axe. (Die Winkelhalbierende der Fahrstrahlen in einem Punkt des Kegelschnitts geht durch den Schnittpunkt der Tangenten der beiden inversen Punkte.) Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn der Ä.-Punkt innerhalb beider Kreise liegt, eine Hyperbel, wenn er aufserhalb liegt, eine Parabel, wenn er auf einem Kreise liegt, d. h. wenn für den andern Kreis eine Gerade genommen ist.

Aufgaben zum elften Kapitel.

§. 19.

Metrische Beziehungen der Abscissen und Ordinaten der Kegelschnitte.

Bemerkung. Zu §. 42 siehe II. Teil, §. 17 und Aufg. §. 9.

1. Man lege durch 2 Punkte A und B eines Kegelschnitts zwei Kreise, welche mit dem Kegelschnitt noch je eine weitere gemein- §. 43.

same Sehne PL und P_1L_1 haben, die die erste Sehne AB in O und O_1 schneiden mögen. Was für eine Lage ergiebt sich für PL und P_1L_1 aus der für die Kreissehne geltenden Beziehung: $\frac{AO \cdot OB}{PO \cdot OL} = 1 = \frac{A_1O_1 \cdot O_1B_1}{P_1O_1 \cdot O_1L_1}$ in Verbindung mit der in §. 43, 1 (S. 124) abgeleiteten Gleichung?

2. Es sind die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel in Bezug auf die Hauptaxen als Koordinatenaxen aus §. 41, 2c abzuleiten, ebenso die der Parabel aus §. 41, 3c.

3. Das Produkt der Strecken, welche eine beliebige Tangente auf 2 parallelen Tangenten abschneidet, ist konstant, gleich dem Quadrat der kleinen Axe in der Ellipse. (Mit Hilfe der Angabe in der Aufg. §. 14, 7 (S. 182) nachzuweisen.)

4. Aus dem vorangehenden Satze und dem in Aufg. §. 14, 6 (S. 182) soll die Gleichung der Ellipse abgeleitet werden.

5. Es sollen in den Gleichungen: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, bezw. $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ für x beliebige Werte angenommen und daraus die Werte von y bestimmt werden; hiernach soll die Gestalt der Kurve (Ausdehnung in Richtung der Axe, Symmetrie u. s. w.) ermittelt werden.

6. Wenn eine Ellipse und ein Kreis einen gemeinsamen Durchmesser haben, so verhält sich die Kreisordinate irgend eines Punktes desselben zu der zugehörigen Ellipsenordinate wie der Durchmesser zum zugeordneten.

7. Es soll die Richtigkeit folgender Ellipsenkonstruktionen nachgewiesen werden:

a) Man zeichnet 2 koncentrische Kreise, von welchen 2 zu einander normale Durchmesser die grofse und kleine Axe der Ellipse darstellen. Durch den Endpunkt eines Radius des kleineren Kreises zieht man eine Parallele zum Durchmesser des gröfseren und durch den Endpunkt des entsprechenden Radius des gröfseren Kreises eine Parallele zum Durchmesser des kleineren. Der Schnittpunkt beider Geraden ist ein Punkt der Ellipse.

b) Bewegt man eine Gerade mit drei bestimmten Punkten derselben der Art, dafs zwei der Punkte auf den Schenkeln eines R hingleiten, so beschreibt der dritte Punkt eine Ellipse, dessen Axen die Abstände des dritten Punktes von den beiden andern sind.

c) Man trage die grofse und kleine Axe auf eine Gerade aneinander an, teile beide Strecken in gleichviele Teile, beschreibe um die kleine Axe als Durchmesser einen Kreis und übertrage die Ordinaten der Teilpunkte des Durchmessers als Ordinaten an die entsprechenden Teilpunkte der grofsen Axe.

d) Zu 2 zugeordneten Halbmessern MA und MC einer Ellipse erhält man weitere Punkte auf folgende Weise. Man beschreibt um M mit MA als Radius einen Kreis, zieht in diesem den Radius $MC_1 \perp MA$ und verbindet C mit C_1; zu irgend einem Punkt Q auf MA zieht man die Kreisordinate QP_1 und $QP \parallel MC$. Alsdann wird QP von einer Geraden $P_1P \parallel CC_1$ in einem Punkt der Ellipse geschnitten.

8. Um eine Ellipse zu zeichnen, von welcher zwei zugeordnete Halbmesser MA und MC gegeben sind, zeichne man das Parallelogramm $AMCO$, teile OC und CM in n gleiche Teile, von welchen die erstern von O aus, die letztern von M aus numeriert werden. Der Strahl von A nach einem Punkt von OC schneidet den von dem anderen Grenzpunkt B des Durchmessers AB nach dem gleich bezeichneten Punkt von MC gezogenen Strahl in einem Punkt der Ellipse.

9. Wie ist die Konstruktion der vorangehenden Aufgabe zu ändern, um eine Parabel oder Hyperbel zu erhalten?

10. Wenn von einem Kegelschnitt ein Durchmesser AB und eine zugeordnete Sehne CD gegeben ist, so werden auf folgende Weise weitere Punkte der Kurve gefunden. Man ziehe $CS \parallel AB$ und eine beliebige Parallele zu AD, welche CS in M und CD in N schneide. Alsdann ist der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden AM und BN ein Punkt des Kegelschnitts. Es ist dies nachzuweisen: a) dadurch, dafs für die Ordinate des betr. Punktes und die gegebene Ordinate die in §. 43, 1 ausgesprochene Beziehung abgeleitet wird, b) mittels des Pascal'schen Satzes, indem noch der mit D diametrale Punkt des Kegelschnitts zu Hilfe genommen wird.

---

11. Die Strecke zwischen dem Fufspunkt einer Ordinate auf einem Durchmesser und dem Schnittpunkt der zugehörigen Tangente mit demselben (Subtangente) ist in der Ellipse $= \frac{a^2 - x^2}{x}$, wenn a der halbe Durchmesser, x die Abscisse des Punktes ist.

12. Es soll aus der vorangehenden Angabe nachgewiesen werden, dafs die Tangente am Endpunkt einer Ellipsenordinate der Hauptaxe und die Tangente vom Endpunkt der zugehörigen Ordinate des um die grofse Axe beschriebenen Kreises einander auf der Verlängerung dieser Axe schneiden. — Wie konstruiert man mit Hilfe dieses Kreises zu einem Ellipsenpunkt die Tangente?

13. Ist die Strecke von einem Punkt der Hauptaxe der Ellipse bis zum Mittelpunkt $= x$, die von demselben Punkt bis zum Schnittpunkt der Geraden, welche im Endpunkt der zugehörigen Ordinate

auf dessen Tangente normal steht, $= n$ (Subnormale), so ist $n : x = b^2 : a^2$.

14. Die Kometenbahnen sind Ellipsen mit sehr grofser Excentricität. Da sie nur in der Nähe des einen Brennpunkts (der Sonne) beobachtet werden können, so nimmt man ihre Bahnen häufig als parabolisch an. Welche Gröfse der Scheitelgleichung der Ellipse (§. 43, 5) wird damit vernachlässigt?

---

15. Von einer Parabel ist der Parameter p gegeben. Es soll für irgend eine Abscisse x die Ordinate konstruiert werden.

16. Von einer Parabel ist der Scheitel S, die Axe g und ein Punkt P gegeben. Wie findet man den Parameter, den Brennpunkt, die Leitgerade?

17. Von einer Parabel sind zwei Punkte und die Leitgerade gegeben. Man soll den Brennpunkt finden.

18. Von einer Parabel sind zwei Punkte und die Axe gegeben. Man soll den Scheitel konstruieren. (Für die Coordinaten x, y und x_1, y_1 folgt: $x : (x_1 - x) = y^2 : \sqrt{y_1^2 - y^2}$).

19. Zur graphischen Lösung der Aufgabe: „zu einem gegebenen Würfel einen solchen von doppelter Gröfse zu konstruieren," nehme man die Würfelkante s und das Doppelte $2s$ derselben als Parameter zweier Parabeln, welche den Scheitel gemeinsam haben, während ihre Axen zu einander normal sind. In ersterer Parabel ist dann die Ordinate des Schnittpunktes beider Parabeln die gesuchte Würfelkante.

Altar des Apollo zu Delphi; Ausspruch des Plato.

20. In einer Parabel ist die Subtangente (s. Aufg. 11 auf v. S.) gleich der doppelten Abscisse. Dies soll aus §. 41, 2c abgeleitet werden.

21. In einer Parabel ist die Subnormale (s. Aufg. 13) gleich dem halben Parameter.

22. In einer Parabel ist die von der Axe begrenzte Normale eines Punktes die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und dem Fahrstrahl.

23. In einer Parabel ist die Hälfte der von der Axe begrenzten Tangente die mittlere Proportionale zu dem Parameter und der Abscisse des Berührungspunktes.

24. Von einer Parabel ist die Axe, eine Tangente und der Berührungspunkt gegeben; wie findet man den Brennpunkt und den Parameter?

25. Von einer Parabel ist die Axe, der Scheitel und eine Tangente gegeben. Wie findet man den Berührungspunkt?

26. Von einer Parabel ist ein Punkt, seine Tangente und die

Richtung des Durchmessers gegeben, sowie die Gleichung für diesen Durchmesser $y^2 = \frac{2c^2}{g} \cdot x$, wobei c und g gegebene Strecken sind (siehe Anm. S. 129). Es soll der Brennpunkt, der Scheitel, die Leitgerade gefunden werden (§. 41, 3b und §. 43, 2 Zusatz b).

---

27. Welche Art von Kurve ist durch die rechtwinkeligen Koordinaten x, y der Gleichung $y^2 = x^2 - a^2$ dargestellt?

28. In der Hyperbel ist die ideelle Halbaxe die mittlere Proportionale der Abschnitte, in welche die Strecke zwischen beiden Brennpunkten durch einen Scheitel geteilt wird.

29. Bei der gleichseitigen Hyperbel ist der Fahrstrahl des Scheitels $= a(\sqrt{2} \pm 1.)$

30. Von allen Hyperbeln mit gemeinsamen Scheiteln schneiden einander die Tangenten der Schnittpunkte einer zur Axe normalen Geraden in einem Punkt der Axe. (Übereinstimmung der Subtangenten).

31. In einer Hyperbel ist die Hälfte eines ideellen Durchmessers die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten, in welche eine mit ihm parallele Strecke zwischen den Asymptoten von einem Hyperbelast geteilt wird.

32. Es soll aus der vorangehenden Angabe gefolgert werden, dafs mit wachsender Ordinate die Kurve sich der Asymptote nähert.

---

33. Ist r ein Fahrstrahl, α dessen Winkel mit der Axenrichtung von dem Brennpunkt nach dem ihm zunächst liegenden Scheitel, so ist die Polargleichung a) der Ellipse $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\alpha}$,

b) der Hyperbel $r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\alpha}$,

c) der Parabel $r = \frac{p}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{p}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Diese Gleichungen sollen abgeleitet werden und die Werte bestimmt, welche sich für $\alpha = 0$, $\alpha = 90^0$, $\alpha = 180^0$ u. s. w. ergeben.

34. Wie lauten die Polargleichungen, wenn der Pol statt in den Brennpunkt in den Mittelpunkt verlegt wird?

---

35. In einer Parabel ist der Winkel der Normalen zu zwei Punkten einerseits der Axe halb so grofs als der Winkel der zugehörigen Fahrstrahlen.

36. Der Krümmungshalbmesser in einem Parabelpunkt ist viermal

so grofs, als der Halbmeser des Kreises, welcher in diesem Punkt berührt und durch den Brennpunkt geht

37. Im Scheitel ist der Krümmungshalbmesser der Parabel gleich dem halben Parameter.

38. Wenn man den Fahrstrahl eines Parabelpunktes in der Richtung von diesem Punkt zum Brennpunkt um seine eigene Gröfse verlängert und im Endpunkt eine Normale errichtet, so schneidet diese Normale die Normale des Parabelpunktes im Krümmungsmittelpunkt.

39. In einer Ellipse ist das Produkt der Normalen von den Brennpunkten auf eine Tangente gleich dem Quadrat der kleinen Axe.







